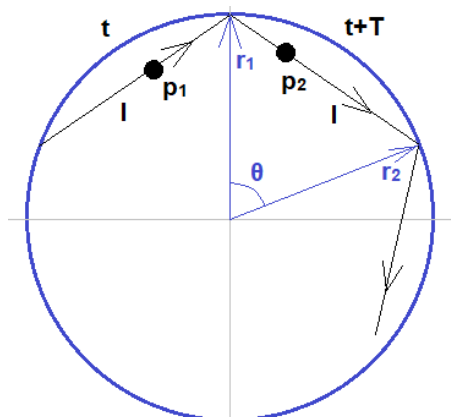


Η πολλάκις ανακλώμενη μπάλα.

N. Παναγιωτίδης



Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, που θα μπορούσε με κατάλληλη προσαρμογή να διδαχθεί στο σχολείο για την κατανόηση της κεντρομόλου δύναμης, είναι το εξής: είμαι στο εσωτερικό ενός κυκλικού πύργου και κλωτσάω μια μπάλα που έχω στο πόδι μου. Η μπάλα κινείται χωρίς απώλεια ενέργειας και ανακλάται συνεχώς από τον τοίχο. Ποια είναι η μέση δύναμη, $\langle \vec{F} \rangle$, που ασκείται στη μπάλα;

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η απόσταση, όπως και ο χρόνος, μεταξύ δυο διαδοχικών ανακλάσεων της μπάλας είναι σταθερές ποσότητες που θα τις συμβολίσουμε με l και T αντίστοιχα. Επομένως το φαινόμενο είναι περιοδικό. Η μέση δύναμη σε ένα περιοδικό φαινόμενο ορίζεται ως:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\int_t^{t+T} \vec{F} dt'}{T}$$

όπου t μια χρονική στιγμή πριν τη ν-οστή ανάκλαση και $t + T$ η αντίστοιχη χρονική στιγμή μετά απ' αυτήν. Επειδή η ανάκλαση που μας ενδιαφέρει συμβαίνει κάποια χρονική στιγμή στο διάστημα $(t, t + T)$, δεν έχει σημασία ποια είναι η ακριβής τιμή του t .

Έστω $\Delta \vec{p} \equiv \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ η μεταβολή της ορμής κατά την ανάκλαση. Η $\Delta \vec{p}$ είναι η συνολική μεταβολή της ορμής στο διάστημα $(t, t + T)$ και, σύμφωνα με τον 2^ο Νόμο του Νεύτωνα σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\Delta \vec{p} = \int_t^{t+T} \vec{F} dt'$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση για το $\langle \vec{F} \rangle$:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{T}$$

Επειδή η δύναμη που ασκείται στη μπάλα κατά την ανάκλαση έχει τη φορά του $-\hat{r}$, δηλ. έχει φορά προς το κέντρο, περιμένουμε και το $\Delta \vec{p}$ να έχει την ίδια φορά, δηλαδή:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{\Delta p}{T} \hat{r}$$

(1)

όπου $\Delta p = |\Delta \vec{p}|$.

Ας υπολογίσουμε τώρα το Δp και το T . Έστω $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$.

$$\Delta p = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2} = \sqrt{2p^2 - 2p^2 \cos \theta} = \sqrt{2}p\sqrt{1 - \cos \theta}$$

(2)

όπου θ είναι η επίκεντρος γωνία μεταξύ των σημείων της ν-οστής και της επόμενης ανάκλασης και, όπως είναι εύκολο να αποδειχθεί με γεωμετρία, είναι η αλλαγή στην κατεύθυνση της ορμής μεταξύ δυο διαδοχικών ανακλάσεων.

Για το T έχουμε:

$$T = \frac{l}{v}$$

όπου l , η απόσταση μεταξύ διαδοχικών ανακλάσεων, δίνεται από τον τύπο:

$$l = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2} = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos \theta} = \sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos \theta}$$

Το T τώρα γίνεται:

$$T = \frac{\sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos \theta}}{v}$$

(3)

Αντικαθιστώντας τη (2) και την (3) στην (1):

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{\sqrt{2}p\sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos \theta}} v \hat{r} = -\frac{p}{r} v \hat{r} = -\frac{mv^2}{r} \hat{r}$$

(4)

δηλαδή η μέση δύναμη είναι ίση με την κεντρομόλο!

Ας υποθέσουμε τώρα ότι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με όλο και μικρότερες γωνίες θ . Στο όριο $\theta \rightarrow 0$ τείνουμε να έχουμε 'συνεχή ανάκλαση'. Άρα μπορούμε να εκλάβουμε την ομαλή κυκλική κίνηση σαν το όριο μιας διαδικασίας κατά την οποία η μπάλα κινείται ανακλώμενη στον τοίχο με όλο και μικρότερα βήματα. Όμως, όποιο και να είναι το βήμα, η μέση δύναμη είναι ίση με την κεντρομόλο της ΟΚΚ.

