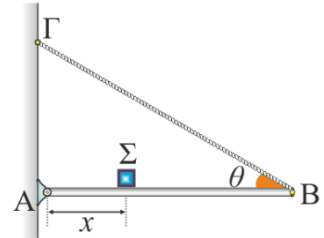


Επαναληπτικά Θέματα στο Στερεό**ΘΕΜΑ 1.**

Η ράβδος του σχήματος είναι ομογενής και έχει μάζα $M = 6 \text{ kg}$ και μήκος $l = 3 \text{ m}$. Πάνω στη ράβδο τοποθετούμε ένα σώμα Σ , μικρών διαστάσεων, που έχει μάζα $m = M/2$. Αρχικά τοποθετούμε το Σ στη θέση Α και αρχίζουμε να το μετακινούμε πολύ αργά πάνω στη ράβδο ώσπου να σπάσει το νήμα. Πριν τοποθετήσουμε το σώμα Σ , η τάση του νήματος έχει ίδιο μέτρο με το βάρος της ράβδου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.



α. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο πριν τοποθετήσουμε το σώμα Σ και υπολογίστε τα μέτρα τους.

β. Βρείτε πώς μεταβάλλεται το μέτρο της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σώματος από το σημείο Α

γ. Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση του σώματος Σ πάνω στη ράβδο, αν η μέγιστη δύναμη που αντέχει το νήμα (όριο θραύσης) είναι $T_{\max} = 100 \text{ N}$.

Απ. [α. $w = T = F = 60 \text{ N}$, β. $F = 3,2/3 \text{ N}$, γ. $x = 2 \text{ m}$]

Σκοπός της άσκησης

Να θυμηθεί ο υποψήφιος

- Πως σχεδιάζουμε δυνάμεις
- Η δύναμη N' που ασκεί στο δάπεδο ένα σώμα που ισορροπεί σε οριζόντιο δάπεδο είναι ίση με το βάρος του
- Τις συνθήκες ισορροπίας
- Τις ροπές τις προσθέτουμε αλγεβρικά διότι βρίσκονται όλες στον ίδιο άξονα
- $\Sigma \tau = 0$ ως προς κάθε άξονα
- Συμφέρει να πάρουμε τις ροπές ως προς άξονα από τον οποίο διέρχεται άγνωστη δύναμη
- Όταν ζητάμε μέγιστο ή ελάχιστο αναζητούμε κάποια ανίσωση στην οποία θα εμφανίσουμε την μεταβλητή που μας ζητάνε. Πχ για να μην σπάει ένα νήμα πρέπει $T \leq T_{\theta}$ στην οποία θα εκφράσουμε την τάση ως συνάρτηση του x
- Αν μας ζητάνε κάποια απόσταση θα την βρίσκουμε από τη σχέση $\Sigma \tau = 0$
- Όταν ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση 3 μη παραλλήλων δυνάμεων τότε οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο

ΛΥΣΗ

α. Πριν τοποθετήσουμε το σώμα Σ, στη ράβδο ασκούνται τρεις δυνάμεις και επειδή η ράβδος ισορροπεί, οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο. Θα υπολογίσουμε τη γωνία θ . Λόγω ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν ως προς κάθε σημείο.

Μας συμφέρει να πάρουμε τις ροπές ως προς το Κ

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_y(AK) = T_y(BK) \Rightarrow F_y = T_y \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T_y = w \Rightarrow 2T\eta\mu\theta = T \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T\sigma\upsilon\nu\theta$$

Από την (1) βρίσκουμε $F_y = T\eta\mu\theta$.

Για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$T = Mg = 60 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{T^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + T^2\eta\mu^2\theta} = T \Rightarrow F = 60 \text{ N}$$

β. Θα υπολογίσουμε την τάση του νήματος σαν συνάρτηση της μετατόπισης x του σώματος Σ από το Α.

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y l - Mg \frac{l}{2} - mgx = 0 \Rightarrow$$

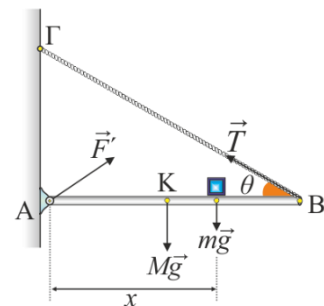
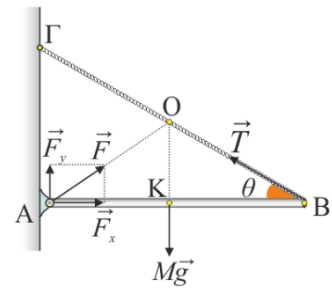
$$T\eta\mu\theta l = Mg \frac{l}{2} + mgx \Rightarrow \frac{T}{2} l = Mg \frac{l}{2} + \frac{M}{2} gx \Rightarrow$$

$$T = Mg + Mg \frac{x}{l} \Rightarrow T = 60 + 20x \text{ (SI)}$$

γ. Πρέπει:

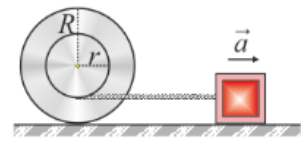
$$T \leq T_{\max} \Rightarrow 60 + 20x \leq 100 \Rightarrow 20x \leq 40 \Rightarrow x \leq 2$$

Επομένως η μέγιστη μετατόπιση του σώματος Σ πάνω στη ράβδο είναι $x = 2 \text{ m}$.



ΘΕΜΑ 2 Κινήσεις

Τροχός ακτίνας $R = 0,4 \text{ m}$ και μάζας $m = 1 \text{ kg}$ φέρει εγκοπή ακτίνας $r = R/2$ στην οποία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται στο μέσον κύβου πλευράς R και μάζας $M = 6 \text{ kg}$, όπως στο σχήμα. Μετακινούμε τον κύβο με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$ και ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αρχικά ($t_0 = 0$) τα σώματα είναι ακίνητα και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει μήκος $l = 3,5R$. Βρείτε:



- Τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- Τη χρονική στιγμή που τα δύο σώματα θα έρθουν σε επαφή.
- Την ταχύτητα του σημείου του τροχού που θα έρθει σε επαφή με τον κύβο λίγο πριν την κρούση.
- Την επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου του τροχού όταν η κινητική ενέργεια του κύβου είναι $1,8 \text{ J}$.
- Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου λίγο πριν την κρούση.
- Την τάση του νήματος
- Το ρυθμό αύξησης της κινητικής ενέργειας του τροχού λίγο πριν την κρούση

Απ. [α. $\alpha_\gamma = 10 \text{ rad/s}^2$, β. $t_1 = 1 \text{ s}$, γ. $v = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$, δ. $a_A = 10 \text{ m/s}^2$, ε. $dK/dt = 24 \text{ J/s}$]

Σκοπός της άσκησης είναι να θυμίσουμε ότι:

- Η κύλιση μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθετη κίνηση η οποία προκύπτει από την επαλληλία Μιας μεταφορικής κίνησης = κίνηση του CM Και μιας περιστροφικής κίνησης γύρω από άξονα που διέρχεται από το CM
- Τις σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης ($\Delta x_{cm}, v_{cm}, a_{cm}$) με τα αντίστοιχα μεγέθη ($\Delta \theta, \omega, \alpha_\gamma$) της περιστροφικής κίνησης

$$\Delta x_{cm} = R \cdot \Delta \theta, v_{cm} = R\omega, a_{cm} = R\alpha_\gamma$$

- Τις εξισώσεις κίνησης
- Όλα τα σημεία του τεντωμένου τμήματος ενός νήματος έχουν ίδια ταχύτητα
- Το τμήμα του νήματος που είναι τεντωμένο συμπεριφέρεται ως μέρος του στερεού
- Το τύλιγμα-ξετύλιγμα του νήματος οφείλεται στην περιστροφική κίνηση
- Το μήκος του νήματος που τυλίγεται ή ξετυλίγεται οφείλεται στην περιστροφική κίνηση και είναι $l_{\text{τυλίγεται}} \text{ ή } l_{\text{ξετυλίγεται}} = r\theta$ όπου r η ακτίνα στην οποία είναι τυλιγμένο το νήμα
- Όταν λέμε «ρυθμός μεταβολής» εννοούμε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\pi\epsilon\rho}}{dt}$$

Ο κύβος κάνει μεταφορική κίνηση οπότε :

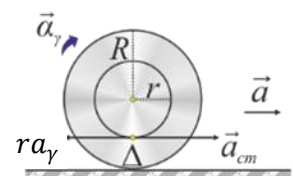
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt}$$

ΛΥΣΗ

α. Ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε θα είναι $a_{cm} = \alpha_\gamma R$.

Για το σημείο Δ ισχύει:

$$a_\Delta = a_{cm} - \alpha_\gamma r = a_{cm} - \frac{R}{2} \alpha_\gamma$$



Η επιτάχυνση a του κύβου είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Δ

$$a = a_{\Delta} \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{R}{2} \alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{a_{cm}}{2} = \frac{a_{cm}}{2} \Rightarrow a_{cm} = 2a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = 10 \text{ rad/s}^2$$

Παρατηρούμε ότι το Κ.Μ. του τροχού έχει διπλάσια επιτάχυνση από την επιτάχυνση του κύβου. Έτσι κάθε στιγμή η μετατόπιση του Κ.Μ. του τροχού θα είναι διπλάσια από την μετατόπιση του κύβου.

β. Όταν έρθουν σε επαφή, το κέντρο μάζας του τροχού έχει διανύσει διάστημα x_1 και ο κύβος έχει διανύσει διάστημα x_2 . Ισχύει:

$$x_1 = 2x_2$$

$$x_1 + R = x_2 + l \Rightarrow 2x_2 + R = x_2 + l \Rightarrow x_2 = l - R = 2,5R$$

Είναι:

$$x_2 = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_2}{\alpha}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5R}{\alpha}} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

γ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή $t = 1 \text{ s}$ θα είναι:

$$v_{cm} = a_{cm} \cdot t = 4 \cdot 1 = 4 \text{ m/s}$$

Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού θα είναι

$$v_{\gamma\rho} = \omega R = 4 \text{ m/s}$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$ η ταχύτητα του σημείου επαφής έχει μέτρο:

$$v = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2} v_{cm} = \sqrt{2} a_{cm} t_1 \Rightarrow v = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

δ. Το ψηλότερο σημείο έχει δύο συνιστώσες επιτάχυνσης που είναι κάθετες μεταξύ τους

- Την εφαπτομενική επιτάχυνση $a_{\varepsilon\varphi} = 2a_{cm} = 8 \text{ m/s}^2$
- Την κεντρομόλο επιτάχυνση $a_{\kappa} = \omega^2 R$

Από την κινητική ενέργεια του κύβου μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κύβου και στη συνέχεια να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα του τροχού από την οποία θα υπολογίσουμε την a_{κ}

$$K = \frac{1}{2} M v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{M}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3,6}{6}} = \sqrt{0,6} \text{ m/s}$$

$$v_{cm} = 2v \Rightarrow R\omega = 2v \Rightarrow \omega = \frac{2v}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4v^2}{R^2}$$

$$a_{\kappa} = \omega^2 R = \frac{4v^2}{R^2} R = \frac{4v^2}{R} = \frac{4 \cdot 0,6}{0,4} = 6 \text{ m/s}^2$$

Η επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου θα έχει μέτρο:

$$a_A = \sqrt{a_{\varepsilon}^2 + a_{\kappa}^2} \Rightarrow a_A = 10 \text{ m/s}^2$$

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου λίγο πριν την κρούση είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv = Mav = Ma^2 t_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 48 \text{ J/s}$$

ζ. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τον τροχό

Για την μεταφορική κίνηση :

$$\Sigma F = ma_{cm} \Rightarrow T - T_s = ma_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow T_s R - T \frac{R}{2} = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow$$

$$T_s - \frac{T}{2} = \frac{1}{2} m R a_\gamma \Rightarrow$$

$$T_s - \frac{T}{2} = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad (2)$$

Προσθέτουμε (1) και (2)

$$\frac{T}{2} = \frac{3}{2} m a_{cm} \Rightarrow T = 3 m a_{cm} = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12 \text{ N}$$

η.

Λίγο πριν την κρούση ο τροχός έχει γωνιακή ταχύτητα $v_{cm} = 4 \frac{m}{s}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{dW_T}{dt} + \frac{dW_{T_s}}{dt} = \frac{dW_T}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{T(\mu\epsilon\tau)}}{dt} + \frac{dW_{T(\pi\epsilon\rho)}}{dt} = \frac{T dx_{cm}}{dt} - \frac{T r d\theta}{dt} = T v_{cm} - T \frac{R}{2} \omega = \frac{T v_{cm}}{2} = 24 \text{ J/s}$$

ΘΕΜΑ 3 Κίνηση ράβδου που δεν έχει σταθερό άξονα περιστροφής

Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος έχει μάζα $M = 2 \text{ kg}$, μήκος $l = 6 \text{ m}$ και βρίσκεται ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο (επίπεδο του σχεδίου). Στο άκρο A της ράβδου ασκούμε οριζόντια δύναμη, κάθετη στη ράβδο, μέτρου $F = 20 \text{ N}$. Βρείτε:

- Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας.
- Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
- Τη γραμμική επιτάχυνση a_ε ενός σημείου που βρίσκεται σε απόσταση x από το άκρο A και κάντε το διάγραμμα $a_\varepsilon = f(x)$.
- Τη γραμμική επιτάχυνση των σημείων A και B.
- Ποιο σημείο της ράβδου έχει $a_\varepsilon = 0$.

Δίδεται $I = \frac{1}{12} Ml^2$

Απ. [α. $a_{cm} = 10 \text{ m/s}^2$, β. $\alpha_\gamma = 10 \text{ rad/s}^2$, γ. $a_\varepsilon = 40 - 10x \text{ (SI)}$, με $0 \leq x \leq 6 \text{ m}$,
δ. $a_{\varepsilon(A)} = 40 \text{ m/s}^2$, $a_{\varepsilon(B)} = -20 \text{ m/s}^2$, ε. $x = 4 \text{ m}$]

Σκοπός της άσκησης

A. Ένα ελεύθερο στερεό που είναι αρχικά ακίνητο θα κάνει:

- Μεταφορική κίνηση όταν οι ροπές ως προς το κέντρο μάζας έχουν $\Sigma \tau_{cm} = 0$
- Περιστροφική κίνηση όταν ασκείται ζεύγος δυνάμεων ή (Ζεύγη)
- Σύνθετη κίνηση όταν οι δυνάμεις δεν αποτελούν ζεύγη

B. Για να μελετήσουμε την σύνθετη κίνηση στερεού εφαρμόζουμε θεμελιώδη νόμο

- για την μεταφορική κίνηση (κίνηση του CM)
- για την περιστροφική κίνηση

Γ. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σημείου είναι κάθε στιγμή η συνισταμένη δύο ταχυτήτων – επιταχύνσεων

* Για την επιτάχυνση δεν πρέπει να ξεχνάμε πως υπάρχει και η συνιστώσα a_K

Δ. Στο σχολικό βιβλίο η επιτροχία επιτάχυνση αναφέρεται ως ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας ενός σημείου

ΛΥΣΗ

α. Για τη μεταφορική κίνηση της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma F = ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{F}{m} \Rightarrow a_{cm} = 10 \text{ m/s}^2$$

β. Για τη στροφική κίνηση της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(cm)} = I\alpha_\gamma \Rightarrow F \frac{l}{2} = \frac{1}{12} Ml^2 \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{6F}{Ml} \Rightarrow \alpha_\gamma = 10 \text{ rad/s}^2$$

γ. Για ένα σημείο της ράβδου που βρίσκεται σε απόσταση x από το άκρο A ισχύει:

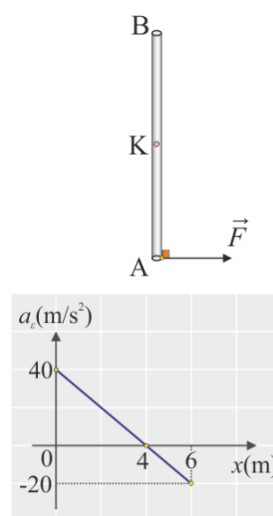
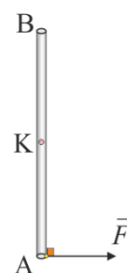
$$a_\varepsilon = a_{cm} + \alpha_\gamma \left(\frac{l}{2} - x \right) \Rightarrow a_\varepsilon = 40 - 10x \text{ (SI)}$$

όπου $0 \leq x \leq 6 \text{ m}$. Το διάγραμμα $a_\varepsilon = f(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

δ. Για τα άκρα A και B της ράβδου έχουμε $x_A = 0$ και $x_B = l = 6 \text{ m}$, οπότε προκύπτουν:

$$a_{\varepsilon(A)} = 40 \text{ rad/s}^2 \text{ και } a_{\varepsilon(B)} = -20 \text{ rad/s}^2$$

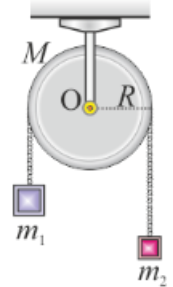
ε. Όταν $a_\varepsilon = 0$, είναι:



$$40 - 10x = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μία τροχαλία, μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό λεπτό νήμα μεγάλου μήκους, που διατρέχει το αυλάκι της τροχαλίας. Αρχικά το σύστημα κρατείται ακίνητο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σωμάτων να είναι $h = 4 \text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής έχει μέτρο 52 N . Τα μέτρα των τάσεων που δέχονται τα σώματα από τα νήματα διαφέρουν κατά 4 N και τα σώματα φτάνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο μετά από χρόνο 1 s . Βρείτε:



- α. Το μέτρο της επιτάχυνσης της μεταφορικής κίνησης που εκτελούν τα δύο σώματα καθώς και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.
 - β. Τις μάζες των δύο σωμάτων.
 - γ. Το μέτρο της ταχύτητας των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.
 - δ. Τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.
 - ε. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας όταν το σώμα μάζας m_1 έχει μετακινηθεί από τη θέση στην οποία βρισκόταν τη στιγμή $t = 0$ κατά $h' = 18 \text{ m}$.
 - ζ. Τον αριθμό των περιστροφών της τροχαλίας όταν η κατακόρυφη απόσταση των σωμάτων γίνει τριπλάσια της αρχικής καθώς και τις ταχύτητες των σωμάτων τότε.
 - η. Τη στροφορμή των σωμάτων ως προς τον άξονα της τροχαλίας τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$
 - θ. Τη στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα της τροχαλίας τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$ με 2 τρόπους
 - ι. Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας
 - κ. Το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του συστήματος
 - λ. Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του συστήματος τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$
 - μ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$
- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απ. [α. $\alpha_\gamma = 20 \text{ rad/s}^2$, β. $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, γ. $v_1 = v_2 = 8 \text{ m/s}$, δ. $I = 0,04 \text{ kgm}^2$,
ε. $\omega' = 60 \text{ rad/s}$, ζ. $N = 20/\pi$ περιστροφές, $v'_1 = v'_2 = 8 \text{ m/s}$]

Σκοπός της Άσκησης

Οι μαθητές να θυμηθούν

- A. Να σχεδιάζουν δυνάμεις στα σώματα
- B. Ότι το τεντωμένο σχοινί ασκεί αντίθετες δυνάμεις στα σώματα που συνδέει
- Γ. Όλα τα σημεία ενός νήματος έχουν ίδια ταχύτητα κατά μέτρο και ίδια επιτόρξια επιτάχυνση

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
- Δ. Τη σχέση που συνδέει τις επιταχύνσεις των σωμάτων με την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = R\alpha_\gamma$$
- E. Όταν η περιστροφή σώματος γίνεται γύρω από άξονα που περνά από το CM τότε το κέντρο μάζας θα παραμένει ακίνητο και για τις δυνάμεις θα ισχύει : $\Sigma F = 0$
- Z. Τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης αλλά και της ομαλά μεταβαλλόμενης περιστροφής
- H. Ο αριθμός περιστροφών υπολογίζεται με τη σχέση:

$$\Delta\theta = N \cdot 2\pi \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

Θ. Να εφαρμόζουν τον θεμελιώδη νόμο για κάθε σώμα

Ι. Όταν εφαρμόζουν αλγεβρικά το θεμελιώδη νόμο $\Sigma F = ma$, μπορούμε να παίρνουμε ως θετική φορά την φορά της επιτάχυνσης και αντίστοιχα στην εξίσωση $\Sigma \tau = I\alpha_\gamma$ να παίρνουμε ως θετική την φορά της γωνιακής επιτάχυνσης

ΛΥΣΗ

Πριν αρχίσουμε να λύνουμε γράφουμε τη σχέση που συνδέει την επιτάχυνση a των σωμάτων με την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = R\alpha_\gamma$$

α. Τα σώματα Σ1, Σ2 κάνουν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και διανύουν ίσα διαστήματα

$$s_1 = s_2 = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{h}{t^2} \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2 \text{ και } \alpha_\gamma = \frac{a}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 20 \text{ rad/s}^2$$

β. Από την ισορροπία της τροχαλίας έχουμε:

$$F = Mg + T_1 + T_2 \Rightarrow T_1 + T_2 = 32 \text{ N}$$

και από την εκφώνηση δίνεται:

$$T_1 - T_2 = 4 \text{ N}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$T_1 = 18 \text{ N και } T_2 = 14 \text{ N}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο για τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 έχουμε:

$$m_1g - T_1 = m_1a \Rightarrow m_1 = \frac{T_1}{g - a} \Rightarrow m_1 = 3 \text{ kg}$$

$$T_2 - m_2g = m_2a \Rightarrow m_2 = \frac{T_2}{g + a} \Rightarrow m_2 = 1 \text{ kg}$$

γ. Τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα:

$$v_1 = v_2 = at_1 \Rightarrow v_1 = v_2 = 8 \text{ m/s}$$

δ. Από τον θεμελιώδη νόμο για την τροχαλία έχουμε:

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha_\gamma \Rightarrow I = \frac{(T_1 - T_2)R}{\alpha_\gamma} \Rightarrow I = 0,04 \text{ kgm}^2$$

ε. Το σώμα μάζας m_1 έχει μετακινηθεί κατά $h' = 18 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή:

$$t' = \sqrt{2h'/a} = 3 \text{ s}$$

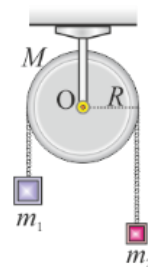
Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας εκείνη τη χρονική στιγμή θα είναι:

$$\omega' = \alpha_\gamma t' \Rightarrow \omega' = 60 \text{ rad/s}$$

ζ. Όταν η απόσταση των σωμάτων γίνει $d = 12 \text{ m}$ σημαίνει ότι από τη στιγμή που βρέθηκαν στο ίδιο ύψος και μετά τα σώματα θα έχουν διανύσει διαστήματα

$$h_1 = h_2 = 6 \text{ m}$$

Άρα το συνολικό διάστημα κάθε σώματος θα είναι



$$s_1 = s_2 = 8m$$

Αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή:

$$t'_1 = \sqrt{2h'_1/a} = 2 \text{ s}$$

Ο αριθμός των περιστροφών N υπολογίζεται ως εξής:

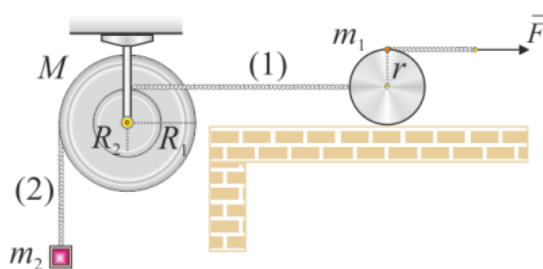
$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_\gamma t'^2_1 \Rightarrow 2\pi N = \frac{1}{2} \alpha_\gamma t'^2_1 \Rightarrow N = \frac{\alpha_\gamma t'^2_1}{4\pi} \Rightarrow N = \frac{20}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων είναι τότε:

$$v'_1 = v'_2 = at'_1 \Rightarrow v'_1 = v'_2 = 8 \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ 5

Η διπλή τροχαλία του σχήματος, μάζας M , αποτελείται από δύο ομόκεντρους λεπτούς ομογενείς δίσκους, με ίδιες μάζες $m = 2,4 \text{ kg}$ και με ακτίνες $R_1 = 0,1 \text{ m}$ και $R_2 = 0,2 \text{ m}$. Οι δίσκοι είναι συγκολλημένοι μεταξύ τους ώστε να περιστρέφονται σαν ένα σώμα χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από κέντρο της τροχαλίας και είναι κάθετος στο επίπεδό τους. Δίνεται η ροπή αδράνειας κάθε δίσκου ως τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, $I = \frac{1}{2}mR^2$. Στην



περιφέρεια του μικρού δίσκου είναι τυλιγμένο οριζόντιο νήμα (1), το ελεύθερο άκρο του οποίου έχει συνδεθεί με το κέντρο μάζας ομογενούς δίσκου μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ και ακτίνας r . Ο δίσκος αυτός βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο και στην εξωτερική του περιφέρεια έχουμε τυλίξει νήμα, στην άκρη του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ εφαπτόμενη στο ανώτερο σημείο του. Στην περιφέρεια του μεγάλου δίσκου είναι τυλιγμένο νήμα (2), στο άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί σώμα Σ μάζας $m_2 = 1,5 \text{ kg}$. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί.

α. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

β. Βρείτε τα μέτρα των τάσεων των δύο νημάτων.

γ. Αποδείξτε ότι η δύναμη $\vec{F}$ έχει μέτρο ίσο με το βάρος του σώματος Σ .

δ. Βρείτε τη δύναμη που δέχεται η διπλή τροχαλία από τον άξονα περιστροφής.

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα (1). Το σώμα μάζας m_1 κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. Βρείτε:

ε. Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος μάζας m_1 .

ζ. Το μέτρο και την κατεύθυνση της στατικής τριβής που δέχεται το σώμα μάζας m_1 .

η. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ σε χρόνο $t = 1 \text{ s}$.

Η τροχαλία περιστρέφεται και το νήμα (2) ξετυλίγεται. Βρείτε:

θ. Τον λόγο της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ προς την κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

ι. Το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα Σ τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$.

κ. Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απ. [α. $I = 0,06 \text{ kgm}^2$, β. $T_1 = 30 \text{ N}$, $T_2 = 15 \text{ N}$, γ. $F = 15 \text{ N}$, δ. $F' = 69,8 \text{ N}$, ε. $a_{cm} = 20 \text{ m/s}^2$, ζ. $T_s = 5 \text{ N}$, η. $W_F = 300 \text{ J}$, θ. $K = 4,55 \text{ J}$, ι. $K_\Sigma/K_{\tau\rho} = 1$, κ. $dK/dt = 37,5 \text{ J/s}$]

Σκοπός της άσκησης

- Η ροπή αδράνειας σύνθετου σώματος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των τμημάτων που το αποτελούν ($I = I_1 + I_2$)
- Σχεδιασμός δυνάμεων
- Μελέτη ισορροπίας πολλών σωμάτων
- Δύναμη που δέχεται ένα σώμα από τον άξονα περιστροφής
- Πως εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο σε κχο
- Πως βρίσκουμε τη στατική τριβή σε σώμα που κάνει κχο
- Πως υπολογίζουμε το έργο δύναμης σε σώμα που κάνει σύνθετη κίνηση
- Το νήμα που συνδέει 2 σώματα μεταφέρει την κίνηση από ένα σώμα σε άλλο (σε κάποιο σημείο της τροχαλίας)
- Η μεταβολή κινητικής ενέργειας ενός στερεού είναι ίση με το ολικό έργο των δυνάμεων

ΛΥΣΗ

α. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι:

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \Rightarrow I = 0,06 \text{ kgm}^2$$

β. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα

Στον δίσκο μάζας m_1 ασκούνται τρεις οριζόντιες δυνάμεις: τάση νήματος T_1 , δύναμη F , στατική τριβή T_s .

Στην τροχαλία ασκούνται τέσσερις δυνάμεις:

τάση νήματος T_1 , τάση νήματος T_2 , βάρος Mg , δύναμη F' από τον άξονα περιστροφής.

Στο σώμα Σ ασκούνται δύο δυνάμεις: τάση νήματος T_2 και βάρος m_1g .

Από την ισορροπία του Σ έχουμε:

$$T_2 = m_2g \Rightarrow T_2 = 15 \text{ N.}$$

Από την ισορροπία της τροχαλίας έχουμε:

$$T_1R_1 = T_2R_2 \Rightarrow T_1 = 30 \text{ N.}$$

γ. Από την ισορροπία του δίσκου μάζας m_1 έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \tau = 0 &\Rightarrow FR = T_s R \Rightarrow F = T_s \\ \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F + T_s = T_1 \Rightarrow F = T_1/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = 15 \text{ N}$$

δ. Θα δουλέψουμε με άξονες:

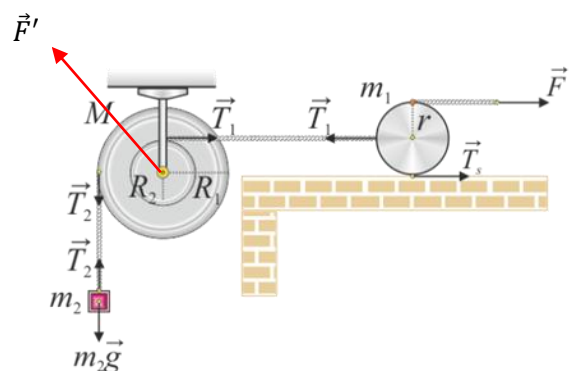
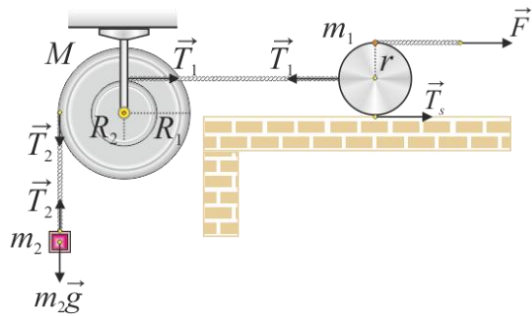
Έστω F' η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα. Σχεδιάζουμε την δύναμη αυτή και την αναλύουμε σε συνιστώσες (F'_x, F'_y).

Αν δεν σχεδιάσουμε την δύναμη F' τότε θα θεωρήσουμε ως θετικές τις δύο συνιστώσες

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 - F'_x = 0 \Rightarrow F'_x = 30 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_y - Mg - T_2 = 0 \Rightarrow F'_y = 48 + 15 = 63 \text{ N}$$

$$F' = \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} \Rightarrow F' = 69,8 \text{ N}$$



ε. Μετά το κόψιμο του νήματος (1), το σώμα μάζας m_1 κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση και εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο για μεταφορική και στροφική:

Θεωρούμε ότι η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Όποια κατεύθυνση και αν έχει η στατική τριβή εμφανίζεται και στις 2 εξισώσεις με αντίθετο πρόσημο οπότε δεν θα επηρεάσει την επιτάχυνση του CM.

$$F + T_s = m_1 a_{cm} \quad (1)$$

$$FR - T_s R = \frac{1}{2} m_1 R^2 \alpha \Rightarrow$$

$$F - T_s = \frac{1}{2} m_1 a_{cm} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε:

$$2F = \frac{3}{2} m_1 a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{4F}{3m_1} \Rightarrow a_{cm} = 20 \text{ m/s}^2$$

ζ. Από τις εξισώσεις (1) και (2) μπορούμε να βρούμε το μέτρο της στατικής τριβής σαν συνάρτηση της δύναμης F :

Η (2) λόγω της (1) γράφεται:

$$F - T_s = \frac{1}{2} (F + T_s) \Rightarrow 2F - 2T_s = F + T_s \Rightarrow$$

$$F = 3T_s \Rightarrow T_s = \frac{F}{3} = 5 \text{ N}$$

η. Σε $t = 1 \text{ s}$ η μετατόπιση του κέντρου μάζας είναι:

$$x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = 10 \text{ m}$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ μπορούμε να το βρούμε με δύο τρόπους.

A τρόπος :

Αν ονομάσουμε Z το σημείο εφαρμογής της δύναμης τότε η μετατόπιση του Z είναι :

$$\Delta x_z = 2x_{cm}$$

$$W_F = F \Delta x_z = F 2x_{cm} = 15 \cdot 20 \Rightarrow W_F = 300 \text{ J}$$

B τρόπος :

$$W_F = W_{F(\text{μεταφ})} + W_{F(\text{περιστρ})} = F x_{cm} + FR\theta = F x_{cm} + F x_{cm} = 2F x_{cm} = 300 \text{ J}$$

θ. Το σώμα Σ και η τροχαλία συνδέονται με νήμα και αυτό συνεπάγεται ότι η ταχύτητα v του σώματος Σ μεταφέρεται στα σημεία της περιφέρειας του τροχού ακτίνας R_2

$$v = \omega R_2$$

Όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ προς την κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι:

$$\frac{K_\Sigma}{K_{\tau\rho}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v^2}{\frac{1}{2} I \omega^2} = \frac{m_2 \omega^2 R_2^2}{I \omega^2} = \frac{m_2 R_2^2}{I} = \frac{1,5(0,2)^2}{0,06} \Rightarrow \frac{K_\Sigma}{K_{\tau\rho}} = 1$$

ι. Από τον θεμελιώδη νόμο για την τροχαλία και το σώμα Σ έχουμε: (Αντί για R_2 γράφω R)

Για το σώμα Σ:

$$m_2 g - T = m_2 a \quad (\alpha)$$

Για την τροχαλία:

$$TR = I\alpha_\gamma \Rightarrow T = \frac{I}{R} \frac{a}{R} = \frac{I}{R^2} a \quad (\beta)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη :

$$m_2 g = \frac{I}{R^2} a + m_2 a \Rightarrow m_2 g = \left(m_2 + \frac{I}{R^2} \right) a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

Επομένως:

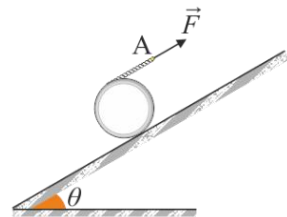
$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow h = 2,5 \text{ m}$$

κ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \frac{\Sigma\tau \cdot d\theta}{dt} = \Sigma\tau\omega = I\alpha_\gamma\omega \Rightarrow \\ \frac{dK}{dt} &= 37,5 \text{ J/s} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 6 [ΕΡΓΟ-ΑΔΕ-ΡΜ]

Γύρω από μια στεφάνη μάζας $m = 4 \text{ kg}$ έχουμε τυλίξει ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τοποθετούμε τη στεφάνη σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 30^\circ$ και ασκώντας στο άκρο Α του νήματος δύναμη F , παράλληλη στο επίπεδο, η στεφάνη ισορροπεί.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F .

β. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μεταβάλλουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_1 = 6 \text{ N}$, οπότε έχουμε την κίνηση της στεφάνης. Αν οι συντελεστές τριβής μεταξύ στεφάνης και επιπέδου είναι $\mu = \sqrt{3}/4$, να αποδείξετε ότι η ασκούμενη τριβή είναι στατική, υπολογίζοντας το μέτρο της.

Να υπολογιστούν τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$:

γ. η ταχύτητα του κέντρου μάζας της στεφάνης, καθώς και η κινητικής της ενέργεια.

δ. η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στη στεφάνη.

ε. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της στεφάνης.

ζ. Να υπολογιστούν τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στη στεφάνη από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 5 \text{ s}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$. Η μάζα της στεφάνης θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά της.

Απ. [α. $F = 10 \text{ N}$, β. $T = 10 \text{ N}$, γ. $v_1 = 5 \text{ m/s}$, $K_1 = 100 \text{ J}$, δ. $P_T = 0 \text{ W}$, $P_{F_1} = -60 \text{ W}$, $P_{mg} = 100 \text{ W}$, ε. $dK/dt = 40 \text{ J/s}$, ζ. $W_{mg} = 500 \text{ J}$, $W_{F_1} = -300 \text{ J}$, $W_T = 0$, $W_N = 0$]

Σκοπός της άσκησης είναι οι μαθητές

A. Να σχεδιάσουν σωστά την στατική τριβή όταν το σώμα ισορροπεί

B. Να εφαρμόσουν τις συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος

Γ. Να υπολογίσουν τη ροπή αδράνειας μιας ομογενούς στεφάνης με βάση τον ορισμό

Δ. Να θυμηθούν ότι η στατική τριβή μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την τριβή ολίσθησης

Ε. Να εφαρμόσουν τον θεμελιώδη νόμο σε σώμα κάνει κχο (2 εξισώσεις)

Ζ. Να θυμηθούν πως η στιγμιαία ισχύς μιας δύναμης αναφέρεται σε κάποια χρονική στιγμή και ορίζεται με τον τύπο:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_{F(\mu\epsilon\tau)}}{dt} + \frac{dW_{F(\pi\epsilon\rho)}}{dt} = Fv_{cm} + \tau_F\omega$$

Στην αντικατάσταση ΠΡΟΣΟΧΗ στα πρόσημα

Η. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στερεού υπολογίζεται με την βοήθεια του ΘΜΚΕ από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F(\mu\epsilon\tau)}}{dt} + \frac{dW_{\Sigma \tau(\pi\epsilon\rho)}}{dt}$$

ή

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{F_1}}{dt} + \frac{dW_{F_2}}{dt} + \dots$$

Θ. Το έργο δύναμης σε σύνθετη κίνηση υπολογίζεται και από τη σχέση:

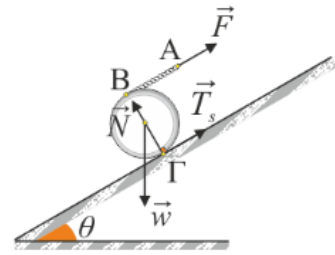
$$W_F = W_{F(\mu\epsilon\tau)} + W_{F(\pi\epsilon\rho)}$$

ΛΥΣΗ

α. Αφού το σώμα ισορροπεί, θα ισχύει $\Sigma \tau = 0$. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει να υπάρχει στατική τριβή ομόρροπη της $\vec{F}$ έτσι ώστε οι ροπές τους να είναι αντίθετες αφού δεν ασκούνται άλλες ροπές. Έχουμε τότε:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T_s R = FR \Rightarrow T_s = F$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg \eta \mu \theta - F - T_s = 0 \Rightarrow F = \frac{1}{2} mg \eta \mu \theta \Rightarrow F = 10 \text{ N}$$



β. Μειώνοντας το μέτρο της δύναμης F , η στεφάνη θα κινηθεί προς τα κάτω.

Αν η τριβή ήταν τριβή ολίσθησης, θα είχε μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg \sigma \nu \theta = 15 \text{ N}$$

και θα ίσχυε:

$$\Sigma F_x = F_1 + T - mg \eta \mu \theta = 1 \text{ N} > 0$$

δηλαδή η συνισταμένη δύναμη θα έχει φορά προς τα πάνω, που είναι άτοπο αφού το σώμα θα κινηθεί προς τα κάτω.

Άρα η τριβή είναι στατική και θα έχει τιμή μικρότερη από 15 N

Αφού η τριβή είναι στατική ο τροχός κάνει κχ

Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \Rightarrow mg \eta \mu \theta - F_1 - T_s = ma_{cm}$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_\gamma \Rightarrow T_s R - F_1 R = m R^2 \alpha_\gamma \Rightarrow T_s - F_1 = ma_{cm}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$mg \eta \mu \theta - 2F_1 = 2ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{1}{2} g \eta \mu \theta - \frac{F_1}{m} \Rightarrow$$
$$a_{cm} = 1 \text{ m/s}^2$$

Επομένως θα είναι:

$$T_s = F_1 + ma_{cm} \Rightarrow T_s = 10 \text{ N}$$

γ. Το κέντρο μάζας κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα:

$$v_1 = a_{cm} t_1 \Rightarrow v_1 = 5 \text{ m/s}$$

και η κινητική ενέργεια της στεφάνης είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega_1^2 = m v_1^2 \Rightarrow K_1 = 100 \text{ J}$$

δ. Ισχύουν:

$$v_\Gamma = 0 \text{ και } v_B = 2v_1$$

Η ισχύς κάθε δύναμης είναι:

$$P_T = T v_\Gamma \Rightarrow P_T = 0 \text{ W}$$

$$P_{F_1} = -F_1 v_B = -F_1 2v_1 \Rightarrow P_{F_1} = -60 \text{ W}$$

$$P_{mg} = mg \eta \mu \theta v_1 \Rightarrow P_{mg} = 100 \text{ W}$$

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_T}{dt} + \frac{dW_{F_1}}{dt} + \frac{dW_{mg}}{dt} = P_T + P_{F_1} + P_{mg} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 40 \text{ J/s}$$

ζ. Τη χρονική στιγμή t_1 το κέντρο μάζας έχει κατέλθει κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 \Rightarrow x_1 = 25 \text{ m}$$

Οπότε το έργο του βάρους είναι:

$$W_{mg} = m g \mu \theta x_1 \Rightarrow W_{mg} = 500 \text{ J}$$

Η μετατόπιση του σημείου B είναι:

$$x_B = x_1 + R \theta_1 = 2x_1$$

Οπότε το έργο της F_1 είναι:

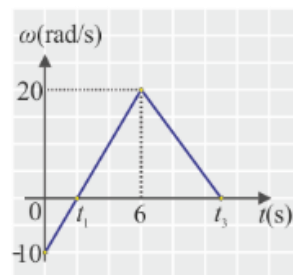
$$W_{F_1} = -F_1 x_B = -F_1 2x_1 \Rightarrow W_{F_1} = -300 \text{ J}$$

Προφανώς:

$$W_T = 0 \text{ και } W_N = 0$$

ΘΕΜΑ 7

Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $l = 3 \text{ m}$ και μάζας $M = 1 \text{ kg}$ βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το ένα άκρο της Α. Στο άλλο άκρο της ράβδου ασκείται δύναμη F η οποία είναι συνέχεια κάθετη στη ράβδο. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως δείχνει το διάγραμμα. Ο συνολικός αριθμός περιστροφών της ράβδου είναι $N = 100/2\pi$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το ένα άκρο της είναι $I = \frac{1}{3} Ml^2$.



- Ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα;
- Ποια η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου στο τελευταίο δευτερόλεπτο;
- Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή $t_2 = 5 \text{ s}$.
- Βρείτε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή t_1 και τη χρονική στιγμή t_2 .
- Βρείτε τη γωνιακή μετατόπιση της ράβδου όταν έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10 \text{ rad/s}$.
- Δείξτε γραφικά πώς μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης F σαν συνάρτηση του χρόνου.
- Βρείτε το συνολικό έργο της δύναμης F .
- Βρείτε τον ρυθμό της προσφερόμενης ενέργειας τη χρονική στιγμή 3 s .

Απ. [α. $t_1 = 2 \text{ s}$, β. $\Delta\theta' = 2 \text{ rad}$, γ. $dv/dt = 2,5 \text{ m/s}^2$, δ. $a_{κ1} = 0$, $a_{κ2} = 337,5 \text{ m/s}^2$, ε. $\Delta\theta_4 = 0$, $\Delta\theta_5 = 67,5 \text{ m}$, η. $W = -150 \text{ J}$, θ. $dE/dt = 75 \text{ J/s}$]

Σκοπός της άσκησης ο μαθητής να θυμηθεί

- πως αξιοποιούμε τις πληροφορίες από διαγράμματα
- Εξισώσεις της ομαλά μεταβαλλόμενης περιστροφής
- Να τεστάρει αν έχει κατανοήσει τα διάφορα κινηματικά μεγέθη
- Ότι μια δύναμη σταθερού μέτρου μπορεί να έχει σταθερή ροπή
- Τον ορισμό ροπής δύναμης
- Ότι στην περιστροφική κίνηση ισχύει: Έργο Δύναμης = έργο της ροπής της
- Πως βρίσκουμε το ρυθμό προσφερόμενης ενέργειας
- Πως βρίσκουμε την δύναμη από τον άξονα

ΛΥΣΗ

α. Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από 0 s έως 6 s :

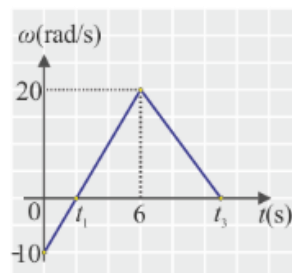
$$\alpha_{\gamma 1} = \frac{20 - (-10)}{6} \Rightarrow \alpha_{\gamma 1} = 5 \text{ rad/s}^2$$

Στο χρονικό διάστημα από 0 s έως 6 s είναι:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma 1} t \Rightarrow$$

$$\omega = -10 + 5t \text{ (SI)}$$

Είναι $\omega = 0$ τη χρονική στιγμή t_1



$$0 = -10 + 5t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β. Στα χρονικά διαστήματα από 0 s έως 6 s και από 6 s έως t_3 οι γωνιακές μετατοπίσεις είναι:

$$\Delta\theta_1 = \frac{2 \cdot (-10)}{2} \Rightarrow \Delta\theta_1 = -10 \text{ rad και } \Delta\theta_2 = \frac{20(t_3 - 2)}{2} = 10(t_3 - 2)$$

Από τον συνολικό αριθμό περιστροφών της ράβδου βρίσκουμε:

$$N = \frac{|\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2|}{2\pi} \Rightarrow 100 = 10 + 10|t_3 - 2| \Rightarrow t_3 = 11 \text{ s}$$

Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από 6 s έως 11 s:

$$\alpha_{\gamma 2} = \frac{-20}{11 - 6} \Rightarrow \alpha_{\gamma 2} = -4 \text{ rad/s}^2$$

Στο διάστημα αυτό η εξίσωση γωνιακής ταχύτητας είναι:

$$\omega = \omega_1 + \alpha_{\gamma 2}(t - t_2) \Rightarrow \omega = 20 - 4(t - 6) \Rightarrow \omega = 44 - 4t \text{ (SI)}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ είναι $\omega = 44 - 4 \cdot 10 = 4 \text{ rad/s}$,

οπότε στο τελευταίο δευτερόλεπτο με εμβαδομέτρηση βρίσκουμε:

$$\Delta\theta' = \frac{1 \cdot 4}{2} \Rightarrow \Delta\theta' = 2 \text{ rad}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση του.

Τη στιγμή t είναι: $\alpha_{\gamma} = \alpha_{\gamma 1} = 5 \text{ rad/s}^2$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha_{\gamma 1} \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

δ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι:

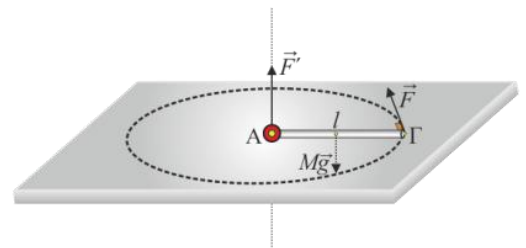
$$a_{\kappa} = \omega^2 \frac{l}{2}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι $a_{\kappa 1} = 0$

και τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\omega_2 = -10 + 5t = -15 \text{ rad/s}$$

$$a_{\kappa 2} = \omega_2^2 \frac{l}{2} \Rightarrow a_{\kappa 2} = 225 \frac{3}{2} = 337,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



ε. Είναι $\omega = 10 \text{ rad/s}$ τις χρονικές στιγμές t_4 και t_5 για τις οποίες ισχύουν:

$$10 = -10 + 5t_4 \Rightarrow t_4 = 4 \text{ s}$$

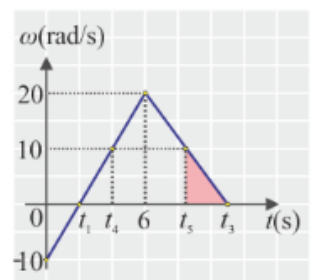
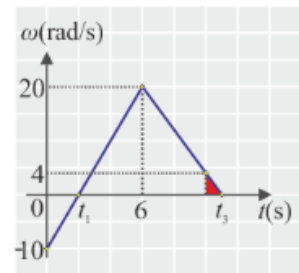
$$10 = 44 - 4t_5 \Rightarrow t_5 = 8,5 \text{ s}$$

Τη χρονική στιγμή t_4 είναι $\Delta\theta_4 = 0$. Τη χρονική στιγμή t_5 θα βρούμε τη

γωνιακή μετατόπιση αφαιρώντας το χρωματισμένο εμβαδόν από το

συνολικό:

$$\Delta\theta_5 = \frac{2 \cdot (-10)}{2} + \frac{20 \cdot 9}{2} - \frac{2,5 \cdot 10}{2} \Rightarrow \Delta\theta_5 = 67,5 \text{ m}$$



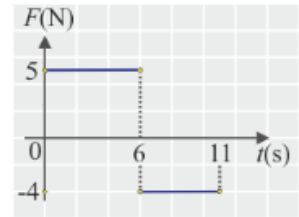
ζ. Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow F l = \frac{1}{3} M l^2 \alpha_{\gamma} \Rightarrow F = \frac{1}{3} M l \alpha_{\gamma}$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$F_1 = \frac{1}{3} M l \alpha_{\gamma 1} = 5 \text{ N και } F_2 = \frac{1}{3} M l \alpha_{\gamma 2} = -4 \text{ N}$$

Η χρονική μεταβολή της δύναμης φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



η. Από το θεώρημα κινητικής ενέργειας - έργου έχουμε:

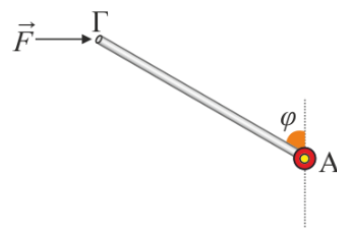
$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M l^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \Rightarrow W = -150 \text{ J}$$

θ. Τη χρονική στιγμή 3 s είναι $\omega = -10 + 5t = 5 \text{ rad/s}$, οπότε ο ρυθμός της προσφερόμενης ενέργειας E είναι:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt} = F_1 l \omega \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 75 \text{ J/s}$$

ΘΕΜΑ 8

Ομογενής ράβδος ΑΓ, μάζας M και μήκους $l = 1,8 \text{ m}$, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Αρχικά η ράβδος συγκρατείται ακίνητη με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F = 5\sqrt{3} \text{ N}$, έτσι ώστε να σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, όπως στο σχήμα.



A. Βρείτε:

- i. Τη μάζα της ράβδου.
- ii. Τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής.

B. Κάποια στιγμή καταργούμε τη δύναμη F και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται. Όταν γίνει κατακόρυφη, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητη σημειακή σφαίρα μάζας $m = M/3$, που ενσωματώνεται στο άκρο Γ της ράβδου. Βρείτε:

- i. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής καθώς και τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του άκρου Γ, όταν η ράβδος γίνει οριζόντια πριν την κρούση.
- ii. Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου πριν και μετά την κρούση.
- iii. Τη μέγιστη γωνία που θα σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφη μετά την κρούση.
- iv. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής όταν μηδενιστεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{cm} = \frac{1}{12} Ml^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απ.[**A. i.** $M = 1 \text{ kg}$, **ii.** $F_A = 5\sqrt{7} \text{ N}$, $\varepsilon\varphi_A = 2\sqrt{3}/3$, **B. i.** $dL/dt = 9 \text{ kgm}^2/\text{s}$, $a_\varepsilon = 15 \text{ m/s}^2$,
ii. $\omega = 5 \text{ rad/s}$, $\omega' = 2,5 \text{ rad/s}$, **iii.** $\text{συν}\theta = 0,55$, **iv.** $dL_\rho/dt = -6,25 \text{ kgm}^2/\text{s}$]

Σκοπός

- A.** Πως υπολογίζουμε τη ροπή μιας δύναμης- Μελέτη ισορροπίας ράβδου
B. Δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα
Γ. Είδος κίνησης ράβδου όταν υπάρχει ακλόνητος άξονας
Δ. Πως εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ όταν η μόνη ροπή είναι η ροπή του βάρους
Ε. Που μας συμφέρει να πάρουμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια
Ε. 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα

ΛΥΣΗ

A. i. Από την περιστροφική ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

Για να βρούμε την ροπή κάποια δύναμης από τον άξονα περιστροφής φέρνουμε κάθετη στο φορέα της δύναμης και βρίσκουμε έτσι τον μοχλοβραχίονα της δύναμης.

Ο μοχλοβραχίονας της δύναμης F είναι ίσος με $l \sin \varphi$

Ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι ίσος με

$$\frac{l}{2} \eta \mu \varphi$$

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow Fl \sin \varphi = Mg \frac{l}{2} \eta \mu \varphi \Rightarrow M = \frac{2F \sigma \varphi}{g} \Rightarrow M = 1 \text{ kg}$$

ii. Η δύναμη F που δέχεται η ράβδος από τον άξονα αναλύεται σε 2 συνιστώσες τις οποίες θα βρούμε από τις συνθήκες της μεταφορικής ισορροπίας της ράβδου :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{A(x)} = F$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{A(y)} = Mg$$

Επομένως:

$$F_A = \sqrt{F^2 + (Mg)^2} \Rightarrow F_A = 5\sqrt{7} \text{ N}$$

και

$$\varepsilon \varphi \varphi_A = \frac{Mg}{F} \Rightarrow \varepsilon \varphi \varphi_A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

B. i. Όταν η ράβδος είναι οριζόντια ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της είναι:

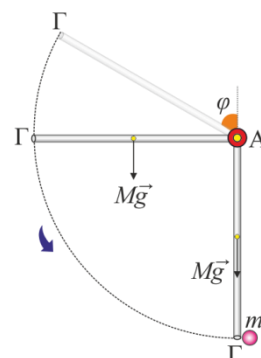
$$\frac{dL}{dt} = Mg \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 9 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται με το θεώρημα Steiner:

$$I = I_{cm} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} Ml^2 + \frac{1}{4} Ml^2 = \frac{1}{3} Ml^2$$

Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$Mg \frac{l}{2} = \frac{1}{3} Ml^2 \alpha_\gamma \Rightarrow l \alpha_\gamma = \frac{3g}{2} \Rightarrow a_\varepsilon = 15 \text{ m/s}^2$$



ii. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη ράβδο πριν την κρούση, για την αρχική και την κατακόρυφη θέση, έχουμε:

Παίρνουμε επίπεδο αναφοράς το οποίο διέρχεται από τον άξονα περιστροφής A

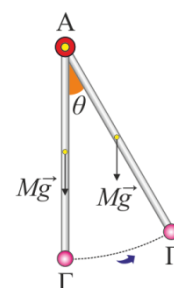
$$\begin{aligned} Mg \frac{l}{2} \sin \varphi + 0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Ml^2 \omega^2 - Mg \frac{l}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Ml^2 \omega^2 &= Mg \frac{l}{2} (1 + \sin \varphi) \Rightarrow \\ \omega &= 3 \sqrt{\frac{g}{2l}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα ράβδος - σφαίρα έχουμε:

$$I\omega = (I + ml^2)\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{M}{M + 3m} \omega \Rightarrow \omega' = 2,5 \text{ rad/s}$$

iii. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα, για την αρχική και την τελική θέση, έχουμε:

$$\frac{1}{2} (I + ml^2) \omega'^2 - Mg \frac{l}{2} - mgl = -Mg \frac{l}{2} \sin \theta - + mgl \sin \theta \Rightarrow$$



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} Ml^2 + ml^2 \right) \omega'^2 &= Mg \frac{l}{2} (1 - \sigma \nu \theta) + mgl(1 - \sigma \nu \theta) \Rightarrow \\
\left(\frac{1}{3} Ml^2 + ml^2 \right) \omega'^2 &= Mgl(1 - \sigma \nu \theta) + 2mgl(1 - \sigma \nu \theta) \\
\left(\frac{1}{3} Ml^2 + ml^2 \right) \omega'^2 &= (1 - \sigma \nu \theta)[M + 2m]gl \Rightarrow (M = 3m) \\
2ml^2 \omega'^2 &= (1 - \sigma \nu \theta)5mgl \Rightarrow \\
\sigma \nu \theta &= 1 - \frac{2l\omega'^2}{5g} \Rightarrow \sigma \nu \theta = 0,55
\end{aligned}$$

iv. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος - σφαίρα είναι:

$$\frac{dL}{dt} = -Mg \frac{l}{2} \eta \mu \theta - mgl \eta \mu \theta = -\left(\frac{M}{2} + m\right) gl \sqrt{1 - \sigma \nu^2 \theta} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = -12,5 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος είναι:

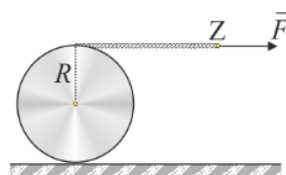
$$\frac{dL}{dt} = (I + ml^2) \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = -\frac{1}{I + ml^2} \frac{dL}{dt}$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:

$$\frac{dL_\rho}{dt} = I \alpha_\gamma = \frac{I}{I + ml^2} \frac{dL}{dt} = \frac{M}{M + 3m} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dL_\rho}{dt} = -6,25 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

ΘΕΜΑ 9

Πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$ μπορεί να κυλίεται τροχός που θεωρείται ομογενής δίσκος, μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$. Στην περιφέρεια του τροχού είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα στην άκρη του οποίου ενεργεί σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F , όπως στο σχήμα.



A. Θεωρώντας ότι ο τροχός κάνει κύλιση, να διερευνήσετε για ποιες τιμές της δύναμης μπορεί να κυλίεται.

B. Αν η δύναμη έχει μέτρο $F = 6 \text{ N}$, βρείτε:

- α.** τη μεταφορική και τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- β.** τη δύναμη τριβής που δέχεται ο τροχός από το δάπεδο και να προσδιορίσετε τη φορά της.
- γ.** το έργο και την ισχύ της δύναμης F όταν ξετυλιχτεί σχοινί μήκους $l = 2 \text{ m}$.

Γ. Αν η δύναμη έχει μέτρο $F = 16 \text{ N}$:

- α.** να σχεδιάσετε τη δύναμη τριβής και να δικαιολογήσετε την κατεύθυνση της.
- β.** να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
- γ.** να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του τροχού όταν έχει κάνει $N = 25/\pi$ περιστροφές.

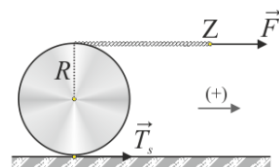
Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = MR^2/2$. Να θεωρήσετε $\mu_s = \mu$.

Απ. [A. $F \leq 12 \text{ N}$, B. α. $a = 4 \text{ m/s}^2$, $\alpha_\gamma = 20 \text{ rad/s}^2$, β. $T = 2 \text{ N}$, γ. $W = 24 \text{ J}$, $P = 48 \text{ W}$, Γ. β. $a_{cm} = 10 \text{ m/s}^2$, $\alpha_\gamma = 100 \text{ rad/s}^2$, γ. $K = 240 \text{ J}$]

ΛΥΣΗ

A. Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} F + T_s &= Ma_{cm} \\ (F - T_s)R &= \frac{MR^2}{2} \alpha_\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F + T_s &= Ma_{cm} \\ F - T_s &= \frac{1}{2} Ma_{cm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_{cm} &= \frac{4F}{3M} \\ T_s &= \frac{1}{3} F \end{aligned}$$



Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει $N = Mg$. Για μη ολίσθηση πρέπει:

$$T_s \leq \mu N \Rightarrow \frac{1}{3} F \leq \mu_s Mg \Rightarrow F \leq 3\mu_s Mg \Rightarrow F \leq 12 \text{ N}$$

B. α. Αν $F = 6 \text{ N}$ έχουμε:

$$a_{cm} = \frac{4F}{3M} \Rightarrow a_{cm} = 4 \text{ m/s}^2 \text{ και } \alpha_\gamma = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 20 \text{ rad/s}^2$$

β. Η δύναμη τριβής είναι προς τα δεξιά και έχει μέτρο:

$$T_s = \frac{1}{3} F \Rightarrow T = 2 \text{ N}$$

γ. Ισχύει:

$$l = R\theta = x_{cm} \Rightarrow l = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a_{cm}}} = 1 \text{ s}$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$ έχουμε:

$$v_{cm} = a_{cm}t = 4 \text{ m/s και } v_Z = 2v_{cm} = 8 \text{ m/s}$$

Επομένως:

$$W = Fx_Z = F2l \Rightarrow W = 24 \text{ J}$$

$$P = Fv_Z \Rightarrow P = 48 \text{ W}$$

Γ. α. Έστω ότι η τριβή είναι προς τ' αριστερά οπότε η ταχύτητα του σημείου επαφής είναι προς τα δεξιά, όπως και η εφαπτομενική επιτάχυνσή του. Άρα

$$a_{cm} > R\alpha_\gamma.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} F - T = Ma_{cm} \\ (F + T)R = \frac{MR^2}{2}\alpha_\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F - T = Ma_{cm} \\ 2F + 2T = MR\alpha_\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow MR\alpha_\gamma > Ma_{cm} \Rightarrow R\alpha_\gamma > a_{cm}$$

που είναι άτοπο.

Άρα η τριβή είναι προς τα δεξιά και έχει μέτρο $T = \mu Mg = 4 \text{ N}$.

β. Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} F + T = Ma_{cm} \\ (F + T)R = \frac{MR^2}{2}\alpha_\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F + T = Ma_{cm} \\ 2(F + T) = MR\alpha_\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{10m}{s^2} \quad \text{και} \quad \alpha_\gamma = 100 \text{ rad/s}^2$$

γ. Η γωνιακή μετατόπιση του τροχού είναι :

$$\theta = N \cdot 2\pi$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha_\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi N}{\alpha_\gamma}} = 1 \text{ s}$$

Η μετατόπιση του σημείου Z είναι:

$$x_Z = x_{cm} + l = x_{cm} + R\theta = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 = 15 \text{ m}$$

Επομένως:

$$K = W_F = Fx_Z \Rightarrow K = 240 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ 10 Η ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,2 \text{ m}$ ενώ το σώμα Σ έχει μάζα $m = 1 \text{ kg}$. Αρχικά το σύστημα συγκρατείται ακίνητο ασκώντας οριζόντια δύναμη F , που έχει μέτρο ίσο με το βάρος της και που ο φορέας της απέχει $R/4$ από τον άξονά της.

α. Βρείτε το μέτρο της δύναμης F .

β. Βρείτε τη δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής.

Κάποια στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο και τη χρονική στιγμή t που το σώμα έχει κατεβεί κατά $h = 2,5 \text{ m}$, η στροφορμή του συστήματος έχει μέτρο $L = 2 \text{ kgm}^2/\text{s}$. Βρείτε:

γ. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

δ. Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ .

ε. Τη στροφορμή του σώματος Σ ως προς τον άξονα της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t .

ζ. Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

η. Τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απ. [α. $F = 40 \text{ N}$, β. $F' = 50 \text{ N}$, γ. $dL/dt = 2 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$, δ. $dp/dt = 5 \text{ kgm/s}^2$, ε. $L_\Sigma = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}$, ζ. $dK/dt = -50 \text{ J/s}$, η. $I = 0,04 \text{ kgm}^2$]

Σκοπός

A. Μελέτη ισορροπίας στερεού –υπολογισμός του μέτρου δύναμης

B. Δύναμη από άξονα περιστροφής

Γ. Δεύτερος νόμος – για σύστημα σωμάτων

Δ. Δεύτερος Νόμος για κάθε σώμα

E. Ρυθμός μεταβολής Κινητικής ενέργειας

ΛΥΣΗ

α. Από την ισορροπία του συστήματος έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} T = mg \\ TR = \frac{FR}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow F = 4mg \Rightarrow F = 40 \text{ N}$$

β. Η δύναμη F' που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής έχει συνιστώσες:

$$F'_x = F = 40 \text{ N}$$

$$F'_y = Mg + T = (M + m)g = 30 \text{ N}$$

Επομένως:

$$F' = \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} \Rightarrow F' = 50 \text{ N}$$

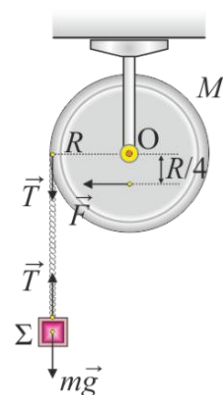
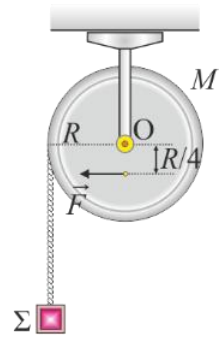
γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = mgR \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 2 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

δ. Ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = mgR = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow mgR = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow mgR = \frac{L - 0}{t - 0} t \Rightarrow L = mgRt \Rightarrow$$

$$t = \frac{L}{mgR} = \frac{2}{2} = 1 \text{ s}$$



Το μέτρο της επιτάχυνσης βρίσκεται από την εξίσωση:

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = 5 \text{ m/s}^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ είναι:

$$\frac{dp}{dt} = ma \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 5 \text{ kgm/s}^2$$

ε. Ισχύει:

$$v = at = 5 \text{ m/s}$$

Επομένως η στροφορμή του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t είναι:

$$L_{\Sigma} = mvR \Rightarrow L_{\Sigma} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

ζ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

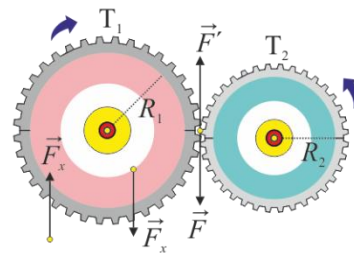
$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} = -mgv \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -50 \text{ J/s}$$

η. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας υπολογίζεται από τη στροφορμή του συστήματος:

$$L = I\omega + L_{\Sigma} \Rightarrow I = \frac{L - L_{\Sigma}}{\omega} \Rightarrow I = 0,04 \text{ kgm}^2$$

ΘΕΜΑ 11

Δύο οδοντωτοί τροχοί T_1 και T_2 με μάζες $m_1 = 400 \text{ g}$, $m_2 = 600 \text{ g}$ και ακτίνες $R_1 = 30 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$, αντίστοιχα, με το επίπεδο τους οριζόντιο, μπορούν να περιστρέφονται γύρω από ακλόνητους άξονες, όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στον τροχό T_1 ζεύγος δυνάμεων που έχει σταθερή ροπή μέτρου $\tau = 0,6 \text{ Nm}$ στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του και έτσι το σύστημα των δύο τροχών αρχίζει να περιστρέφεται. Κατά τη διάρκεια της περιστροφής, ο ένας τροχός ασκεί επαπτομενική δύναμη στον άλλον. Αν η ροπή αδράνειας κάθε τροχού είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ και αγνοήσουμε τις τριβές, βρείτε:



- τον λόγο των αλγεβρικών τιμών των γωνιακών επιταχύνσεων των δύο τροχών.
- το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο ένας τροχός στον άλλον, αν θεωρηθεί σταθερή.
- τον ρυθμό της προσφερόμενης ενέργειας στον τροχό T_2 τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.
- τον αριθμό περιστροφών κάθε τροχού τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.
- Εξηγήστε γιατί η στροφορμή του συστήματος των δύο τροχών είναι κάθε στιγμή μηδέν.

Απ. [α. $\alpha_{\gamma 1}/\alpha_{\gamma 2} = 2/3$, β. $F = 1,2 \text{ N}$, γ. $dE/dt = 9,6 \text{ J/s}$, δ. $N_1 = 40/3\pi$ περιστροφές, $N_2 = 20/\pi$ περιστροφές]

Σκοπός είναι οι μαθητές να κατανοήσουν

- Πως γίνεται η μετάδοση κίνησης με γρανάζια
- Ότι τα δόντια που συμπλέκονται έχουν ίδια ταχύτητα
- Οι τροχοί περιστρέφονται αντίρροπα
- Οι γωνιακές ταχύτητες των τροχών είναι αντιστρόφως ανάλογες των ακτίνων
- Τα κέντρα μάζας των δύο τροχών είναι ακίνητα

ΛΥΣΗ

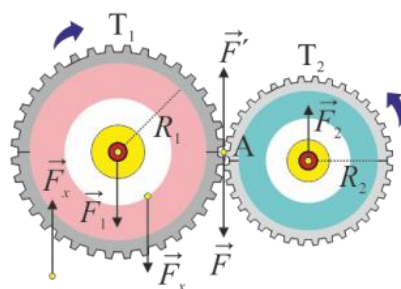
α. F και F' είναι οι δυνάμεις που ασκεί ο ένας τροχός στον άλλον και αποτελούν ζεύγος δράσης - αντίδρασης.

Οι δυνάμεις του ζεύγους είναι (F_x, F_x')

Η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων (F_x, F_x') είναι $\tau = 0,6 \text{ Nm}$.

F_1 και F_2 είναι οι δυνάμεις που δέχονται οι τροχοί από τους άξονες περιστροφής.

Θεωρώντας ότι τα δόντια των τροχών συμπλέκονται έτσι ώστε να μη χάνουν στροφές, τα σημεία επαφής τους έχουν κάθε χρονική στιγμή ίδια ταχύτητα:



$$v_1 = v_2$$

$$\Rightarrow R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \Rightarrow$$

$$R_1 \frac{d\omega_1}{dt} = R_2 \frac{d\omega_2}{dt} \Rightarrow$$

$$R_1 \alpha_{\gamma 1} = R_2 \alpha_{\gamma 2} = a_A \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_{\gamma 1}}{\alpha_{\gamma 2}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{\alpha_{\gamma 1}}{\alpha_{\gamma 2}} = \frac{2}{3}$$

β. Οι δυνάμεις που δέχονται οι τροχοί από τους άξονες περιστροφής διέρχονται από τους άξονες και έτσι η ροπή τους είναι μηδενική.

Στον τροχό (1) ασκείται η ροπή της δύναμης F που δέχεται από τον τροχό (2) και η ροπή του ασκούμενου ζεύγους.

Στον τροχό (2) ασκείται μόνο η ροπή της δύναμης F που δέχεται από τον τροχό (1)

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο για κάθε τροχό.

Για τον τροχό T_1 :

$$\tau - FR_1 = I_1 \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow \tau - FR_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_{\gamma 1}$$

$$\frac{\tau}{R_1} - F = \frac{1}{2} m_1 R_1 \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow R_1 \alpha_{\gamma 1} = \frac{2}{m_1} \left(\frac{\tau}{R_1} - F \right) \quad (1)$$

Για τον τροχό T_2 :

$$FR_2 = I_2 \alpha_{\gamma 2} \Rightarrow F = \frac{1}{2} m_2 R_2 \alpha_{\gamma 2} \Rightarrow R_2 \alpha_{\gamma 2} = \frac{2}{m_2} F \quad (2)$$

Στις (1) και (2) τα πρώτα μέλη είναι ίσα:

$$\begin{aligned} \frac{2}{m_1} \left(\frac{\tau}{R_1} - F \right) &= \frac{2}{m_2} F \Rightarrow F m_1 = -F m_2 + \frac{\tau}{R_1} m_2 \Rightarrow \\ F(m_1 + m_2) &= \frac{\tau}{R_1} m_2 \Rightarrow \\ F &= \frac{\tau}{R_1} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,6}{0,3} \cdot \frac{6}{10} = 1,2N \end{aligned}$$

γ. Από την (2) έχουμε:

$$\alpha_{\gamma 2} = \frac{2F}{m_2 R_2} = 20 \text{ rad/s}^2$$

Η προσφερόμενη ενέργεια στον τροχό T_2 ισούται με το έργο της δύναμης F . Ισχύει:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = FR_2 \frac{d\theta_2}{dt} = FR_2 \omega_2 = FR_2 \alpha_{\gamma 2} t \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 9,6 \text{ J/s}$$

δ. Ο αριθμός περιστροφών κάθε τροχού υπολογίζεται από τη γωνιακή μετατόπιση καθενός:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{2} \alpha_{\gamma 2} t^2 = 40 \text{ rad} \text{ οπότε } N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} \Rightarrow N_2 = \frac{20}{\pi} \text{ περιστροφές} \\ \theta_1 &= \frac{1}{2} \alpha_{\gamma 1} t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \alpha_{\gamma 2} t^2 = \frac{2}{3} \theta_2 = 80/3 \text{ rad} \text{ οπότε } N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{40}{3\pi} \text{ περιστροφές} \end{aligned}$$

ε. Οι δυνάμεις που δέχονται οι τροχοί από τους άξονες είναι αντίθετες των δυνάμεων F και F' , οπότε έχουν μέτρο $F = 1,2 \text{ N}$.

Το κέντρο μάζας του τροχού (2) είναι ακίνητο άρα η δύναμη F_2 που δέχεται από τον άξονα θα είναι αντίθετη της δύναμης που δέχεται από τον τροχό (1)

Για το σύστημα των δύο τροχών ισχύει:

$$\Sigma \tau_{\varepsilon \chi} = \tau_{12} + \tau_{\zeta \varepsilon \nu \gamma} = F(R_1 + R_2) - \tau = \tau - \tau = 0$$

Άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται, $L_{\alpha \rho \chi} = L_{\tau \varepsilon \lambda}$.

Επομένως οι στροφορμές των δύο τροχών είναι κάθε στιγμή αντίθετες.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Επειδή τα κέντρα μάζας των δίσκων είναι ακίνητα , οι στροφορμές των δίσκων είναι τα σπίν τους τα οποία είναι αντίθετα

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m_1 R_1 R_1 \omega_1 = m_2 R_2 R_2 \omega_2 \xrightarrow{R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2} m_1 R_1 = m_2 R_2$$

Αρα για να είναι συνέχεια μηδέν η στροφορμή πρέπει:

$$m_1 R_1 = m_2 R_2$$

Που εδώ ισχύει