

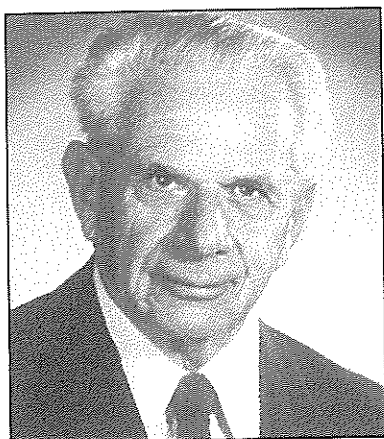
ARNOLD B. ARONS

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΟΥΑΣΙΝΓΤΟΝ

ΟΔΗΓΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΑΝΔΡΕΑΣ Δ. ΒΑΛΑΔΑΚΗΣ

ΤΡΟΧΑΛΙΑ



Ο Arnold Arons υπήρξε πρόεδρος της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής. Έχει τιμηθεί με το βραβείο Oersted. Ίδρυσε την ερευνητική ομάδα διδακτικής της φυσικής στο πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον και για πολλά χρόνια ασχολήθηκε με την εκπαίδευση καθηγητών φυσικής. Έχει δημοσιεύσει πολλά άρθρα για τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές, τον τρόπο που κατανοούν τις φυσικές έννοιες και την ανάπτυξη της ικανότητάς τους στην εκτέλεση συλλογισμών. Η αναγνώρισή του στον τομέα διδακτικής της φυσικής είναι παγκόσμια. Σήμερα διδάσκει στο πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον.

ΟΔΗΓΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ARNOLD B. ARONS

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΟΥΑΣΙΝΓΚΤΟΝ

ΟΔΗΓΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΔΡΕΑΣ Δ. ΒΑΛΑΔΑΚΗΣ

Δρ Φυσικής, Καθηγητής Βαρβακείου Σχολής

ΤΡΟΧΑΛΙΑ

Τίτλος πρωτοτύπου: A guide to introductory physics teaching
Συγγραφέας: Arnold B. Arons

Πρώτη έκδοση: John Wiley & Sons, Inc. 1990
© by John Wiley & Sons, Inc.
© Για την ελληνική γλώσσα: Εκδόσεις Τροχαλία, Γρ. Τρουφάκος & Σία Ε.Ε.
Πρώτη έκδοση: Δεκέμβριος 1992
ISBN 960-7022-34-3

Μετάφραση και επιστημονική επιμέλεια: Ανδρέας Δ. Βαλαδάκης
Γλωσσική επιμέλεια: Κωνσταντίνα Ρέσσου
Τυπογραφική διόρθωση: Παντελής Μπουκάλας

Κεντρική διάθεση: Βιβλιοπωλείο Τροχαλία
Γριβαίων 5 (πάροδος Σκουφά 64) 106 80 Αθήνα
Τηλ.: 3646426, Fax: 3621932

Στοιχειοθεσία: ΤΡΟΧΑΛΙΑ
Τυποτεχνική φροντίδα: Λύχνος Ε.Π.Ε.
Πλατεία Θεάτρου 24
Τηλ.: 3214766
Σχεδίαση εξωφύλλου: Γιάννης Καρλόπουλος
Εκδοτική φροντίδα: Γρηγόρης Τρουφάκος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σημείωμα του μεταφραστή-επιστημονικού επιμελητή	17
Πρόλογος	19

1. ΟΙ ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1.1	Εισαγωγή	23
1.2	Το εμβαδόν	23
1.3	Ασκήσεις στα «εμβαδά»	24
1.4	Ο όγκος	26
1.5	Η αφομοίωση των εννοιών	26
1.6	Ο λόγος και η διαίρεση	27
1.7	Περιφραστική ερμηνεία του λόγου	27
1.8	Ασκήσεις στην περιφραστική ερμηνεία	28
1.9	Παρατήρηση στις ασκήσεις περιφραστικής ερμηνείας	30
1.10	Αριθμητικοί συλλογισμοί με τη χρήση της διαίρεσης	31
1.11	Σύνδεση των αριθμητικών συλλογισμών με τις γραφικές παραστάσεις	33
1.12	Αλλαγή κλίμακας και συλλογισμοί με συναρτήσεις	36
1.13	Στοιχεία τριγωνομετρίας	40
1.14	Οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση - Βορράς και νότος - Μεσημέρι και μεσονύκτιο	41
1.15	Η ερμηνεία απλών αλγεβρικών εκφράσεων	42
1.16	Η γλώσσα	44
1.17	Γιατί ενδιαφερόμαστε για τις προαπαιτούμενες γνώσεις	46
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1Α: Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ		48

2. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

2.1	Εισαγωγή	51
2.2	Παραπλανητικές εξισώσεις και ορολογία	51
2.3	Γεγονός: θέση και χρονομετρική ένδειξη	53
2.4	Στιγμαία θέση	54
2.5	Η εισαγωγή της έννοιας «μέση ταχύτητα»	55
2.6	Γραφική παράσταση της θέσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου	57
2.7	Στιγμαία ταχύτητα	59
2.8	Αλγεβρικά πρόσημα	62
2.9	Επιτάχυνση	62
2.10	Γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου	65
2.11	Εμβαδά	67
2.12	Το μέγιστο ύψος στην κατακόρυφη βολή	68
2.13	Η λύση των προβλημάτων της κινηματικής	70
2.14	Η χρήση του υπολογιστή	71
2.15	Έρευνα στη διαμόρφωση και την αφομοίωση της έννοιας της ταχύτητας	72
2.16	Έρευνα στη διαμόρφωση και την αφομοίωση της έννοιας της επιτάχυνσης	74
2.17	Αποτελέσματα της έρευνας	78
2.18	Ο Γαλιλαίος και η γέννηση της σύγχρονης επιστήμης	79
2.19	Η παρατήρηση και η εξαγωγή συμπεράσματος	84
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2Α: Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ	86

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

3.1	Εισαγωγή	95
3.2	Η λογική δομή των νόμων της κίνησης	96
3.3	Λειτουργική ερμηνεία του 1ου Νόμου	99
3.4	Λειτουργικός ορισμός μιας κλίμακας της δύναμης	100
3.5	Εφαρμογή του δυναμομέτρου σε άλλα αντικείμενα: αδρανειακή μάζα	102
3.6	Πρόσθεση μαζών και σύνθεση δυνάμεων	105
3.7	Η παρουσίαση του 2ου Νόμου στα εγχειρίδια	105
3.8	Βάρος και μάζα	107
3.9	Η διάκριση μεταξύ της βαρυτικής και της αδρανειακής μάζας	108
3.10	Η κατανόηση του Νόμου της Αδράνειας	110
3.11	Οι λέξεις <i>είναι δυνατό να</i> μας βλάψουν – Προβλήματα στη διατύπωση	116
3.12	Ο 3ος Νόμος και τα διαγράμματα των δυνάμεων	117
3.13	Η λογική δομή του 3ου Νόμου	122
3.14	Διεσπαρμένες δυνάμεις	124
3.15	Διανυσματική απεικόνιση της δύναμης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης	124
3.16	Η κατανόηση της γήινης βαρυτικής επίδρασης	125
3.17	Νήματα και τάσεις	133
3.18	Νήματα «χωρίς μάζα»	134
3.19	Η δύναμη που είναι κάθετη στην επιφάνεια διαχωρισμού	136
3.20	Τα αντικείμενα <i>δεν</i> τινάζονται προς τα πίσω όταν επιταχύνονται	138
3.21	Τριβή	140
3.22	Αδράνεια: δύο ευρέως επιδεικνυόμενα πειράματα	142
3.23	Διαφορετικά είδη «ισότητας»	144
3.24	Επιλύοντας προβλήματα	146
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3Α: Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ	149

4. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

4.1	Τα διανύσματα και η άλγεβρά τους	157
4.2	Ο ορισμός του «διανύσματος»	159
4.3	Συνιστώσες διανύσματος	160
4.4	Βολή	162
4.5	Φαινομενολογική ανάλυση και συλλογισμοί	166
4.6	Μέτρηση με ακτίνια και ο αριθμός π	168
4.7	Κυκλική κίνηση	171
4.8	Πρωτογενείς αντιλήψεις για την κυκλική κίνηση	173
4.9	Κεντρομόλος δύναμη συγγραμμικών δυνάμεων	176
4.10	Κεντρομόλος δύναμη μη συγγραμμικών δυνάμεων	180
4.11	Συστήματα αναφοράς και φανταστικές δυνάμεις	183
4.12	Στροφή γύρω από το κέντρο μάζας: το πρόβλημα των δύο σωμάτων	184
4.13	Ροπή	189
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4Α: Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ		193

5. ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

5.1	Εισαγωγή	195
5.2	Ανάπτυξη του λεξιλογίου	196
5.3	Περιγραφή φαινομένων της καθημερινής ζωής	197
5.4	Η δύναμη και ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ορμής	199
5.5	Θερμότητα και θερμοκρασία	200
5.6	Το θεώρημα ώθησης-ορμής και έργου-κινητικής ενέργειας	204
5.7	Πραγματικό έργο και ψευδοέργο	208
5.8	Ο Νόμος Διατήρησης της Ενέργειας	209

5.9	Παρέκβαση: η ενθαλπία	212
5.10	Έργο και θερμότητα κατά την τριβή ολίσθησης	214
5.11	Παραμορφώσιμα συστήματα και δυνάμεις μηδενικού έργου	218
5.12	Κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο	221
5.13	Πλαστική κρούση	224
5.14	Διευκρινιστικές ασκήσεις	226
5.15	Σπειροειδής επανάληψη	229
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5Α: Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ		233

6. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

6.1	Εισαγωγή	237
6.2	Η διάκριση μεταξύ της ηλεκτρικής, της μαγνητικής και της βαρυτικής αλληλεπίδρασης	238
6.3	Ηλέκτριση με τριβή: ηλεκτρική αλληλεπίδραση και ηλεκτρικά φορτία	239
6.4	Ηλεκτροστατικά πειράματα στο σπίτι	241
6.5	Όμοια και ανόμοια φορτία	242
6.6	Θετικό και αρνητικό φορτίο — Βόρειος και νότιος μαγνητικός πόλος	246
6.7	Πόλωση	249
6.8	Φόρτιση με επαγωγή	251
6.9	Ο νόμος του Coulomb και η μέτρηση του ηλεκτρικού φορτίου	252
6.10	Η ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση και ο 3ος νόμος του Νεύτωνα	255
6.11	Κατανομή φορτίου μεταξύ δύο σφαιρών	257
6.12	Η διατήρηση του φορτίου	257
6.13	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου	258
6.14	Υπέρθεση	260

7. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

7.1	Εισαγωγή	263
7.2	Τι πρέπει να διδάξουμε πρώτα: τον στατικό ηλεκτρισμό ή το ηλεκτρικό ρεύμα	264
7.3	Γιατί δεχόμαστε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα είναι κίνηση φορτίου;	265
7.4	Μπαταρίες και λάμπες (I): διαμόρφωση των βασικών εννοιών που υπεισέρχονται στα κυκλώματα	270
7.5	Μπαταρίες και λάμπες (II): φαινομενολογία απλών κυκλωμάτων	275
7.6	Η ιστορική ανάπτυξη του νόμου του Ohm	278
7.7	Η διδασκαλία της έννοιας της αντίστασης και του νόμου του Ohm	282
7.8	Το ηλεκτρικό ρεύμα είναι εσωτερικό ή επιφανειακό φαινόμενο;	284
7.9	Η οικοδόμηση του προτύπου ρεύματος-κυκλώματος	285
7.10	Συμβατική και πραγματική φορά του ρεύματος	287
7.11	Ο νόμος του Ohm δεν ισχύει για κάθε καταναλωτή του κυκλώματος	289
7.12	Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων: το πείραμα Tolman-Stewart	290
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 7Α: Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ	295

8. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

8.1	Εισαγωγή	301
8.2	Το πείραμα του Oersted	302
8.3	Δύναμη μεταξύ μαγνήτη και ρευματοφόρου αγωγού	305
8.4	Το πείραμα του Ampère	307

8.5	Μνημονικοί κανόνες και υπολογιστές	309
8.6	Ο νόμος του Faraday σε πολλαπλά συνεκτική περιοχή	310
8.7	Η κριτική του Faraday για την έννοια της δράσης από απόσταση	311
8.8	Η αρχική μορφή της έννοιας του πεδίου	315
8.9	Εργαστηριακή μέτρηση της τιμής του B	318

9. ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΦΩΣ

9.1	Εισαγωγή	321
9.2	Η διαφορά μεταξύ ταχύτητας σωματιδίου και ταχύτητας διάδοσης	321
9.3	Γραφικές παραστάσεις	322
9.4	Μορφές εγκάρσιων και διαμήκων παλμών	325
9.5	Ανάκλαση των παλμών	326
9.6	Προσδιορισμός της ταχύτητας διάδοσης	330
9.7	Ταχύτητα διάδοσης προεξοχής σε χορδή	332
9.8	Ταχύτητα διάδοσης παλμού σε ρευστό	334
9.9	Ταχύτητα διάδοσης επιφανειακών κυμάτων σε ρηχό νερό	337
9.10	Μεταβατικά κυματικά φαινόμενα	341
9.11	Σχεδιασμός του μετώπου και των ακτίνων ενός κύματος δύο διαστάσεων	342
9.12	Περιοδικοί και ημιτονοειδείς κυματικοί συρμοί	343
9.13	Η μορφή της συμβολής κυμάτων που προέρχονται από δύο πηγές	345
9.14	Σύγκριση των μορφών συμβολής που δημιουργούν μια διπλή σχισμή και ένα φράγμα	347
9.15	Η ερμηνεία του σκοτεινού κέντρου των δακτυλίων του Νεύτωνα από τον Young	348
9.16	Σύγκριση μεταξύ κατοπτρικής και διάχυτης ανάκλασης	350
9.17	Είδωλα και σχηματισμός ειδώλων σε επίπεδα κάτοπτρα	351

9.18	Είδωλα και σχηματισμός ειδώλων σε λεπτούς συγκλίνοντες φακούς	353
9.19	Πρωτογενής αντίληψη της φύσης του φωτός	357
9.20	Φαινομενολογικές ερωτήσεις και προβλήματα	358

10. ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΧΡΟΝΙΑ ΤΗΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

10.1	Εισαγωγή	361
10.2	Ιστορικές προκαταρκτικές γνώσεις	363
10.3	Το πρελούδιο της έρευνας του Thomson	368
10.4	Τα πειράματα του Thomson	370
10.5	Τα συμπεράσματα του Thomson	374
10.6	Το πείραμα του Thomson: γραπτή εργασία για το σπίτι	377
10.7	Η στοιχειώδης ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου	378
10.8	Από το ηλεκτρόνιο του Thomson στο άτομο του Bohr	379
10.9	Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και η έννοια του φωτονίου	386
10.10	Αποσπάσματα από το άρθρο του Αϊνστάιν (του 1905) για την έννοια του φωτονίου	392
10.11	Η πρώτη κβαντική εικόνα του Bohr για το άτομο του υδρογόνου	395
10.12	Η εισαγωγή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας	405
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 10Α: Το πείραμα του Thomson: Γραπτή εργασία για το σπίτι		416
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 10Β: Το άτομο του Bohr: Γραπτή εργασία για το σπίτι		423

11. ΔΙΑΦΟΡΑ ΘΕΜΑΤΑ

11.1	Η εισαγωγή της κινητικής θεωρίας	431
11.2	Οι παραδοχές της κινητικής θεωρίας των ιδανικών αερίων	434
11.3	Υδροστατική πίεση	441
11.4	Αποσαφήνιση της θερμικής διαστολής	443
11.5	Η εκτίμηση της τάξης ενός μεγέθους	444
11.6	Παραδείγματα μαθηματικής φυσικής για προικισμένους μαθητές	445
11.7	Το Χάος	449

12. ΠΩΣ ΘΑ ΠΕΤΥΧΟΥΜΕ ΕΥΡΥΤΕΡΗ ΚΑΛΛΙΕΡΓΕΙΑ ΣΤΙΣ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

12.1	Εισαγωγή	451
12.2	Χαρακτηριστικά της καλλιέργειας στις θετικές επιστήμες	452
12.3	Λειτουργική γνώση	454
12.4	Μαθήματα θετικών επιστημών γενικής μόρφωσης	457
12.5	Ανάλυση του τρόπου σκέψης των θετικών επιστημόνων	461
12.6	Παρουσίαση της συγγένειας μεταξύ γεγονότων της ιστορίας του πνεύματος	468
12.7	Παραλλαγές στο προηγούμενο θέμα	472
12.8	Θέματα σχετικά με την εφαρμογή των προηγούμενων ιδεών	473
12.9	Το πρόβλημα της ανάπτυξης της αντίληψης	476
12.10	Το πρόβλημα της εκπαίδευσης των καθηγητών και των δασκάλων	477
12.11	Συμβολή του υπολογιστή	482
12.12	Διδάγματα από την πείρα	484

13. ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

13.1	Εισαγωγή	489
13.2	Κατάλογος διαδικασιών	490
13.3	Γιατί μας ενδιαφέρει η κριτική σκέψη;	499
13.4	Το υπάρχον επίπεδο ικανότητας εκτέλεσης αφηρημένων λογικών συλλογισμών	500
13.5	Είναι δυνατό να βελτιωθεί η ικανότητα εκτέλεσης αφηρημένων λογικών συλλογισμών;	502
13.6	Οι συνέπειες της δυσαρμονίας μεταξύ της διδασκτέας ύλης και της αντίληψης των μαθητών	506
13.7	Εξακρίβωση των δυσκολιών των μαθητών	508
13.8	Οι εξετάσεις	509
13.9	Ορισμένες σκέψεις για τη βελτίωση του διδακτικού προσωπικού	510
	BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	513
	EΥΡΕΤΗΡΙΟ	521

Σημείωμα του μεταφραστή - επιστημονικού επιμελητή

Στη χώρα μας (και δεν αποτελούμε εξαίρεση) η παροχή γνώσεων διδακτικής της φυσικής στους καθηγητές φυσικής είναι απολύτως απαραίτητη: ακόμα και η πιο εμπνευσμένη και διαυγής παρουσίαση των ιδεών της φυσικής κινδυνεύει να αποτύχει, αν δεν βασίζεται στα ευρήματα της έρευνας σχετικά με τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται, μαθαίνουν και κατανοούν αυτές τις ιδέες.

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας είναι ένας πλήρης οδηγός διδασκαλίας της φυσικής. Αναφέρεται στη φυσική που διδάσκεται στο γυμνάσιο, στο λύκειο και, ως ένα βαθμό, σ' έναν ανώτερο κύκλο σπουδών. Συγγραφέας του είναι ο καθηγητής του πανεπιστημίου της Ουάσινγκτον Arnold Arons, ένας από τους πιο έμπειρους ερευνητές διδακτικής της φυσικής και για πολλά χρόνια επικεφαλής ερευνητικών ομάδων διδακτικής της φυσικής. Ο Arons, εντοπίζει τις πρωτογενείς αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις φυσικές έννοιες, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση κάθε θέματος ξεχωριστά, καθώς και τις παρανοήσεις και τις λανθασμένες αντιλήψεις τους. Δεν περιορίζεται, όμως, μόνο σ' αυτό. Σε κάθε περίπτωση, προτείνει συγκεκριμένες λύσεις και δοκιμασμένους τρόπους «θεραπείας». Το βιβλίο αυτό, λοιπόν, είναι ένα χρήσιμο και αποτελεσματικό «εργαλείο», απολύτως απαραίτητο για κάθε Έλληνα καθηγητή φυσικής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ιωάννη Σ. Ράπτη, λέκτορα του Ε.Μ.Π., για την ανάγνωση των χειρογράφων της μετάφρασης και για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του.

Α. Δ. Βαλαδάκης

Δρ Φυσικής
Καθηγητής Βαρβακειού Σχολής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πριν από είκοσι χρόνια περίπου, μέλη της κοινότητας των καθηγητών φυσικής άρχισαν να διεξάγουν συστηματικές παρατηρήσεις και έρευνες για τον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν και κατανοούν τις φυσικές έννοιες, καθώς και για τα πρότυπα και τις διαδικασίες εκτέλεσης συλλογισμών. Ορισμένες έρευνες, επίσης, άρχισαν ή επεκτάθηκαν στη μελέτη των γενικών χαρακτηριστικών που παρουσιάζει η ικανότητα εκτέλεσης αφηρημένων λογικών συλλογισμών. Στο παρόν βιβλίο προσπάθησα να συγκεντρώσω τις περισσότερες απόψεις σχετικά με τη διδασκαλία των βασικών ιδεών ενός εισαγωγικού μαθήματος φυσικής, όπως διδάσκεται στο γυμνάσιο και το λύκειο. Ορισμένες ιδέες είναι δυνατό να περιληφθούν επίσης σε μια σειρά μαθημάτων φυσικής για φοιτητές που προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί· στην τελευταία περίπτωση, ωστόσο, δεν έχω εισχωρήσει σε μεγάλο βάθος.

Ελάχιστα στηρίχθηκα σε εικασίες. Επικαλέσθηκα και χρησιμοποίησα τις περισσότερες συστηματικές έρευνες που έχουν υποπέσει στην αντίληψή μου. Χρησιμοποίησα, επίσης, τις προσωπικές παρατηρήσεις μου, που τις διεξήγαγα για περισσότερο από σαράντα χρόνια και τις οποίες έχω επαναλάβει εξαντλητικά αρκετές φορές. Πηγή μου υπήρξαν συνεντεύξεις απευθείας με μαθητές στις οποίες τους δίνονταν ερωτήματα και στη συνέχεια καταγράφονταν οι απαντήσεις κάθε μαθητή ξεχωριστά. Άλλη πηγή μου ήταν η ανάλυση των γραπτών απαντήσεων των μαθητών σε τεστ και εξετάσεις. Μέσα από τις σελίδες ενός βιβλίου λογικού μεγέθους, ωστόσο, ήταν αδύνατο να παρουσιάσω τα «πρακτικά» των συζητήσεων και τα πλήρη δεδομένα στα οποία στηρίχθηκα. Έτσι, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις παραθέτω ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών, υποστηρίζω πολλές απόψεις χωρίς να αναφέρω τα απαραίτητα στοιχεία. Ζητώ, λοιπόν, από τον προσεκτικό και κριτικό αναγνώστη κατανόηση για τις παραλείψεις. Ζητώ, επίσης, να ελέγξει τις απόψεις που παραθέτω, όταν του δοθεί η ευκαιρία, ή να ανατρέξει στη λεπτομερή βιβλιογραφία, για να εμβαθύνει στο θέμα.

Σε ένα τέτοιο βιβλίο είναι αδύνατο να περιλάβουμε όλη τη γνώση που αναδύθηκε από την έρευνα του τρόπου διδασκαλίας, μάθησης και ανάπτυξης της αντίληψης. Η βιβλιογραφία είναι πλούσια, αλλάζει και αναπτύσσεται με ταχύ ρυθμό. Υπήρξα, λοιπόν, επιλεκτικός: προσπάθησα να περιλάβω τις παρατηρήσεις που είχαν αμεσότερη σχέση με την πρακτική μέσα στην

αίθουσα διδασκαλίας στο βασικότερο επίπεδο. Ο κατάλογος των βιβλιογραφικών αναφορών «ανοίγει την πόρτα» σε όσους επιθυμούν να ασχοληθούν με περισσότερες λεπτομέρειες και να ερευνήσουν τα πρωταρχικά δεδομένα. Η παράλειψη κάποιας αναφοράς —σημαντικής ως προς το συγκεκριμένο επίπεδο— οφείλεται ή σε δικό μου λάθος εκτίμησης ή απλώς στην αδυναμία μου να περιλάβω όλη την εκτενή βιβλιογραφία.

Τα περιοδικά «American Journal of Physics» και «The Physics Teacher»* είναι πλούσια σε άρθρα για το λογικό περιεχόμενο και την επιστημολογική δομή των φυσικών νόμων και των εννοιών. Περιγράφουν βελτιωμένους τρόπους παρουσίασης των θεμάτων και τρόπους απασχόλησης των μαθητών με συγκεκριμένες δραστηριότητες. Προτείνουν επιδείξεις και άλλες μεθόδους που αποσκοπούν να αποσαφηνίσουν τις αφηρημένες έννοιες. Περιέχουν κριτική παραπλανητικών και λανθασμένων προσεγγίσεων. Εισάγουν πρωτότυπες αποδείξεις, εργαστηριακά πειράματα κ.ά. Όλα αυτά τα θέματα είναι πολύτιμα και σημαντικά για την κοινότητά μας. Θά 'θελα, λοιπόν, κάποιος ικανότερος από εμένα, σε ένα άλλο βιβλίο διδακτικής της φυσικής, να αναλάβει την καταγραφή του πλούτου που με τα χρόνια συσσωρεύθηκε στον τομέα αυτό.

Είναι απαραίτητο, ωστόσο, να αποσαφηνίσω ότι ο δικός μου σκοπός είναι διαφορετικός: προσπαθώ να παρουσιάσω τα θέματα που κατά τη γνώμη μου αποτελούν τη *βάση και προηγούνται* των περισσότερων ιδεών και παρουσιάσεων που υπάρχουν στα περιοδικά. Πολλές από τις θαυμάσιες υποδείξεις που εμφανίζονται σ' αυτά, αποδεικνύονται όντως αναποτελεσματικές για πολλούς μαθητές. Αυτό συμβαίνει όχι επειδή είναι λανθασμένες, αλλά επειδή οι μαθητές δεν έτυχε να αφομοιώσουν τις *πρωταρχικές* έννοιες και τον τρόπο εκτέλεσης αφηρημένων λογικών συλλογισμών. Αποφάσισα, λοιπόν, να εστιάσω την προσοχή μου σε ορισμένα πρωταρχικά χαρακτηριστικά ανάπτυξης της αντίληψης και στο θεμελιώδες πρόβλημα της κατανόησης και της μάθησης. Τα τελευταία χρόνια μάλιστα το ενδιαφέρον γι' αυτά τα ζητήματα εντείνεται συνεχώς. Ας μη θεωρηθεί ότι υποτιμώ το πολύτιμο υλικό και τους τρόπους παρουσίασης που περιγράφονται στα περιοδικά: απλώς, εκεί όπου σταματά η δική μου ανάπτυξη, αρχίζει η ρωμαλέα προσπάθεια των περιοδικών.

Είναι απαραίτητο να υπογραμμίσω, επίσης, ότι δεν διατυπώνω «συνταγές» παρουσίασης των διαφόρων θεμάτων και του τρόπου διδασκαλίας τους ούτε ισχυρίζομαι ότι υπάρχει μοναδικός τρόπος «διοχέτευσης» της γνώσης στους μαθητές. Μεταξύ των καθηγητών υπάρχει τεράστια ποικιλία στο στυλ και στον τρόπο προσέγγισης ενός θέματος, και αυτό πρέπει να ενισχύεται. Σκοπός μου είναι να αναδείξω με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη

* Εκδίδονται από την Αμερικανική Ένωση Καθηγητών Φυσικής. (Σ.τ.μ.)

σαφήνεια τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών και στον τρόπο εκτέλεσης συλλογισμών. Επισημαίνω, επίσης, ορισμένα θέματα λογικής δομής και ανάπτυξης που τα εγχειρίδια δεν τα διαπραγματεύονται ευκρινώς. Επομένως, ως προς τον τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων της διδακτικής, σέβομαι το ιδιαίτερο στυλ και τις επιλογές κάθε καθηγητή (στον τρόπο που παρουσιάζει και αναλύει τα θέματα, διατηρώντας την ισορροπία μεταξύ εργαστηρίου και θεωρίας, χρησιμοποιώντας υπολογιστές, οπτικοακουστικά μέσα κτλ.).

Προσπάθησα να καλύψω την ύλη της φυσικής που διδάσκεται στο γυμνάσιο, στο λύκειο και ως ένα βαθμό στο πρώτο έτος του πανεπιστημίου όπου χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός. Ορισμένα θέματα, λοιπόν, ξεφεύγουν από το επίπεδο της λυκειακής φυσικής. Οι καθηγητές του λυκείου πρέπει να σύρουν κατάλληλες διαχωριστικές γραμμές και να περιορίσουν τα πιο σύνθετα θέματα —αν αναφερθούν σ' αυτά— σε μαθητές με ιδιαίτερη επίδοση.

Στο άλλο άκρο του «φάσματος», οι καθηγητές πρότυπων σχολείων με επίλεκτους μαθητές ή οι καθηγητές σε τμήματα επίλεκτων μαθητών, οι οποίοι προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί και χρησιμοποιούν απειροστικό λογισμό, θα θεωρήσουν τετριμμένα ορισμένα θέματα. Είναι, ωστόσο, απαραίτητο να επισημάνω ότι υπάρχει μεγαλύτερη αλληλοκάλυψη μεταξύ μαθητών διαφορετικού επιπέδου από όση αντιλαμβάνονται οι καθηγητές. Αποτέλεσμα: οι καθηγητές εκπλήσσονται όταν ανακαλύπτουν πόσοι θεωρητικά υψηλού επιπέδου μαθητές έχουν τελικά τις ίδιες δυσκολίες, πρωτογενείς αντιλήψεις (*preconception*) και παρανοήσεις με χαμηλού επιπέδου μαθητές. Αν ανεβούμε ή κατεβούμε την «κλίμακα», συναντάμε απλώς διαφορετικό ποσοστό μαθητών που έχουν συγκεκριμένη δυσκολία: η «καμπύλη» δεν μηδενίζεται απότομα σε ορισμένο επίπεδο. Ωστόσο, οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας (ιδιαίτερα όσοι έχουν ευχέρεια στον προφορικό λόγο) μπορούν κατά κανόνα να θεραπεύσουν ή να ξεπεράσουν γρηγορότερα τις δυσκολίες. Ο καθηγητής, λοιπόν, πρέπει να προσαρμόσει ανάλογα το επίπεδο του μαθήματος.

Ορισμένα κεφάλαια του βιβλίου περιέχουν παραρτήματα με υποδειγματικές ερωτήσεις για τεστ και προβλήματα για το σπίτι. Για λόγους συντομίας δεν περιέλαβα λεπτομερείς αναλύσεις των συγκεκριμένων ζητημάτων αποτελούν, ωστόσο, εφαρμογή της γνώσης που αποκτήθηκε μέσω της έρευνας. Καταδεικνύουν το είδος των ερωτημάτων που πρέπει να συμπληρώνουν τα προβλήματα ποσοτικών υπολογισμών που συνήθως υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου ενός εγχειριδίου φυσικής. Έτσι, η προσοχή του μαθητή εστιάζεται σε ζητήματα που ίσως δεν αναπτύσσονται λεπτομερώς στο κείμενο. Οι ερωτήσεις και τα προβλήματα που παραθέτω στα παραρτήματα έχουν χαρακτηρη *πρόσκλησης*: είναι απαραίτητο να συμπληρωθούν. Αυτό, όμως, δεν θα είναι έργο μόνον ενός ατόμου, η φαντασία του οποίου έχει,

έτσι κι αλλιώς, περιορισμένες δυνατότητες· θα είναι αποτέλεσμα της προσπάθειας πολλών ενδιαφερομένων: καθένας τους θα προσθέσει τη δική του πρωτοτυπία. Ανυπομονώ, λοιπόν, να δω να εμπλουτίζεται ο αριθμός των παραδειγμάτων μου.

Τέλος, επισημαίνω την εξής δυσάρεστη αλήθεια: από την έρευνα προκύπτει ότι η παρουσίαση των αφηρημένων ιδεών και του μηχανισμού εκτέλεσης συλλογισμών (όσο κι αν προσπαθούμε να την κάνουμε θελκτική και διαυγή) είναι ελάχιστα αποτελεσματική για τον *παθητικό* ακροατή, με εξαίρεση μικρό ποσοστό προικισμένων μαθητών. Ακόμα και σε τμήματα όπου χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός, πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες. Χρειάζονται, λοιπόν, όλη τη βοήθεια που περιγράφεται στις σελίδες του παρόντος βιβλίου. Αυτό δεν σημαίνει ότι συνηγορώ υπέρ των στρυφνών παρουσιάσεων. Επισημαίνω απλώς την αναγκαιότητα να συμπληρώνεται μια εμπνευσμένη παρουσίαση με ασκήσεις που *προσγειώνουν* τη σκέψη του μαθητή και τον κατευθύνουν να διατυπώσει *με δικά του λόγια* τις επεξηγήσεις και τις αναλύσεις.

Είναι προφανές ότι οι ιδέες και οι πληροφορίες που παρατίθενται εδώ αναπτύχθηκαν μέσω της συνεργασίας μου με άλλους ανθρώπους. Είμαι, λοιπόν, ευγνώμων σε εκατοντάδες μαθητές που δέχτηκαν να απαντήσουν στα ερωτηματολόγια μου, συναισθανόμενοι την αγωνία μου όταν πρόσμενα τις απαντήσεις τους. Είμαι, επίσης, ευγνώμων σε πολλούς συναδέλφους και συνεργάτες μου με τους οποίους συζητούσαμε θέματα φυσικής, ετοιμάζαμε τα ερωτηματολόγια και προβληματιζόμαστε για το τι σημαίνει «κατανοώ» και «μαθαίνω». Μεταξύ αυτών είναι οι πρώην συνεργάτες μου στο κολέγιο Amherst: Bruce Benson, Colby Dempsey, Joel Gordon, Robert Romer, Theodore Soller, και Dudley Towne· στο πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον: David Bodansky, Kenneth Clark, Ronald Geballe, James Gerhart, Patricia Heller, Lillian McDermott, James Minstrell, και Phillip Peters.

Ο Robert Romer, ο Kenneth Clark και ο Phillip Peters διάβασαν εκτενώς αποσπάσματα του βιβλίου και με εφοδίασαν με πολύτιμες απόψεις, διορθώσεις και υποδείξεις.

ARNOLD B. ARONS
Seattle, Ουάσινγκτον

1. ΟΙ ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1.1 Εισαγωγή

Ορισμένα κενά στο υπόβαθρο των μαθητών εμποδίζουν σοβαρά την αφομοίωση των εννοιών και του τρόπου σκέψης που προσπαθούμε να πετύχουμε εξ υπαρχής σε ένα εισαγωγικό μάθημα φυσικής. Οι συγκεκριμένες παραλείψεις αφορούν την κατανόηση των εννοιών «εμβαδόν» και «όγκος». Αφορούν, επίσης, το νόημα του πηλίκου και της διαίρεσης, παρατηρούνται δε και σε φοιτητές που προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί.

Καταρχάς, κάτι τέτοιο δεν θα έπρεπε να συμβαίνει: υποτίθεται ότι σε μικρότερες τάξεις οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με τις εν λόγω ιδέες και τις έχουν αφομοιώσει. Η εμπειρία διδάσκει, ωστόσο, ότι συμβαίνει το αντίθετο. Το να αγνοήσουμε, λοιπόν, τις συγκεκριμένες δυσκολίες των μαθητών αποβαίνει εις βάρος της συνολικής επίδοσής τους.

Είναι, δυστυχώς, απατηλό να περιμένουμε ότι οι δυσκολίες ξεπερνιούνται με λίγες, σύντομες ασκήσεις, τεχνητά προετοιμασμένες στην αρχή των παραδόσεων. Βοηθάμε τους περισσότερους μαθητές να καλύψουν τα κενά τους με ασκήσεις επαναλαμβανόμενες σε όλη τη διάρκεια των παραδόσεων, ενσωματωμένες κατάλληλα στην ύλη του μαθήματος. Τούτη η διαπίστωση δεν είναι αυθαίρετη: αποτελεί πραγματικότητα που η ερευνητική ομάδα μας διδακτικής της φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον την έχει συναντήσει πολλές φορές [Arons (1976), (1938b), (1984c)].

Το παρόν κεφάλαιο περιγράφει ορισμένες μαθησιακές δυσκολίες που υπεισέρχονται στην ανάπτυξη των προαπαιτούμενων γνώσεων και στο χειρισμό προβλημάτων πρακτικής αριθμητικής. Προτείνονται, επίσης, ασκήσεις ως τμήμα της εργασίας που εκτελείται στη διάρκεια του μαθήματος.

1.2 Το εμβαδόν

Η έννοια του εμβαδού είναι θεμελιώδης για πολλές βασικές έννοιες της φυσικής (λόγου χάρι για την πίεση, τη μηχανική τάση, τη ροή της ενέργειας, το συντελεστή της διάχυσης, το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κτλ.). Είναι η βάση των συλλογισμών με λόγους που υπεισέρχονται στη γεωμετρική αλλαγή κλίμακας. Είναι ουσιώδης, επίσης, για την ερμηνεία της επιφάνειας

που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου* (το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας είναι ανάλογο της ταχύτητας), για την ερμηνεία του εμβαδού που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου (αυτό το εμβαδόν είναι ανάλογο της μετατόπισης), για τη γεωμετρική ερμηνεία του έργου, της ώθησης και γενικά του ολοκληρώματος.

Αν ρωτήσετε τους μαθητές πώς υπολογίζεται το «εμβαδόν» ή «η έκταση μιας επιφάνειας», οι περισσότεροι —από όσους τελικά απαντούν— αναφέρουν: «εμβαδόν είναι το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος». Στη συνέχεια, αν σχεδιάσετε ένα σχήμα χωρίς καθορισμένο μήκος ή πλάτος και τους ζητήσετε να υπολογίσουν το εμβαδόν του, ελάχιστοι κατορθώνουν να δώσουν οποιαδήποτε απάντηση.

Οι μαθητές που απαντούν με τον τρόπο που προανέφερα δεν έχουν αφομοιώσει τον σαφή *λειτουργικό ορισμό* του «εμβαδού».

Η αιτία είναι σχετικά απλή: Στα βιβλία αριθμητικής των μικρότερων τάξεων, όταν εισάγεται η έννοια του εμβαδού, υπάρχει όντως μια παράγραφος στην οποία αναφέρεται ότι για να εμβαδομετρήσουμε μια τυχαία επιφάνεια (αφού επιλέξουμε μια μοναδιαία τετραγωνική επιφάνεια) χωρίζουμε με ένα πλέγμα ευθειών την επιφάνεια που θέλουμε να εμβαδομετρήσουμε και κατόπιν μετράμε το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων που σχηματίζονται: ουδείς μαθητής, ωστόσο, έχει εκτελέσει κατ' ιδίαν τη συγκεκριμένη εργασία με τη μορφή άσκησης για το σπίτι. Ουδέποτε του ζητήθηκε να ορίσει το «εμβαδόν». Υπολογίζει απλώς εμβαδά *κανονικών* σχημάτων, λόγου χάρη τετραγώνων, παραλληλογράμμων κτλ., χρησιμοποιώντας τύπους που τους έχει απομνημονεύσει. Οι τύποι, ωστόσο, δεν συνδέονται πλέον με τη διαδικασία της καταμέτρησης των μοναδιαίων τετραγώνων, αν και ο μαθητής κάποτε παρακολούθησε τη διαδικασία.

Γενικότερα, ο μαθητής δεν έρχεται άμεσα και σοβαρά σε επαφή με τη διαδικασία των λειτουργικών ορισμών. Εξασκείται ελάχιστα ή και καθόλου στο να ορίζει έννοιες με τη βοήθεια της εμπειρίας του και στο να περιγράφει με απλές λέξεις τη διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε αριθμητικές τιμές ενός τεχνικού όρου.

1.3 Ασκήσεις στα «εμβαδά»

Στα εισαγωγικά μαθήματα φυσικής θέλουμε να επικαλούμαστε την έννοια του εμβαδού από την πρώτη στιγμή. Πρέπει, λοιπόν, να καθοδηγήσου-

* Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον όρο «ένδειξη του χρονομέτρου» αντί του όρου «χρόνος». Εκτενής σχετική αναφορά υπάρχει στο εδάφιο 2.3. (Σ.τ.μ.)

με τους μαθητές (λόγου χάρι με ασκήσεις) να αρθρώσουν τον σχετικό ορισμό με δικά τους λόγια. (Παράλληλα, πρόκειται για καταπληκτική ευκαιρία παρουσίασης της διαδικασίας ενός λειτουργικού ορισμού σε συνηθισμένη περίπτωση, που δεν φοβίζει τους μαθητές.) Το γεγονός ότι ήδη χρησιμοποιούν τον όρο «εμβαδόν», χωρίς, ωστόσο, να έχουν αφομοιώσει το νόημά του, προετοιμάζει καλύτερα το έδαφος.

Με τα προβλήματα για το σπίτι και με τα τεστ οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκτελέσουν άμεσα τη διαδικασία που περιγράφουν στον ορισμό: επιλέγουν το μοναδιαίο τετράγωνο, χαράσσουν το πλέγμα των ευθειών και μετρούν τα μοναδιαία τετράγωνα που σχηματίζονται. Στην καταμέτρηση πρέπει να λάβουν υπόψη τους και το εμβαδόν που υπολείπεται έως τη συντοριακή καμπύλη και δεν καλύπτεται από μοναδιαία τετράγωνα. Πολλοί μαθητές όμως θεωρούν ότι το κλάσμα του μοναδιαίου τετραγώνου που προκύπτει από την καταμέτρηση στερείται νοήματος, επειδή η διαδικασία είναι «λανθασμένη» και «ανακριβής», σε αντίθεση με την αριθμητική τιμή που προκύπτει από μαθηματικό τύπο. Είναι, λοιπόν, απαραίτητο να αποκτήσουν την εμπειρία της συγκεκριμένης καταμέτρησης και εκτίμησης, αρχίζοντας με «πραγματικές» επιφάνειες που περικλείονται από τυχαίες και ακανόνιστες καμπύλες. Κατόπιν, μόλις το επιτρέψουν οι συνθήκες, οι ασκήσεις πρέπει να επεκταθούν στον υπολογισμό και την ερμηνεία της επιφάνειας που ορίζεται από τη γραφική παράσταση του v ως προς το t και του γ ως προς το t . (Τούτη η άσκηση περιέχει και τη διαδικασία με την οποία προσδιορίζεται το φυσικό μέγεθος που αντιστοιχεί στο εμβαδόν.)

Αν στο μάθημα της φυσικής χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός, οι ασκήσεις που προαναφέραμε είναι δυνατό να συνδεθούν με τη μαθηματική έννοια του «ολοκληρώματος». Η εν λόγω σύνδεση είναι προφανής και η υπόμνησή της φαίνεται περιττή. Πολλοί μαθητές, ωστόσο, δεν την έχουν αφομοιώσει, ακόμη κι αν παρακολουθούν ταυτόχρονα ή έχουν ήδη παρακολουθήσει μαθήματα απειροστικού λογισμού: αν και έχουν ίσως ακούσει πολλές φορές ότι το ολοκλήρωμα ερμηνεύεται ως εμβαδόν, η συγκεκριμένη ιδέα δεν τους έχει εντυπωθεί. Και τούτο, επειδή δεν αποτέλεσε μέρος της προσωπικής, απτής εμπειρίας τους ούτε είχαν ποτέ την ευκαιρία να την περιγράψουν με δικά τους λόγια.

Με την εισαγωγή του «έργου» και της «ώθησης» οι ασκήσεις πρέπει να επαναληφθούν. Μόνο με την ανακύκλωση των ιδεών σε σχετικά μεγάλες χρονικές περιόδους, κατά τις οποίες η ύλη εμπλουτίζεται και οι ιδέες επανέρχονται συνεχώς, οι μαθητές αφομοιώνουν οριστικά τις ιδέες.

Αν δεν χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός, η έννοια του «ολοκληρώματος» είναι περιττή. Ωστόσο, οι μαθητές, χρησιμοποιώντας την έννοια του εμβαδού, αποδεσμεύονται από τον περιορισμό των σταθερών μεγεθών: Μπορούν να αντιληφθούν πώς η φυσική μελετά απλά και «νομότυπα» τη διαδικασία της συνεχούς μεταβολής. Τον 17ο αιώνα η «σύλληψη της φευγα-

λέας στιγμής» υπήρξε από τους μεγαλύτερους θριάμβους του πνεύματος. Οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν με απλούς υπολογισμούς κάποια αίσθηση αυτής της πολύτιμης ανακάλυψης, χωρίς να χρησιμοποιήσουν την τυπική λογική του απειροστικού λογισμού.

1.4 Ο όγκος

Οι περισσότεροι μαθητές έχουν καταρχάς με τον «όγκο» την ίδια δυσκολία όπως και με το «εμβαδόν». Προσπαθούν να αφομοιώσουν μαθηματικούς τύπους χωρίς να έχουν αφομοιώσει τον λειτουργικό ορισμό της έννοιας. Αποτέλεσμα: στην πραγματικότητα δεν διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ του εμβαδού και του όγκου¹ χρησιμοποιούν τις δύο έννοιες επιπόλαια και εναλλακτικά μεταξύ τους ως συνώνυμα του μεγέθους ενός αντικειμένου.

Υπό τον όρο ότι ο λειτουργικός ορισμός του «εμβαδού» έχει αναπτυχθεί προσεκτικά και έχει συνδεθεί στενά με την απτή εμπειρία της καταμέτρησης των τετραγώνων, ο ορισμός του «όγκου» εκμειύεται σχετικά εύκολα. Η αντιστοιχία με το εμβαδόν είναι πλέον ευδιάκριτη και η καταμέτρηση των μοναδιαίων κύβων γίνεται σύντομα αποδεκτή.

1.5 Η αφομοίωση των εννοιών

Πρέπει να επισημάνουμε ότι ο μαθητής, ακόμα κι όταν έχει αντιληφθεί τη διαδικασία της καταμέτρησης των μοναδιαίων τετραγώνων και των κύβων, βρίσκεται ακόμα στην αρχή. Δεν έχει αφομοιώσει πλήρως τον λειτουργικό ορισμό του «εμβαδού» και του «όγκου». Απέχει σημαντικά από το να μπορεί να χρησιμοποιεί εκτενώς αυτές τις έννοιες.

Στο συγκεκριμένο στάδιο ορισμένοι μαθητές (ιδιαίτερα εκείνοι που ελάχιστα ή και καθόλου έχουν ασχοληθεί με μαθήματα θετικής κατεύθυνσης) δεν διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ της μάζας και του όγκου¹. Πολλοί, επίσης (ακόμα και μαθητές που προορίζονται για μηχανικοί ή φυσικοί), όταν οι γραμμικές διαστάσεις ενός αντικειμένου αυξάνονται ή ελαττώνονται, δεν μπορούν να βρουν τη σχέση μεταξύ της αρχικής και της τελικής επιφάνειας του αντικειμένου ούτε μεταξύ του αρχικού και του τελικού όγκου του.

Το πρόβλημα της αλλαγής κλίμακας είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Επειδή,

1. Αποδείξεις του συγκεκριμένου ισχυρισμού και στρατηγικές που βοηθούν τους μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των δύο εννοιών υπάρχουν στις αναφορές: McDermott, Pitenik και Rosenquist (1980)· McDermott (1980)· McDermott, Rosenquist και van Zee (1983).

όμως, περιλαμβάνει συλλογισμούς με πηλίκια, θα το μελετήσουμε λεπτομερέστερα στο εδάφιο 1.12.

1.6 Ο λόγος και η διαίρεση

Από τα σοβαρότερα και θεμελιωδέστερα προβλήματα στην ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών στο γυμνάσιο και το λύκειο είναι ότι οι μαθητές δεν αφομοιώνουν τη διαδικασία εκτέλεσης συλλογισμών με λόγους. Η φτωχή εκτελεστική ικανότητά τους, που έχει επανειλημμένα παρατηρηθεί σε δοκιμασίες Piaget, έχει μελετηθεί αρκετά τα προηγούμενα δεκαπέντε χρόνια [McKinon και Renner (1971)· Karplus et al (1979)· Arons και Karplus (1976)· Chiappetta (1976)]. Για τους περισσότερους μαθητές αυτή η αδυναμία είναι από τα σοβαρότερα εμπόδια όταν ασχολούνται με τις θετικές επιστήμες· τους κατατρέπει, λοιπόν, συνεχώς.

Για να διευκολυνθούμε, κατατάσσω τους συλλογισμούς με λόγους σε δύο επίπεδα ή στάδια: (1) στο επίπεδο όπου ερμηνεύουμε περιφραστικά το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο αριθμών· (2) στο επίπεδο όπου χρησιμοποιούμε την προηγούμενη ερμηνεία για να υπολογίσουμε κάποια άλλη ποσότητα.

1.7 Περιφραστική ερμηνεία του λόγου

Οι συλλογισμοί με τη χρήση του λόγου και της διαίρεσης απαιτούν, σε πρώτη φάση, να μπορούμε να ερμηνεύσουμε περιφραστικά το νόημα της αριθμητικής τιμής ενός λόγου. Η ερμηνεία εξαρτάται από την εκάστοτε περίπτωση. Επειδή πολλοί μαθητές έχουν αδυναμία στο συγκεκριμένο ζήτημα, πρέπει να εξασκηθούν να ερμηνεύουν τους λόγους με δικά τους λόγια.

Αρχικά, όταν οι αριθμοί δεν έχουν ακόμα συγκεκριμένο φυσικό νόημα, ερμηνεύουμε την τιμή ενός λόγου ως εξής: π.χ. ο λόγος $465/23$ δείχνει πόσες φορές «χωράει» ο αριθμός 23 στον 465. Φαίνεται, ίσως, τετριμμένο, αλλά δεν είναι. Οι περισσότεροι μαθητές έχουν απομνημονεύσει (επιτυχώς ή ανεπιτυχώς) τον αλγόριθμο της διαίρεσης· ποτέ, ωστόσο, δεν τους δόθηκε η ευκαιρία να αντιληφθούν ότι η συγκεκριμένη πράξη είναι σύντομη διαδικασία καταμέτρησης του πλήθους των διαδοχικών αφαιρέσεων του 23 από το 465*. Δεν αντιλαμβάνονται κάθε πλευρά της πράξης της διαίρεσης ούτε την ανάγουν σε προηγούμενη στοιχειωδέστερη εμπειρία τους. Σε όσους δεν έχουν αντιληφθεί τη συγκεκριμένη προσέγγιση πρέπει να δοθεί η ευκαιρία να με-

* Δηλαδή, πόσες φορές μπορούμε να αφαιρέσουμε τον αριθμό 23 από τον 465. (Σ.τ.μ.)

τρήσουν το πλήθος των διαδοχικών αφαιρέσεων. Με αυτό τον τρόπο θα αρχίσουν να κατανοούν το νόημα του αλγορίθμου που έχουν απομνημονεύσει. Στο τέλος πρέπει να περιγράψουν όλη τη διαδικασία με δικά τους λόγια.

Σε επόμενο, ανώτερο επίπεδο εκλέπτυνσης των εννοιών μελετάμε το λόγο δύο ιδίων φυσικών μεγεθών, π.χ. το λόγο L_2/L_1 του ύψους δύο πτιρίων, του μήκους δύο μοχλοβραχιόνων, την κλίμακα ενός γεωμετρικού σχήματος κτλ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αριθμητική τιμή του λόγου χρησιμεύει για *σύγκριση*: δείχνει πόσες φορές το ένα μήκος είναι μεγαλύτερο (ή μικρότερο) από το άλλο.

Κατόπιν, συναντάμε το λόγο δύο *διαφορετικών* φυσικών μεγεθών: μάζα σε γραμμάρια διαιρεμένη με όγκο σε κυβικά εκατοστά· μεταβολή της θέσης σε μέτρα διαιρεμένη με χρονικό διάστημα σε δευτερόλεπτα· δολάρια που πληρώνουμε διαιρεμένα με τις λίρες που αγοράζουμε. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το αποτέλεσμα της διαίρεσης δείχνει ποιο ποσόν του αριθμητική αντιστοιχεί στη *μοναδιαία* ποσότητα του παρονομαστή, οτιδήποτε κι αν παριστάνει αυτός.

Τέλος, αν έχουμε 500 g ενός υλικού του οποίου κάθε κυβικό εκατοστό έχει μάζα 3 g, η αριθμητική τιμή $500/3$ δείχνει πόσα «πακέτα» των 3 g περιέχονται στην ποσότητα των 500 g. Ωστόσο, επειδή κάθε «πακέτο» αντιστοιχεί σε ένα κυβικό εκατοστό, με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ο αριθμός των κυβικών εκατοστών του δείγματος.

1.8 Ασκήσεις στην περιφραστική ερμηνεία

Πολλοί μαθητές έχουν σοβαρή δυσκολία στο να διατυπώσουν περιφραστικά ερμηνείες, όπως εκείνες που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Αυτό, ίσως, οφείλεται στο ότι ποτέ δεν τους ζητήθηκε κάτι τέτοιο. Επειδή, λοιπόν, δεν εξασκούνται σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις, δεν αναζητούν το νόημα των υπολογισμών που εκτελούν. Μάλλον καταφεύγουν στην απομνημόνευση υπολογιστικών μεθόδων με μαθηματικούς τύπους παρά εμβαθύνουν στο νόημα των συλλογισμών. Αποτέλεσμα: όταν βρεθούν σε καταστάσεις που δεν καλύπτονται από όσα έχουν απομνημονεύσει, δεν μπορούν να λύσουν προβλήματα που περιλαμβάνουν διαδοχικά βήματα αριθμητικών συλλογισμών.

Η απλή αναφορά ή η εξήγηση του νοήματος ενός συγκεκριμένου λόγου στους μαθητές (που αντιμετωπίζουν τη δυσκολία που προαναφέραμε) είναι ελάχιστα αποτελεσματική, όσο συχνά και με όση σαφήνεια κι αν γίνεται αυτό. Είναι απαραίτητο να θέτουμε ερωτήσεις που καθοδηγούν τους μαθητές να αρθρώσουν ερμηνείες και επεξηγήσεις με *δικά τους* λόγια. Ιδού ορισμένα χαρακτηριστικά αποσπάσματα από συνομιλίες αυτού του είδους:

Υποθέστε ότι σε μαθητές που δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έν-

νοια της πυκνότητας, θέτουμε το πρόβλημα: «Διαιρούμε τη μετρηθείσα μάζα (340 g) ενός σώματος με τον όγκο του (120 cm^3). Ποιο είναι το νόημα του λόγου $340/120$; Διατυπώστε με τις απλούστερες λέξεις την απάντησή σας». Ορισμένοι θα απαντήσουν: «Αυτή είναι η πυκνότητα». Οι μαθητές αυτοί δεν διακρίνουν την ονομασία του τεχνικού όρου, δηλαδή την ονομασία του αριθμητικού αποτελέσματος, από την περιφραστική ερμηνεία του νοήματός του. (Η συγκεκριμένη περίπτωση αφορά μια σημαντική νοητική διαδικασία που θα την εξετάσουμε σε επόμενο Κεφάλαιο.)

Όταν τους υποδειχθεί ότι η απλή αναφορά της ονομασίας δεν αποτελεί ερμηνεία, ορισμένοι θα πουν ότι πρόκειται για «μάζα ανά όγκο» ή για «τον αριθμό των γραμμαρίων σε 120 κυβικά εκατοστά». (Παρόμοιες απαντήσεις είναι πιθανό να δοθούν για το λόγο της αλλαγής της θέσης προς το χρονικό διάστημα.) Ελάχιστοι μαθητές από όσους έχουν δυσκολίες με το αρχικό πρόβλημα των λόγων θα απαντήσουν απλώς ότι ο συγκεκριμένος αριθμός εκφράζει τον αριθμό των γραμμαρίων σε ένα κυβικό εκατοστό υλικού.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ακολουθήσουμε τη στρατηγική της επιστροφής σε πιο οικείες καταστάσεις: «Υποθέστε ότι σε ένα μαγαζί βρίσκουμε κάποιο κουτί που κοστίζει 5 δολάρια και περιέχει 3 kg ενός αγαθού. Τι σημαίνει ο λόγος $5/3$;» Ορισμένοι μαθητές συνεχίζουν να απαντούν ότι πρόκειται για το ποσόν των χρημάτων που πληρώνουμε για 3 kg. Ωστόσο, σε τούτη την πιο οικεία γι' αυτούς περίπτωση, πολλοί απαντούν ότι με τον συγκεκριμένο λόγο υπολογίζουμε πόσα δολάρια πληρώνουμε για ένα χιλιόγραμμα. (Η πρώτη ομάδα για να οδηγηθεί σε σωστές απαντήσεις έχει ανάγκη περισσότερης συζήτησης με τη χρήση πιο συγκεκριμένων παραδειγμάτων.) Κατόπιν πρέπει να οδηγήσουμε τους μαθητές στη γενίκευση ότι ο συγκεκριμένος λόγος μάς δείχνει ποια ποσότητα του αριθμητή αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή.

Στη συνέχεια θέτουμε το πρόβλημα: «Υποθέστε ότι το κουτί κοστίζει 5 δολάρια και περιέχει 3 kg. Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα έχει νόημα ο λόγος $3/5$;» Πολλοί μαθητές (ακόμη και απ' αυτούς που ερμήνευσαν σωστά το λόγο $5/3$) τώρα αντιμετωπίζουν δυσκολία: Ορισμένοι επαναλαμβάνουν προηγούμενες απαντήσεις, όπως: «πόσα χιλιόγραμμα αγοράζουμε με πέντε δολάρια». Κάποιοι άλλοι θεωρούν ότι η συγκεκριμένη αριθμητική τιμή δεν έχει νόημα ή ότι δεν επιδέχεται ερμηνεία.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι προϋπάρχουν δύο δυσκολίες: 1) Αν και δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να μελετήσουν ή να υπολογίσουν το «μοναδιαίο κόστος» (πόσο πληρώνουμε για ένα χιλιόγραμμα), καθόλου ή σπάνια τους ζητείται το αντίστροφο (πόσο παίρνουμε με ένα δολάριο). 2) ο λόγος $5/3$ περιλαμβάνει τη διαίρεση ενός αριθμού με κάποιο μικρότερό του. Στους περισσότερους μαθητές ο συγκεκριμένος λόγος είναι πιο κατανοητός και φοβίζει λιγότερο από το κλάσμα $3/5$.

Αφού μελετήσουμε το νόημα και των δύο λόγων, επιστρέφουμε σε άλ-

λες περιπτώσεις λόγων (π.χ. μάζα διαιρεμένη με όγκο, μεταβολή της ταχύτητας διαιρεμένη με χρονικό διάστημα) και εκμαιεύουμε τη σωστή ερμηνεία των συγκεκριμένων λόγων και των αντιστρόφων τους. Οπότε μπορούμε πλέον να εκμαιεύσουμε το γενικότερο νόημά τους, ότι δηλαδή οι συγκεκριμένοι λόγοι δείχνουν ποια ποσότητα του αριθμητή αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή. Είναι σημαντικό να αναφέρουν οι μαθητές τον όρο «μοναδιαία ποσότητα»: αν χρησιμοποιήσουν τη λέξη *ανά* δεν είναι βέβαιο ότι έχουν όντως κατανοήσει το νόημα του λόγου (βλ. σχετική συζήτηση στο επόμενο εδάφιο).

1.9 Παρατήρηση στις ασκήσεις περιφραστικής ερμηνείας

Προσέξτε το συμπέρασμα που προέκυψε από τους διαλόγους του προηγούμενου εδαφίου: αν και υπάρχουν ορισμένοι σπουδαστές που επιλύουν επιτυχώς προβλήματα του είδους «αν τρία χιλιογράμια κοστίζουν πέντε δολάρια, να υπολογιστεί το κόστος του ενός χιλιογράμμου», ελάχιστα έχουν ασχοληθεί με τον αντίστοιχο λόγο ούτε τους ζητήθηκε ποτέ να τον ερμηνεύσουν περιφραστικά (δηλαδή, ουδέποτε αντέστρεψαν την πορεία των συλλογισμών τους).

Σύμφωνα με την ορολογία του Piaget, ο όρος «λειτουργία» (operation) σημαίνει διαδικασία συλλογισμών που είναι δυνατό να αντιστραφεί από εκείνον που την ακολουθεί. Οι μαθητές που υπολογίζουν το κόστος της μοναδιαίας ποιότητας, αλλά δεν αντιλαμβάνονται το νόημα του λόγου, δεν μπορούν να αντιστρέψουν την πορεία των συλλογισμών τους. Η συγκεκριμένη διαδικασία, λοιπόν, δεν ανάγεται ακόμα στο επίπεδο κάποιας «λειτουργίας». Καθοδηγώντας τους μαθητές στην αντιστροφή της πορείας των συλλογισμών τους, τους βοηθάμε να αφομοιώσουν όλη τη διαδικασία. (Θα μελετήσουμε γενικότερα τη συγκεκριμένη ιδέα σε επόμενο Κεφάλαιο.)

Το νόημα του λόγου σπάνια αφομοιώνεται με την παρουσίαση μόνο μιας σειράς συλλογισμών, όπως εκείνη που περιγράψαμε. Πολλοί μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στην αντιστροφή των συλλογισμών σε πολλές αλληλοσυμπληρούμενες περιπτώσεις. Λόγου χάρη, ποιο είναι το νόημα του αριθμού που προκύπτει από τη διαίρεση της περιφέρειας ενός κύκλου με τη διάμετρό του; 16 g οξυγόνου ενώνονται με 12 g άνθρακα: ποιο είναι το νόημα των λόγων 16/12 και 12/16; Ένα βαγονάκι εργαστηρίου διανύει 180 cm σε 2,3 s: ποιο είναι το νόημα των λόγων 180/2,3 και 2,3/180 κτλ.; Μόνο τότε αφομοιώνουν το νόημά τους.

Σημαντική παρατήρηση: Ο καθηγητής που δέχεται αδιακρίτως τη χρήση της λέξης «ανά», και ιδιαίτερα την ανακριβή και χωρίς νόημα έκφραση «μάζα ανά όγκο» που προαναφέραμε, έχει πέσει σε παγίδα. Η λέξη *ανά* —αν και αποτελείται μόνο από τρία γράμματα (!)— είναι τεχνικός όρος.

Ελάχιστοι, όμως, μαθητές, από εκείνους που έχουν δυσκολίες με αριθμητικούς συλλογισμούς, γνωρίζουν τι σημαίνει: Την «κολλάνε» στις απαντήσεις τους, μόνο επειδή θυμούνται αόριστα ότι συχνά η συγκεκριμένη λέξη χρησιμοποιείται, για κάποια μυστηριώδη αιτία, στη διαίρεση. Δεν τη «μεταφράζουν», ωστόσο, ρητά με απλούστερες λέξεις, λόγου χάρη «σε», «για κάθε», «αντιστοιχεί σε», «συνδέεται με», «ταιριάζει με», «σχετίζεται με» κτλ.

Ακόμα κι όταν οι μαθητές, ερμηνεύοντας το λόγο M/V , αναφέρουν σωστά ότι πρόκειται για τη «μάζα ανά μονάδα όγκου» και όχι για τη «μάζα ανά όγκο», δεν είναι απολύτως βέβαιο ότι κατανοούν το νόημα της συγκεκριμένης έκφρασης. Ορισμένοι έχουν όντως κατανοήσει τη φράση: οι περισσότεροι, ωστόσο, την έχουν απλώς απομνημονεύσει. Είναι σημαντικό, λοιπόν, πριν δεχτούμε οριστικά τη χρήση της λέξης «ανά», να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να διατυπώσουν απλές ερμηνείες με λέξεις της καθημερινής ζωής².

Πολλοί μαθητές δεν γνωρίζουν τι σημαίνει η λέξη «λόγος». Από την πρώτη στιγμή λοιπόν πρέπει να ρωτάμε τους μαθητές (που δυσκολεύονται να εκτελέσουν συλλογισμούς και να διατυπώσουν ερμηνείες) για το νόημά της, κάθε φορά που αναφέρεται από τα εγχειρίδια ή από τον καθηγητή.

Είναι, επίσης, σημαντικό να επισημάνουμε ότι το νόημα της διαίρεσης υπεισέρχεται στη χρήση της στοιχειώδους άλγεβρας. Συνδέεται, επιπλέον, στενά με τη «μετάφραση» της εκφώνησης ενός προβλήματος σε αλγεβρικές εξισώσεις και αντίστροφα. Θεραπεύοντας, λοιπόν, τις δυσκολίες των μαθητών στην περιφραστική ερμηνεία του λόγου, βοηθάμε τελικά να αναπτύξουν την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν τη στοιχειώδη άλγεβρα.

1.10 Αριθμητικοί συλλογισμοί με τη χρήση της διαίρεσης

Η περιφραστική ερμηνεία που προαναφέραμε (ποια ποσότητα του αριθμητή αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή, οτιδήποτε κι αν παριστάνει αυτός) είναι απλώς το πρώτο βήμα στη διαδικασία διαίρεσης ενός αριθμού με κάποιον άλλο και πρόκειται για ένα μόνον είδος ερμη-

2. Ο Tobias (1988) αναφέρει ένα παρόμοιο πρόβλημα που προέρχεται από την απροσεξία των καθηγητών στη χρήση των λέξεων «του» και «των»: «Ορισμένοι [μαθητές] μπερδεύονταν με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των κλασμάτων. Καθώς μιλούσαν γι' αυτά, άρχισα να αντιλαμβάνομαι ότι υπήρχε κάποια ασάφεια στη χρήση των λέξεων "του" και "των": είχαν διδαχθεί ότι οι συγκεκριμένες λέξεις σε εκφράσεις όπως: "ένα τρίτο των τριών τετάρτων", σημαίνουν πάντοτε πολλαπλασιασμό. Θυμούνταν, όμως, ότι αυτό οδηγεί σε λάθη και σύγχυση. Οι λέξεις "του" και "των" δηλώνουν περισσότερο διαίρεση. Εν μέρει, όμως, είχαν δίκιο: οι λέξεις δηλώνουν, αλλά επίσης, υποδηλώνουν». Η συγκεκριμένη λέξη υποδηλώνει όντως πολλαπλασιασμό, μόνον, όμως, σε περιορισμένη περιοχή των μαθηματικών».

νείας από τα πολλά που υπάρχουν. Το επόμενο ουσιαστικό βήμα γίνεται με ερωτήσεις του είδους: «Έχουμε 800 g υλικού πυκνότητας $2,3 \text{ g/cm}^3$. Πόσο όγκο καταλαμβάνει το υλικό;».

Αρχικά οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν τον τύπο της πυκνότητας: $\rho = M/V$. (Αν ο όρος «πυκνότητα» δεν χρησιμοποιηθεί και πούμε απλώς ότι το υλικό περιέχει 2,3 g σε κάθε κυβικό εκατοστό, οι περισσότεροι μαθητές «τα χάνουν» εντελώς: δεν ξέρουν τι πρέπει να κάνουν όταν δεν διαθέτουν κάποιο τύπο για να τον εφαρμόσουν.) Ερευνώντας τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τον συγκεκριμένο τύπο, αναδεικνύεται εκείνο που ο Piaget θα χαρακτήριζε «συγκεκριμένη λειτουργική» (concrete operational) απάντηση. Σε πολλές περιπτώσεις δεν σκέφτονται αριθμητικά ή αλγεβρικά. Αναδιατάσσουν απλώς τα σύμβολα σαν να είναι συγκεκριμένα αντικείμενα με τα χαρακτηριστικά των οποίων έχουν εξοικειωθεί. Σωστή απάντηση στην ερώτηση δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχουν συλλάβει το νόημα των σχετικών αριθμητικών συλλογισμών³.

Πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να αρθρώσουν μια «ιστορία», όπως η επόμενη: Τι σημαίνει $2,3 \text{ g/cm}^3$; 2,3 είναι ο αριθμός των γραμμαρίων σε ένα κυβικό εκατοστό. Φανταζόμαστε τη συγκεκριμένη ποσότητα σαν συσσωμάτωμα ή πακέτο. Αν βρούμε πόσα τέτοια πακέτα περιέχονται σε 800 g υλικού, προσδιορίζουμε τον συνολικό αριθμό των κυβικών εκατοστών, επειδή κάθε πακέτο αντιστοιχεί σε ένα κυβικό εκατοστό.

Ομοίως, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη διάμετρο ενός κύκλου με περίμετρο 28 cm, πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να ακολουθήσουν τους επόμενους συλλογισμούς: επειδή κάθε «πακέτο» μήκους 3,14 cm της περιφέρειας αντιστοιχεί σε ένα cm της διαμέτρου, πρέπει να βρούμε πόσα «πακέτα» μήκους 3,14 cm περιέχονται στα 28 cm. Η χρήση του τύπου $C = \pi D$, αν και είναι σωστή, δεν εγγυάται ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει το νόημα του αριθμού π ή ότι έχουν συλλάβει τον τρόπο εκτέλεσης των απαραίτητων αριθμητικών συλλογισμών.

Συνήθως, μία μόνο παρουσίαση, όπως η προηγούμενη, δεν θεραπεύει οριστικά το πρόβλημα. Η επανάληψη είναι απαραίτητη· ωστόσο, η επανάληψη χωρίς αλλαγή της μορφής του παραδείγματος ενθαρρύνει απλώς την

3. Πρέπει να επισημανθεί ότι στον κλασικό τρόπο συλλογισμού «με αναλογίες» (λόγου χάρι, το αντικείμενο Α έχει ύψος 8 μονάδες μήκους, αν ως μονάδα μήκους θεωρήσουμε το μήκος ενός μικρού συνδετήρα· το αντικείμενο Β έχει ύψος 12 παρόμοιες μονάδες. Το Α έχει ύψος 6 μονάδες μήκους, αν ως μονάδα μήκους θεωρήσουμε το μήκος ενός μεγαλύτερου συνδετήρα· πόσο είναι το ύψος του Β στις νέες μονάδες;) εμφανίζονται παρόμοια προβλήματα. Πολλοί μαθητές απομνημονεύουν την «απλή μέθοδο των τριών» και χειρίζονται (συχνά ανεπιτυχώς) τα ποσά σαν συγκεκριμένα αντικείμενα. Επαναλαμβάνω: το ορθό αποτέλεσμα δεν αποτελεί βέβαιη απόδειξη ότι οι μαθητές έχουν όντως αφομοιώσει την αντίστοιχη διαδικασία συλλογισμών.

απομνημόνευση. Ένας ικανοποιητικός τρόπος αλλαγής, που οδηγεί σε μη τετριμμένο παράδειγμα, είναι ο εξής: «Ένα αντικείμενο περιέχει 5.000 g υλικού πυκνότητας $2,3 \text{ g/cm}^3$. Υποθέστε ότι προσθέτουμε στο αντικείμενο 800 g από το ίδιο υλικό. Πόσο *αυξάνεται* ο όγκος του αντικειμένου;» (Ομοίως, μπορούμε να τροποποιήσουμε το πρόβλημα με τον κύκλο, προσθέτοντας 28 cm στην αρχική —μεγάλη ή μικρή— περιφέρειά του και υπολογίζοντας τη νέα διάμετρό του.)

Αρχικά, πολλοί μαθητές θεωρούν το πρόβλημα απολύτως διαφορετικό από τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην αρχή. Λόγου χάρη, προχωρούν δύσκολα στο να υπολογίσουν τον όγκο των 5.800 g και να αφαιρέσουν τον όγκο των 5.000 g. Όταν καθοδηγούμενοι αντιληφθούν ότι με το λόγο $800/2,3$ προκύπτει η απάντηση και στα δύο προβλήματα, πραγματοποιούν μεγάλο άλμα στην αφομοίωση της διαδικασίας σχετικών συλλογισμών. Ακόμα μεγαλύτερο άλμα πραγματοποιούν αν αντιληφθούν επίσης ότι το πρόβλημα του κύκλου είναι ακριβώς το ίδιο με το πρόβλημα της πυκνότητας.

Συνοψίζουμε: η χρήση της γλώσσας παίζει ουσιαστικό και θεμελιώδη ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητας για αριθμητικούς συλλογισμούς με τη χρήση λόγων και αναλογιών. Οι Lawson, Lawson και Lawson (1984) υποστηρίζουν ρητά τη συγκεκριμένη άποψη επισημαίνοντας: «Απαραίτητη... προϋπόθεση για την αφομοίωση της διαδικασίας συλλογισμών με αναλογίες, κατά τη διάρκεια της εφηβικής ηλικίας, είναι η αφομοίωση της περιφραστικής ερμηνείας τους». Η έλλειψη της συγκεκριμένης γλωσσικής εμπειρίας είναι σε μεγάλο βαθμό η αιτία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και του «φόβου για τα μαθηματικά» που παρατηρούμε στο λύκειο. Ο ρυθμός διοχέτευσης αυτής της εμπειρίας σε προχωρημένο επίπεδο δεν πρέπει απαραίτητα να είναι υψηλότερος από το ρυθμό σε χαμηλότερο επίπεδο. Για να θεραπευτεί το πρόβλημα, πρέπει εμείς οι ίδιοι οι καθηγητές των πανεπιστημίων να δημιουργήσουμε δασκάλους που θα έχουν αφομοιώσει σε βάθος τη διαδικασία εκτέλεσης αριθμητικών συλλογισμών. Έτσι θα μπορούν να καθοδηγήσουν τους μαθητές να αρθρώσουν με δικά τους λόγια συλλογισμούς και επεξηγήσεις. Σήμερα, αυτό δεν το έχουμε πετύχει σε μεγάλο βαθμό.

1.11 Σύνδεση των αριθμητικών συλλογισμών με τις γραφικές παραστάσεις

Όταν οι μαθητές παρακολουθούν πώς εφαρμόζονται διαφορετικοί τρόποι συλλογισμών στην ίδια περίπτωση, ωφελούνται σημαντικά στην αφομοίωση της μεθόδου. Εκτός από τους αριθμητικούς συλλογισμούς, λοιπόν, οι γραφικές παραστάσεις είναι μια πολύ χρήσιμη εναλλακτική προ-

σέγγιση. Λόγου χάρι, θεωρήστε τις γραφικές παραστάσεις του Σχ. 1.11.1.

Δεν είναι σκόπιμο, για να θεραπεύσουμε ταχύτερα τις αδυναμίες των μαθητών, να τους παρουσιάσουμε όλες αυτές τις γραφικές παραστάσεις μαζί. Πρέπει να τις παρουσιάζουμε φυσιολογικά σε προβλήματα για το σπίτι, ενταγμένες στο κεφάλαιο που διδάσκεται εκείνη τη στιγμή. Η εν λόγω τακτική επιτρέπει τη σπειροειδή επανάληψη ενός τρόπου σκέψης σε τυχαία χρονικά διαστήματα. Τόσο η σπειροειδής επανάληψη όσο και η κατανομή στο χρόνο είναι απαραίτητες για την ουσιαστική αφομοίωση. Σε κάθε επαφή οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύουν τις παραστάσεις με δικά τους λόγια.

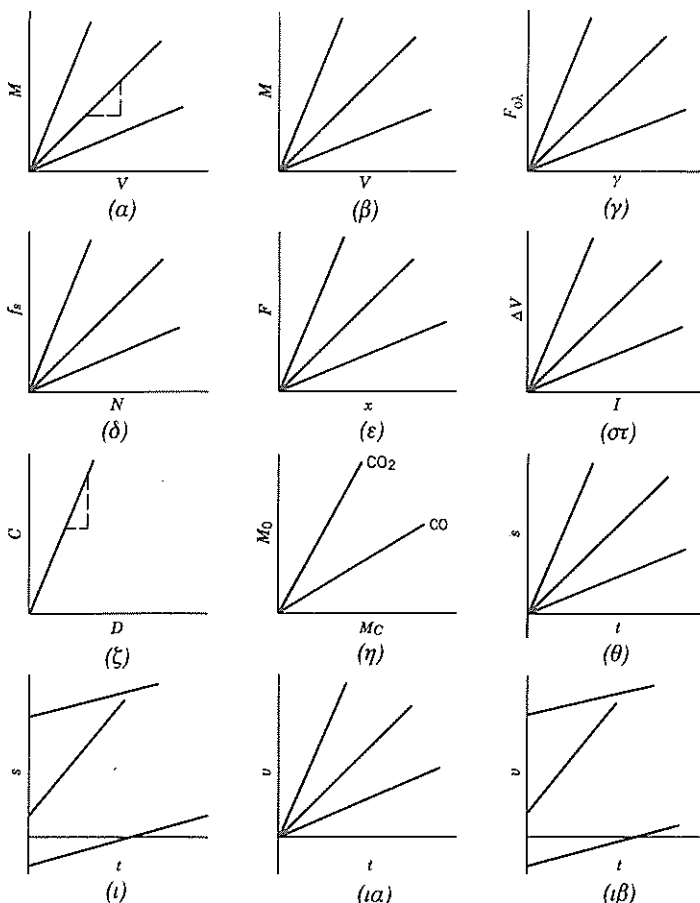
Λόγου χάρι:

1. Στο Σχ. 1.11.1α κάθε ευθεία αντιστοιχεί σε διαφορετικό υλικό. Η κλίση της αντιστοιχεί στην τιμή του λόγου M/V και ερμηνεύεται ως ο αριθμός των γραμμαρίων σε ένα κυβικό εκατοστό (η μάζα μετρείται σε γραμμάρια και ο όγκος σε κυβικά εκατοστά). Αν η γραφική παράσταση της σχέσης δύο μεγεθών είναι ευθεία γραμμή, τότε κάθε φορά που το μέγεθος στον οριζόντιο άξονα μεταβάλλεται κατά ίσες μεταξύ τους ποσότητες, το μέγεθος στον κατακόρυφο άξονα μεταβάλλεται επίσης κατά ίσες μεταξύ τους ποσότητες. Αν η γραφική παράσταση δεν είναι ευθεία, οι μεταβολές του μεγέθους στον κατακόρυφο άξονα δεν είναι μεταξύ τους ίσες.

2. Η κλίση της συγκεκριμένης ευθείας συνήθως αποτελεί ιδιότητα του αντικειμένου ή του συστήματος που περιγράφουμε. Στο Σχ. 1.11.1α η αντίστοιχη ιδιότητα ονομάζεται «πυκνότητα του υλικού», στο (β) «συγκέντρωση του διαλύματος», στο (γ) «αδρανειακή μάζα του σώματος», στο (δ) «συντελεστής τριβής μεταξύ δύο επιφανειών» κτλ.

3. Επειδή σε κάθε σώμα ή σύστημα η εν λόγω ιδιότητα έχει τη δική της αριθμητική τιμή, σε διαφορετικό σώμα αντιστοιχεί διαφορετική ευθεία. Ωστόσο, στο Σχ. 1.11.1η εμφανίζεται το αξιοσημείωτο γεγονός ότι η κλίση 3,14 που συμβολίζεται με το π , είναι μια ιδιότητα που έχουν όλοι οι κύκλοι: για όλους τους κύκλους υπάρχει μόνο μία ευθεία γραμμή!

4. Τα προβλήματα του εδαφίου 1.10 (που περιλαμβάνουν αριθμητικούς συλλογισμούς με τη χρήση της έννοιας της πυκνότητας και του π) είναι δυνατό να παρασταθούν και να ερμηνευθούν με τα Σχ. 1.11.1α και 1.11.1η. Πρέπει, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να εκτελέσουν αυτή τη μελέτη. Για τον υπολογισμό του συνολικού όγκου ενός σώματος, όταν γνωρίζουμε τη μάζα του και την πυκνότητά του, ή για τον υπολογισμό της διαμέτρου ενός κύκλου, όταν γνωρίζουμε την περιμέτρό του, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τμήμα της αντίστοιχης ευθείας από την αρχή των αξόνων έως τη συγκεκριμένη τιμή της μάζας ή της περιμέτρου. Ο υπολογισμός του όγκου που προστίθεται στο σώμα ή η αύξηση της διαμέτρου του κύκλου παριστάνεται με τα μικρά τρίγωνα στα αντίστοιχα σχήματα. Η συγκεκριμένη διαδικασία βοηθά να αφομοιώσουν οι μαθητές ότι δεδομένη αλλαγή στον



Σχήμα 1.11.1 Γραμμικές σχέσεις και αριθμητικοί συλλογισμοί: (α) η ολική μάζα M τριών ομογενών σωμάτων διαφορετικού υλικού ως προς τον όγκο τους V : (β) η ολική μάζα M της διαλυμένης ουσίας τριών διαλυμάτων διαφορετικής συγκέντρωσης ως προς τον ολικό όγκο V του διαλύτη (τα διαλύματα περιέχουν ίδια διαλυμένη ουσία και ίδιο διαλύτη): (γ) η ολική δύναμη $F_{ολ}$ ως προς την επιτάχυνση γ τριών διαφορετικών αντικειμένων διαφορετικής μάζας που κινούνται ευθύγραμμα: (δ) η μέγιστη στατική δύναμη τριβής $T_{στ}$ ως προς την κάθετη δύναμη N για ολίσθηση μεταξύ τριών διαφορετικών ζευγών επιφανειών: (ε) η ασκούμενη δύναμη F ως προς την προκύπτουσα επιμήκυνση x τριών διαφορετικών ελατηρίων που ικανοποιούν το νόμο του Hooke: (σ) η διαφορά δυναμικού ΔV ως προς το ρεύμα I για τρεις διαφορετικούς ηλεκτρικούς αγωγούς που ικανοποιούν το νόμο του Ohm: (ζ) η περιμέτρος C προς τη διάμετρο D κάθε κύλινδρου: (η) η ολική μάζα M_0 του οξυγόνου προς την ολική μάζα M_C του άνθρακα σε δείγματα διοξειδίου και μονοξειδίου του άνθρακα: (θ) ευθύγραμμη κίνηση: η θέση s τριών διαφορετικών αντικειμένων ως προς τη χρονομετρική ένδειξη t : τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θέση s είχε τιμή μηδέν: (ι) ευθύγραμμη κίνηση: η θέση s τριών διαφορετικών αντικειμένων ως προς τη χρονομετρική ένδειξη t : τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θέση s κάθε αντικειμένου είχε διαφορετική τιμή: (ια) ευθύγραμμη κίνηση: η στιγμιαία ταχύτητα v τριών αντικειμένων ως προς τη χρονομετρική ένδειξη t τα αντικείμενα τη χρονική στιγμή $t = 0$ είχαν μηδενική ταχύτητα: (ιβ) ευθύγραμμη κίνηση: στιγμιαία ταχύτητα v τριών αντικειμένων ως προς τη χρονομετρική ένδειξη t τα αντικείμενα τη χρονική στιγμή $t = 0$ είχαν διαφορετική ταχύτητα.

οριζόντιο άξονα προκαλεί αντίστοιχη σταθερή αλλαγή στον κατακόρυφο (ανεξάρτητα από το αν η «ολίσθηση» αρχίζει από την αρχή των αξόνων ή από τυχαίο σημείο του οριζόντιου άξονα).

Το παράδειγμα που ακολουθεί βοηθά τους μαθητές να αφομοιώσουν την ιδέα που προαναφέραμε: Φανταστείτε μια κλωστή γύρω από τον ισημερινό της Γης η οποία σχηματίζει κύκλο με περίμετρο 40.700 km. Αν αυξήσουμε την περίμετρο κατά 6 cm, πόσο θα *αυξηθεί* η διάμετρος του κύκλου; Πόσο θα *αυξηθεί* η διάμετρος ενός κύκλου με αρχική περίμετρο 8 cm, αν προσθέσουμε στην περίμετρο 6 m;

5. Η αντιπαράβολή της γραφικής παράστασης 1.11.1θ με την 1.11.1ι και της 1.11.1ια με την 1.11.1ιβ αποτελεί άσκηση με αριθμητικούς συλλογισμούς σε απολύτως διαφορετικό πλαίσιο. Από την αντιπαράβολή συμπεραίνουμε ότι κάθε γραμμική σχέση δεν αντιστοιχεί πάντοτε σε ευθεία αναλογία. Ελάχιστοι μαθητές έχουν αντιληφθεί σαφώς τη διάκριση αυτή. Επιπλέον, πολλά εγχειρίδια και καθηγητές συντείνουν στη σύγχυση χρησιμοποιώντας απερίσκεπτα την ορολογία.

Ο συνδυασμός των μεθόδων συλλογισμού που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 1.10, παράλληλα με τις γραφικές παραστάσεις του παρόντος εδαφίου, η ανάδειξη της μεταξύ τους σχέσης και η περιγραφή από τους μαθητές με δικά τους λόγια της εκάστοτε διαδικασίας βοηθά τους μαθητές. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές αναπτύσσουν και συλλαμβάνουν τη μέθοδο εκτέλεσης συλλογισμών με τη χρήση της διαίρεσης. Μαθαίνουν, επίσης, να ερμηνεύουν τις ευθείες στις γραφικές παραστάσεις. Πρέπει, ωστόσο, να τονισθεί ότι μεταξύ των δύο προσεγγίσεων δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη σχέση.

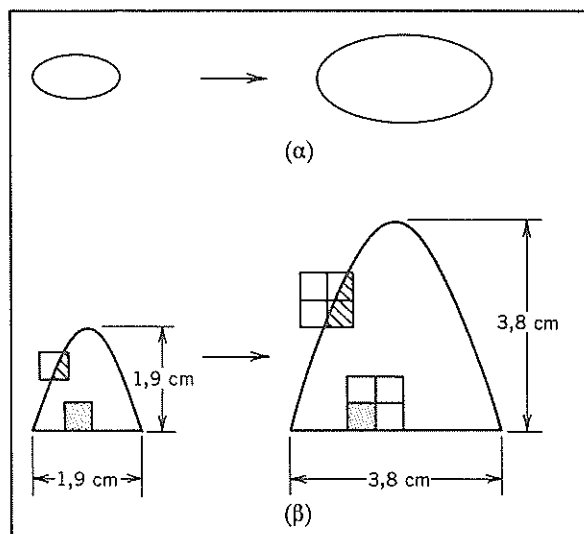
1.12 Αλλαγή κλίμακας και συλλογισμοί με συναρτήσεις

Υποθέστε ότι διπλασιάζουμε τις γραμμικές διαστάσεις ενός ανδριάντα: Πώς μεταβάλλεται η περίμετρος του μπράτσου; Η διατομή του ποδιού; Η συνολική επιφάνειά του; Ο όγκος του καλουπιού που χρειάζεται για την κατασκευή του; Οι περισσότεροι μαθητές –ακόμη και αυτοί που προσορίζονται για μηχανικοί ή φυσικοί– αντιμετωπίζουν σοβαρή δυσκολία με τις προηγούμενες ερωτήσεις, ιδιαίτερα όταν ο συντελεστής κλίμακας δεν είναι ακέραιος. Πολλοί εικάζουν, χωρίς ιδιαίτερη σκέψη ή ανάλυση, ότι η επιφάνεια και ο όγκος αυξάνονται με τον *ίδιο* γραμμικό συντελεστή. Δεν μπορούν να χειριστούν μόνο του το λόγο που χαρακτηρίζει την αλλαγή της κλίμακας, χωρίς να γνωρίζουν τις πραγματικές αρχικές διαστάσεις του αντικειμένου. Επειδή δεν διαθέτουν κάποιο σχετικό μαθηματικό τύπο για τον εμβαδόν και τον όγκο, δεν ξέρουν τι πρέπει να κάνουν.

Δύο κύριες δυσκολίες κρύβονται πίσω από την αδυναμία αυτή. Μελετήσαμε ήδη τη μία στα εδάφια 1.2 και 1.3: δεν βοηθάμε τους μαθητές να

διατυπώσουν με σαφήνεια τον λειτουργικό ορισμό του «εμβαδού» και του «όγκου». Η άλλη δυσκολία αφορά το ότι λίγοι μαθητές έχουν σχηματίσει κάποια εικόνα της θεμελιώδους *συναρτησιακής* σχέσης μεταξύ της επιφάνειας ενός σώματος και των γραμμικών διαστάσεών του, και μεταξύ του όγκου του και των γραμμικών διαστάσεών του. Η απομνημόνευση και η χρήση μαθηματικών τύπων που αναφέρονται σε κανονικά σχήματα δεν βοηθά στο σχηματισμό της εικόνας. Αποτέλεσμα: οι μαθητές αγνοούν ότι το εμβαδόν μεταβάλλεται πάντοτε ανάλογα με το τετράγωνο του συντελεστή αλλαγής των γραμμικών διαστάσεων, ενώ ο όγκος ανάλογα με τον κύβο του συντελεστή (ανεξάρτητα από την κανονικότητα ή μη του σχήματος και από την ύπαρξη ή μη κάποιου μαθηματικού τύπου).

Ακόμη κι αν κατέχουν αόριστα τις σχετικές συναρτησιακές σχέσεις, δεν μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν όταν υπεισέρχεται η έννοια του λόγου. Δεν έχουν κατανοήσει τη διαδικασία που οι ώριμοι επιστήμονες και οι μηχανικοί ονομάζουν «αλλαγή κλίμακας». Η θεραπεία επιτυγχάνεται αν συμπληρωθούν καταρχάς τα κενά που περιγράψαμε στα προηγούμενα εδάφια. Κατόπιν, πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν τι συμβαίνει στα μοναδιαία τετράγωνα, όταν οι διαστάσεις ενός τυχαίου επιπέδου σχήματος διπλασιάζονται. Όπως φαίνεται στο Σχ. 1.12.1, κάθε μοναδιαίο τετράγωνο στο μικρό σχήμα, αφού διασταλεί, καλύπτει τέσσερα μοναδιαία τετράγωνα στο μεγάλο σχήμα (είτε βρίσκεται στο εσωτερικό του σχήματος είτε κατά μήκος της περιμέτρου του). Όταν η κλίμακα ελαττώνεται, συμβαίνει το αντίστροφο. Οι μαθητές πρέπει, επίσης, να σχεδιάσουν τι



Σχήμα 1.12.1 Δύο διαφορετικά επίπεδα σχήματα οι γραμμικές διαστάσεις των οποίων έχουν διπλασιαστεί. Στην περίπτωση (β) είναι φανερό ότι κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του μικρού σχήματος «απλώνεται» σε τέσσερα μοναδιαία τετράγωνα του μεγάλου σχήματος· αυτό συμβαίνει σε όλη την έκταση του σχήματος, συμπεριλαμβανομένης της περιόχης κοντά στο περιγράμματό του.

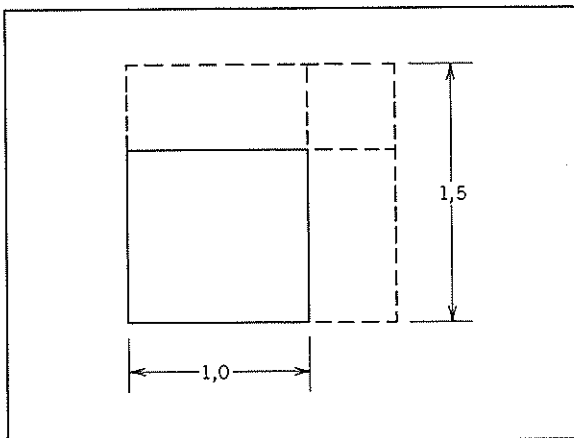
συμβαίνει όταν ο συντελεστής κλίμακας δεν είναι 2, αλλά 3 ή 4.

Πολλοί μαθητές, που δυσκολεύονται να επεκτείνουν τη συγκεκριμένη ιδέα σε κλασματικούς συντελεστές κλίμακας, πρέπει να καθοδηγηθούν να σχεδιάσουν το Σχ. 1.12.2, όταν οι διαστάσεις αυξάνονται με συντελεστή 1,5. Μετρώντας το πλήθος των τετραγώνων, πείθονται ότι το εμβαδόν αυξάνεται με συντελεστή $(1,5)^2/1$, επειδή στο μεγεθυμένο σχήμα υπάρχουν 2,25 μοναδιαία τετράγωνα.

Κατόπιν, πρέπει να επεκτείνουμε τους συλλογισμούς στις τρεις διαστάσεις και να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να γενικεύσουν τη συναρτησιακή σχέση, ώστε να περιγράψουν τη μεταβολή του όγκου με τη βοήθεια της κυβικής συνάρτησης. Μπορούμε να δώσουμε ασκήσεις, όπου τα εμβαδά και οι όγκοι μεγεθύνονται ή σμικρύνονται, αλλά και το αντίστροφο: αν δοθεί ο συντελεστής αλλαγής κλίμακας του εμβαδού, πόσος είναι ο αντίστοιχος συντελεστής του μήκους και του όγκου; Οι περισσότερες μαθητές έχουν αρχικά τεράστια δυσκολία με την τελευταία ερώτηση: επειδή πρέπει να χρησιμοποιήσουν ρίζες αντί δυνάμεις, δυσκολεύονται σοβαρά.

Αν εκτελέσουμε τις ασκήσεις στην αρχή του μαθήματος και σε σύντομο χρονικό διάστημα, αφιερωμένο αποκλειστικά στη θεραπεία των συγκεκριμένων δυσκολιών, και αν στις ασκήσεις χρησιμοποιούμε απλώς τις έννοιες «εμβαδόν» και «όγκος», χωρίς να τις συνδέουμε με συγκεκριμένα αντικείμενα, χωρίς να επαναλαμβάνουμε τον λειτουργικό ορισμό τους και χωρίς να εντάσσουμε τις ασκήσεις σε ευρύτερο πλαίσιο, η μάθηση επιτυγχάνεται ελάχιστα: οι μαθητές απομνημονεύουν προς στιγμήν τη διαδικασία των σχετικών υπολογισμών και σύντομα την ξεχνούν.

Είναι σημαντικό να επανερχόμαστε από καιρό σε καιρό στην έννοια της αλλαγής κλίμακας σε μεμονωμένες περιπτώσεις. Οι μαθητές εφαρμό-



Σχήμα 1.12.2 Όταν οι γραμμικές διαστάσεις ενός τετραγώνου μεγεθύνονται κατά έναν παράγοντα 1,5, το νέο τετράγωνο περιέχει 2,25 αρχικά τετράγωνα.

ζουν την έννοια αυτή στις εξής περιπτώσεις: όταν μελετούν το ρόλο του λόγου της επιφάνειας προς τον όγκο στον προσδιορισμό της διαλυτότητας ή στη σύγκριση του ρυθμού μεταβολισμού μεταξύ διαφορετικών κυττάρων ή μεταξύ των μεγάλων και των μικρών ζώων· όταν παρατηρούν ότι τα οστά των ποδιών του ελέφαντα έχουν δυσανάλογα μεγαλύτερη διάμετρο από του αλόγου (επειδή υποβαστάζουν μεγαλύτερο βάρος)· όταν αντιμετωπίζουν ερωτήματα του είδους «πώς μεταβάλλεται η πυκνότητα ενός αερίου που περιέχεται σε κάποιο μπαλόνι, αν οι γραμμικές διαστάσεις του μπαλονιού διπλασιαστούν, χωρίς να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε αέριο;» κτλ.

Καθώς καλύπτουμε όλο και περισσότερη ύλη φυσικής, μπορούμε να επεκτείνουμε τους συλλογισμούς στους οποίους χρησιμοποιούμε λόγους σε άλλες πιο αφηρημένες συναρτησιακές σχέσεις:

Σώμα δεμένο στην άκρη νήματος εκτελεί οριζόντια κυκλική κίνηση. Αν η γωνιακή ταχύτητα του σώματος αυξηθεί κατά έναν παράγοντα 1,6 και τα υπόλοιπα μεγέθη παραμείνουν σταθερά, πώς μεταβάλλεται η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο σώμα; Πώς πρέπει να μεταβάλουμε τη γραμμική ταχύτητα για να ελαττωθεί η κεντρομόλος δύναμη κατά έναν παράγοντα 2; Αν η μάζα του σώματος και η ακτίνα του κύκλου τριπλασιαστούν ταυτόχρονα, χωρίς να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα, πώς μεταβάλλεται η κεντρομόλος δύναμη; Αν η γραμμική ταχύτητα διπλασιαστεί, πώς πρέπει να μεταβάλουμε την ακτίνα για να μη μεταβληθεί η κεντρομόλος δύναμη;

Αν το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάποιο μοχλοβραχίονα μειωθεί κατά έναν παράγοντα 2,3, πώς πρέπει να μεταβάλουμε το μήκος του μοχλοβραχίονα για να μη μεταβληθεί η ροπή;

Αν κατά την αλληλεπίδραση δύο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων το ένα φορτίο αυξηθεί κατά έναν παράγοντα 3,5, πώς πρέπει να μεταβάλουμε την απόσταση μεταξύ των φορτίων για να μη μεταβληθεί η δύναμη;

Στα προηγούμενα παραδείγματα οι μαθητές αρχικά αντιδρούν έντονα στο να σκεφτούν με τη βοήθεια λόγων και συναρτησιακών σχέσεων. Θέλουν να γνωρίζουν τις αρχικές τιμές που θα αντικαταστήσουν στους μαθηματικούς τύπους. Έτσι, δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουν λόγους για να αποφασίσουν αν η ζητούμενη ποσότητα θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί. Μπορούμε να κάμψουμε την αντίδρασή τους μόνο με επαναλαμβανόμενες αναλύσεις και ασκήσεις. Οι καθηγητές του λυκείου γνωρίζουν καλά ότι ακόμα και οι καλοί μαθητές που προορίζονται για μηχανικοί ή φυσικοί έχουν, όπως και οι υπόλοιποι, σοβαρή αδυναμία στο να αντιληφθούν και να

εκτελέσουν συλλογισμούς με λόγους. Η αιτία είναι πολύ απλή: οι μαθητές εξασκούνται ελάχιστα ή καθόλου στον συγκεκριμένο τρόπο σκέψης· η αντίστοιχη ικανότητα, ωστόσο, δεν αναπτύσσεται αυθόρμητα. Όταν το κατορθώνουν (ύστερα, όμως, από συνεχείς επαναλήψεις), η αυτοπεποίθηση και ο αυτοσεβασμός τους αυξάνονται καταπληκτικά. Αυξάνεται, συνεπώς, και ο ρυθμός προόδου τους.

Ορισμένοι καθηγητές ίσως θυμούνται πόσο όμορφα ήταν γραμμένο το 1ο μέρος του βιβλίου «PSSC Physics»*, που υπήρχε μόνο στις δύο πρώτες εκδόσεις του: Περιείχε μια περίφημη επισκόπηση όλων των θεμάτων που αναπτύσσονταν στη συνέχεια του βιβλίου. Το συγκεκριμένο μέρος του βιβλίου ήταν «διαποτισμένο» με την έννοια της αλλαγής κλίμακας και του λόγου. Θεωρήθηκε, ωστόσο, «αποτυχία» και στις επόμενες εκδόσεις αφαιρέθηκε ως πρωθύστερο και αρκετά εξεζητημένο. Ανατρέχοντας στο συγκεκριμένο ζήτημα, έχω καταλήξει ότι το πρόβλημα δεν ήταν τόσο το περιεχόμενο του 1ου μέρους, όσο το ότι ούτε οι μαθητές ούτε οι καθηγητές ήταν έτοιμοι να εκτελέσουν τους συλλογισμούς με λόγους που υπεισέρχονται στην αλλαγή κλίμακας και στην προσεγγιστική εκτίμηση μεγεθών. Οι συγκεκριμένοι συλλογισμοί «διαπότιζαν» αυτό το τμήμα του βιβλίου. Το περιεχόμενό του, ωστόσο, ήταν αδιαφανές γι' αυτούς, επειδή δεν μπορούσαν να παρακολουθήσουν τους συλλογισμούς.

Αν δεν βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν το συγκεκριμένο εμπόδιο, δεν θα μπορέσουν ποτέ να εκτελέσουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς, αναλύσεις και προβλέψεις της τάξης ενός μεγέθους: η συγκεκριμένη πορεία συλλογισμών περιλαμβάνει συνήθως λόγους, αλλαγή κλίμακας και συναρτησιακές σχέσεις. Συχνά ακούμε παράπονα ότι ακόμα και απόφοιτοι φυσικοί ή μεταπτυχιακοί σπουδαστές έχουν σοβαρές δυσκολίες με τον συγκεκριμένο τρόπο συλλογισμών. Πράγματι, έχουν ελλείψεις· το συγκεκριμένο γεγονός, όμως, οφείλεται στο ότι ουσιαστικά ουδέποτε εξασκήθηκαν. (Στο εδάφιο 11.5 υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές με ασκήσεις και προβλήματα για την εκτίμηση μεγεθών.)

1.13 Στοιχεία τριγωνομετρίας

Αν σε και σε ανώτερο μαθηματικό επίπεδο το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη μιας γωνίας θεωρούνται συναρτήσεις, οι μαθητές τα συναντούν για πρώτη φορά και τα χρησιμοποιούν απλώς ως λόγους πλευρών

* PSSC είναι τα αρχικά του τίτλου της επιτροπής Physical Science Study Committee (Επιτροπή Μελέτης των Φυσικών Επιστημών). Υπό την αιγίδα της επιτροπής πριν από αρκετά χρόνια εκδόθηκε το βιβλίο «PSSC Physics». Από τότε έχει επανεκδοθεί αρκετές φορές. Το βιβλίο έχει εκδοθεί και στα ελληνικά από το Ίδρυμα Ευγενίδου. (Σ.τ.μ.)

ορθογωνίων τριγώνων. Απομνημονεύουν με κόπο τους συνηθισμένους ορισμούς και τους χρησιμοποιούν ως μαθηματικούς τύπους: τους αναδιατάσσουν με αλγεβρικές πράξεις, κάθε φορά που χρειάζεται να εκτελέσουν υπολογισμούς σε ορθογώνια τρίγωνα.

Σ' αυτό το επίπεδο η συναρτησιακή γενίκευση είναι περιττή και δεν βοηθά. Αρχικά, πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν τα ημίτονα και τα συνημίτονα απλώς ως *κλάσματα*: Αν πολλαπλασιάσουν την υποτείνουσα με τα συγκεκριμένα κλάσματα, προκύπτει αντίστοιχα το μήκος της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία και το μήκος της προσκείμενης πλευράς. Αυτό διευρύνει την αντίληψη των μαθητών, επειδή τους παρέχει μια εναλλακτική άποψη για το νόημα των όρων «ημίτονο» και «συνημίτονο». Τους βοηθά να συσχετίσουν τους τριγωνομετρικούς ορισμούς με τα μήκη των πλευρών — το είδος της σκέψης που δεν εκτελούν όταν αναδιατάσσουν μηχανικά και αφηρημένα τους μαθηματικούς τύπους. Η διεύρυνση της αντίληψης, ωστόσο, σπάνια επιτυγχάνεται αυθόρμητα. Πρέπει να επάγεται από τον καθηγητή. Αυτό είναι αποκλειστικά αποτέλεσμα εξάσκησης και εμπειρίας, που είναι δυνατό να αποκτηθεί άμεσα με τη βοήθεια μικροϋπολογιστή.

Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν σαφώς ότι σε ένα επιπλέον θέμα της τριγωνομετρίας, τη μέτρηση με ακτίνια, οι μαθητές —ακόμα κι αν έχουν διδαχθεί το σχετικό θέμα στο γυμνάσιο— αντιμετωπίζουν σοβαρή δυσκολία. Έχουν χρησιμοποιήσει σπάνια ή καθόλου τα ακτίνια με ουσιαστικό τρόπο. Συνήθως απομνημονεύουν παροδικά κάποιο σχετικό ορισμό και τον χρησιμοποιούν σε τετριμμένες ασκήσεις μετατροπής ακτινίων σε μοίρες και αντίστροφα. Και αυτό, χωρίς να τους έχει επιδειχθεί *γιατί* ο συγκεκριμένος αδιάστατος τρόπος μέτρησης γωνιών είναι χρήσιμος, σημαντικός, ακόμα και απαραίτητος. Η δυσκολία θεραπεύεται καλύτερα όχι στο ακαθόριστο πλαίσιο μιας «επανάληψης» στην αρχή του μαθήματος, αλλά αν αναδειχθεί η αναγκαιότητα της μέτρησης με ακτίνια, όταν συναντάμε κατάλληλο θέμα στην πορεία του μαθήματος. Θα μελετήσουμε, λοιπόν, λεπτομερέστερα το θέμα στο 4ο Κεφάλαιο, που αφορά την κίνηση σε δύο διαστάσεις.

1.14 Οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση – Βορράς και νότος – Μεσημέρι και μεσονύκτιο

Ελάχιστοι μαθητές μπορούν να δώσουν κάποιον απλό λειτουργικό ορισμό των όρων που αναφέρονται στον τίτλο του εδαφίου. Αν ρωτήσετε τους μαθητές «Τι σημαίνει κατακόρυφος; Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατακόρυφη διεύθυνση εδώ όπου βρισκόμαστε;», συνήθως απαντούν: «Κάθετα στο έδαφος». Τότε, αν τους προτείνετε να ανέβουν σε μια απότο-

μη πλαγιά, που βρίσκεται εκεί κοντά, και να σύρουν την κάθετο στο έδαφος, αναγνωρίζουν πως υπάρχει ασυνέπεια: σπάνια, ωστόσο, διακρίνουν κάποια διεξοδό. Χρειάζονται λίγα λεπτά υποδείξεων και συζητήσεων, για να καταλήξουν ότι πρέπει να κρεμάσουν στην άκρη ενός νήματος ένα βαρίδι και να κατασκευάσουν νήμα της στάθμης. Σήμερα, λίγοι μαθητές έχουν ακούσει τον όρο «νήμα της στάθμης» ή γνωρίζουν τι σημαίνει. Δεν γνωρίζουν καλά καλά τη σημασία του όρου «στάθμη».

Διαφορετική, πιο περίπλοκη ωστόσο, προσέγγιση είναι η εξής: με τη βοήθεια του αλφαδιού που χρησιμοποιούν οι μαραγκοί βρίσκουμε την οριζόντια διεύθυνση και φέρνουμε την κάθετο στη διεύθυνση αυτή. Σπάνια, όμως, οι μαθητές προτείνουν αυτή την προσέγγιση.

Παρόμοιες συζητήσεις πρέπει να γίνουν και για τις υπόλοιπες έννοιες που παρατίθενται πιο πάνω. Αν ρωτήσετε: «Πώς προσδιορίζεται ο νότος σε έναν τόπο;», οι μαθητές επικαλούνται τη μαγνητική πυξίδα σαν να πρόκειται για βασικό ορισμό. Δεν συνδέουν το «νότο» ούτε με τον ουράνιο πόλο ούτε με την κατεύθυνση της βραχύτερης σκιάς που «ρίχνει» μια κατακόρυφη ράβδος. Αν ρωτήσετε: «Πότε είναι μεσημέρι σε δεδομένο τόπο;», οι περισσότεροι απαντούν: «Όταν ο Ήλιος βρίσκεται ακριβώς από πάνω μας». Δεν ανησυχούν καθόλου για το ότι στο γεωγραφικό πλάτος που κατοικούν οι περισσότεροι, ουδέποτε ο Ήλιος περνά από το ζενίθ. Καθοδηγώντας τους, λοιπόν, να αντιληφθούν το συγκεκριμένο γεγονός, αντιλαμβάνονται στη συνέχεια ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη σκιά της κατακόρυφης ράβδου για να προσδιορίσουν με απλό τρόπο το μέγιστο ύψος του Ηλίου κτλ.

Επισημαίνω πάλι ότι οι συγκεκριμένες συζητήσεις είναι αναποτελεσματικές στο πλαίσιο μιας επανάληψης στην αρχή του μαθήματος. Οι όροι εντυπώνονται καλύτερα στους μαθητές αν αναζητήσουν το νόημά τους στο πλαίσιο συγκεκριμένου προβλήματος, μελέτης ή κεφαλαίου. Οι συγκεκριμένοι όροι είναι τόσο κοινοί και οι μαθητές τους επικαλούνται τόσο συχνά, ώστε δεν συνειδητοποιούν ότι στην πραγματικότητα αγνοούν το νόημά τους. Η αναγκαιότητα επανεξέτασης του απλού λειτουργικού ορισμού τέτοιων συνηθισμένων όρων φαίνεται βαρετή· αποτελεί, ωστόσο, ευεργετική πνευματική εμπειρία.

1.15 Η ερμηνεία απλών αλγεβρικών εκφράσεων

Ο Lochhead, ο Clement και οι συνεργάτες τους, στο Πανεπιστήμιο Amherst της Μασαχουσέτης, μελέτησαν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλά άτομα στο να μεταφράσουν απλές αλγεβρικές διατυπώσεις σε εξισώσεις και το αντίστροφο. [Βλ. Clement, Lochhead και Monk (1981)· Rosnick και Clement (1980).] Λόγου χάρη, αντιμετωπίζουν δυσκολία στην

άσκηση: «Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Φ και K , γράψτε την εξίσωση που αντιστοιχεί στη διατύπωση: Στο πανεπιστήμιό μας, οι φοιτητές είναι έξι φορές περισσότεροι από τους καθηγητές».

Οι Clement, Lochhead και Monk αναφέρουν: «Σε γραπτό τεστ, στο οποίο συμμετείχαν 150 φοιτητές (που είχαν γνώσεις άλγεβρας), το 37% δεν έλυσε την άσκηση. Στα τρία τέταρτα των λανθασμένων απαντήσεων, η απάντηση ήταν $6\Phi=K$, ήταν, δηλαδή, αντίστροφη της ορθής. Σε δείγμα 47 φοιτητών, που δεν φοιτούσαν σε τμήματα θετικών επιστημών και είχαν γνώσεις άλγεβρας λυκείου, το ποσοστό αποτυχίας ήταν 57%».

Ίσως σπεύσουμε να συμπεράνουμε ότι το ποσοστό αποτυχίας οφείλεται στο ότι οι σπουδαστές βιάζονταν να μεταφράσουν το πρόβλημα και δεν έδειχναν την απαιτούμενη προσοχή. Οι ερευνητές (παίρνοντας αναλυτικές συνεντεύξεις από τους σπουδαστές και τροποποιώντας τη μορφή του προβλήματος) απέδειξαν, ωστόσο, ότι οι σπουδαστές έδιναν συστηματικά την ίδια λανθασμένη αντίστροφη απάντηση και επέμεναν σ' αυτήν. Λόγου χάρι, απαντούσαν με παρόμοιο τρόπο όταν τους ζητούσαν να μεταφράσουν εικόνες σε εξισώσεις ή αριθμητικά δεδομένα σε εξισώσεις.

Από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι οι σπουδαστές έκαναν δύο λάθη στον τρόπο συλλογισμού τους: 1) ορισμένοι τοποθετούσαν τα σύμβολα Φ και K , στην εξίσωση $6\Phi=K$, με την ίδια σειρά που αναφέρονταν τα αντίστοιχα μεγέθη στην εκφώνηση της άσκησης· 2) άλλοι αντιλαμβάνονταν ότι οι φοιτητές ήταν περισσότεροι από τους καθηγητές· σχεδίαζαν, μάλιστα, εικόνες με έξι Φ και ένα K . Χρησιμοποιούσαν, λοιπόν, την ποσότητα 6Φ για τη μεγαλύτερη ομάδα και την ποσότητα K για τη μικρότερη. Δεν αντιλαμβάνονταν το Φ ως μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό των φοιτητών· θεωρούσαν ότι συμβολίζει τη μονάδα μέτρησης, όπως στην έκφραση «έξι μέτρα». «Διάβαζαν», δηλαδή, την εξίσωση $6\Phi=K$, όπως «διάβαζαν» την εξίσωση $6\text{ m}=600\text{ cm}$. [Γι' αυτό το λόγο (αλλά και για άλλους), πρέπει επίμονα να αποφεύγουμε την τελευταία έκφραση (βλ. εδάφιο 3.23).]

Ο Lochhead (1981) υπέβαλε σε παρόμοια δοκιμασία μέλη του προσωπικού του πανεπιστημίου και καθηγητές γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνάς του επιβεβαιώνουν ότι αυτές οι κατηγορίες ατόμων αντιμετωπίζουν την ίδια δυσκολία. Στην περίπτωση αυτή, οι λανθασμένες απαντήσεις δεν ήταν, επίσης, αποτέλεσμα βιασύνης και έλλειψης προσοχής. Οι ασκήσεις ήταν γραπτές και οι εξεταζόμενοι έγραφαν τις εξηγήσεις τους και τους συλλογισμούς τους. Τούτη τη φορά, η άσκηση ήταν: «Γράψτε μια φράση σε απλή γλώσσα που να περιέχει τις ίδιες πληροφορίες με την εξίσωση: $E=7\S$, όπου E είναι ο αριθμός των εφαρμοστών ενός εργοστασίου και Σ ο αριθμός των συγκολλητών».

Από τα μέλη του προσωπικού του πανεπιστημίου, το 12% μιας ομάδας προσωπικού τμημάτων θετικών επιστημών, το 55% μιας ομάδας προσωπικού τμημάτων κοινωνικών επιστημών και το 51% της κατηγορίας «άλλοι»

έδωσαν λανθασμένες ερμηνείες, αντιστρέφοντας το νόημα της εξίσωσης. Στους καθηγητές γυμνασίου, τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν: 28%, 67% και 47%. Αν και το πείραμα δεν ήταν ελεγχόμενο ούτε τα δείγματα τυχαία, το αποτέλεσμα είναι εύλωτη μαρτυρία ότι η δυσκολία είναι ανθεκτική και ότι δεν βοηθάμε, δυστυχώς, τους μαθητές να την ξεπεράσουν.

Η αδυναμία αυτή δεν εξαλείφεται με «ένα καλό βούρτσισμα» ούτε πρέπει να την αντιμετωπίζουμε επιπόλαια· δεν θεραπεύεται, επίσης, με μια σύντομη άσκηση στα πρώτα μαθήματα. Προσεγγίζουμε αποτελεσματικότερα το θέμα αν δώσουμε στους μαθητές ασκήσεις και των δύο «κατευθύνσεων» (μετάφραση λέξεων σε σύμβολα και συμβόλων σε λέξεις), τις οποίες θα περιλάβουμε σε τεστ. Πρέπει, ωστόσο, να δίνουμε τις ασκήσεις μόνον όταν παρουσιάζεται η κατάλληλη ευκαιρία στο πλαίσιο ανάπτυξης της ύλης· δεν πρέπει, δηλαδή, να τις παρουσιάζουμε με τεχνητό τρόπο, αποκομμένες από το περιεχόμενο του μαθήματος.

1.16 Η γλώσσα

Πολλές πλευρές της ανάπτυξης και της χρήσης της γλώσσας παίζουν βασικό ρόλο στη διδασκαλία και τη μάθηση κάθε δεξιότητας, και όχι μόνο της επιστήμης. Πρόκειται για τεράστιο θέμα που καλύπτεται ξεχωριστά από εκτενή βιβλιογραφία. Δεν μπορούμε, λοιπόν, να καλύψουμε με σύνεπεια όλα τα ζητήματα σε τούτη τη μονογραφία. Επειδή, όμως, ορισμένα θέματα είναι θεμελιώδη στη διδασκαλία, θα τα μνημονεύσουμε με την ελπίδα ότι ορισμένοι καθηγητές θα αναζητήσουν περισσότερα στοιχεία σε πιο εξειδικευμένες πηγές.

Το πρώτο θέμα αφορά τον λειτουργικό ορισμό βασικών εννοιών. Λίγοι μαθητές, ακόμα και στο λύκειο, είχαν την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν πώς οι λέξεις αποκτούν νόημα με τη βοήθεια της κοινής εμπειρίας. Έχουν την τάση να πιστεύουν ότι οι λέξεις ορίζονται μέσω των συνωνύμων τους που τα βρίσκουμε στα λεξικά. Όταν, λοιπόν, βρεθούν αντιμέτωποι με τις έννοιες, λόγου χάρη, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ή της δύναμης και της μάζας, αγνοούν απολύτως την αναγκαιότητα περιγραφής των πράξεων και των λειτουργιών που πρέπει να εκτελούμε, τουλάχιστον στην αρχή, για να αποδώσουμε επιστημονικό νόημα στους συγκεκριμένους όρους. Η καθημερινή εμπειρία αποτελεί την αφετηρία για την επινόηση των όρων. Στη συνέχεια, ωστόσο, τους αποδίδουμε κατεξοχήν διαφορετικό νόημα που συνδέεται αόριστα μόνο με το συνηθισμένο νόημά τους. Οι μαθητές, λοιπόν, δεν αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα του λειτουργικού ορισμού παρά μόνον αν τους την επισημάνουμε σαφώς πολλές φορές. Συνεπώς, πρέπει να τους ενημερώσουμε πλήρως για τη διαδικασία του λειτουργικού ορισμού και να τους κατευθύνουμε να διατυπώσουν με δικά τους λόγια τη διαδικα-

σία με την οποία αποδίδουμε αριθμητικές τιμές στην ταχύτητα, την επιτάχυνση κτλ. Το συγκεκριμένο ζήτημα αναφέρεται συχνά σε επόμενα κεφάλαια.

Η παράλειψη ενημέρωσης των μαθητών, όταν δεν κατανοούν πλήρως το νόημα των λέξεων και των φράσεων, κατέχει σοβαρό μερίδιο ευθύνης για την έλλειψη καλλιέργειας, όχι μόνο στις θετικές επιστήμες, αλλά και σε πολλούς πνευματικούς τομείς.

Ένα επιπλέον ζήτημα που συνδέεται με τη χρήση της γλώσσας (κρίσιμο για την αφομοίωση της επιστημονικής μεθόδου συλλογισμού και ερμηνείας, σε αντίθεση με την απλή απομνημόνευση μεμονωμένων τεχνικών όρων) αφορά τη χρήση απλών λέξεων, όπως του «τότε» και του «επειδή». Σφαιρική παρουσίαση της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές παραθέτει ο Shahn (1988). Αναφορικά με το «τότε» παρατηρεί:

Στην περιγραφή πολλών βιολογικών φαινομένων... «κατανοώ» σημαίνει αφομοιώνω μια ακολουθία όπως: «Α τότε Β τότε Γ τότε Δ...» Λόγου χάρη, αν τα γράμματα αναπαριστούν στάδια ανάπτυξης, είναι σαφής η αύξηση της πολυπλοκότητας που ενυπάρχει στη διαδικασία. Παράλειψη ή εναλλαγή των σταδίων σημαίνει, λοιπόν, ότι η κατανόηση δεν έχει επιτευχθεί. Συζητήσεις με μαθητές [οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα σε ερωτήσεις ελέγχου] έδειξαν ότι στην πραγματικότητα πίστευαν πως η συνολική διαδικασία ήταν ουσιαστικά άθροισμα των επιμέρους σταδίων: η σειρά των σταδίων δεν είχε καμιά σημασία. Φαινόταν ότι οι μαθητές, διαβάζοντας ή ακούγοντας τη λέξη «τότε» την αντιλαμβάνονταν ως «και». Κατά μία έννοια, το «τότε» περιέχει όντως το «και»... Μια σχέση αλληλουχίας, όμως, είναι πιο περιοριστική και συνεπώς πιο ακριβής· οι μαθητές ωστόσο, δεν μπορούν να συλλάβουν τη διάκριση.

Παρόμοιο πρόβλημα εμφανίζεται συχνά με προτάσεις του είδους: «εάν... τότε».

Ο Shahn (1988) παραθέτει, επίσης, παραδείγματα με τη λέξη «επειδή»:

Επινοήσαμε έξι ερωτήσεις του είδους «σωστό-λάθος». Οι ερωτήσεις είχαν τη μορφή: «Α επειδή Β» και δεν σχετίζονταν με τη βιολογία. Λόγου χάρη, «τα γιαπωνέζικα αυτοκίνητα είναι μικρά, επειδή χρησιμοποιούν λιγότερη βενζίνη». Σε κάθε περίπτωση η απάντηση ήταν λάθος, επειδή το «Α» και το «Β» ήταν άσχετα μεταξύ τους ή επειδή αληθής ήταν η αντίστροφη πρόταση: «Β επειδή Α». Πολλοί μαθητές απάντησαν λανθασμένα σε ορισμένες από αυτές τις ερωτήσεις. Αποδείχθηκε, λοιπόν, ότι υπάρχει πρόβλημα.

Αν γενικεύσουμε τα δύο παραδείγματα, φαίνεται ότι οι μαθητές συχνά

αντιλαμβάνονται λανθασμένα τους συνδέσμους: τους ταυτίζουν με το σύνδεσμο «και». Συχνά το «και» εμπεριέχεται στο νόημα του «επειδή»: δεν καλύπτει, όμως, απολύτως το νόημά του...

Το πρόβλημα δεν ανάγεται στην τυπική λογική και δεν εξαλείφεται με «θεραπευτικές» ασκήσεις πάνω σ' αυτήν. Αν και υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ της λειτουργίας της τυπικής λογικής και της επιστημονικής εξαγωγής συμπερασμάτων και ερμηνειών, οι δύο διαδικασίες δεν ταυτίζονται.

Πρέπει να αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα στο συγκεκριμένο πλαίσιο όπου εμφανίζεται. Πρέπει, επίσης, να αφήνουμε τους μαθητές να κάνουν λάθη και να ωφελούνται από την εμπειρία τους.

Πολλοί καθηγητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να πιστέψουν ότι οι μαθητές του λύκειου αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες που περιγράφει ο Shahn. Εκείνο που μπορώ να κάνω, είναι να τονίσω ότι επιβεβαίωσα προσωπικά τα συμπεράσματα του Shahn, μελετώντας πολλούς και προσεκτικά επιλεγμένους μαθητές. Για να πειστείτε, απευθύνετε παρόμοιες ερωτήσεις στους δικούς σας μαθητές. Τα αποτελέσματα κατά κανόνα θα σας συνетίσουν!

Υπάρχουν, βεβαίως, πολλά προβλήματα σχετικά με τη γλώσσα τα οποία εμφανίζονται κατά τη διδασκαλία: είναι όμως αδύνατο να εξαντλήσουμε εδώ τη μελέτη τους. Τα παραδείγματα που αναφέραμε επιλέχτηκαν λόγω της κρίσιμης σχέσης τους με το είδος της καλλιέργειας που προσπαθούμε να επιτύχουμε μέσω της διδασκαλίας των θετικών επιστημών.

1.17 Γιατί ενδιαφερόμαστε για τις προαπαιτούμενες γνώσεις;

Είναι εύκολο, ίσως και προκλητικό, να παραμερίσουμε τα προβλήματα ανάπτυξης της αντίληψης που τέθηκαν σε τούτο το κεφάλαιο, υιοθετώντας την άποψη ότι οι διδάσκοντες δεν αξίζει να ασχολούνται πια με τους μαθητές που, αν και βρίσκονται στο λύκειο, δεν έχουν κατορθώσει να αφομοιώσουν θεμελιώδεις και απλούς τρόπους σκέψης. Και, συνεπώς, δεν πρέπει να τους δέχονται σε τμήματα θετικής κατεύθυνσης: το πρόβλημα έπρεπε να είχε αντιμετωπιστεί σε μικρότερες τάξεις, για να μην αποπροσανατολίζει και αλλοιώνει τη μορφή των μαθημάτων στις ανώτερες.

Η στενότητα της προηγούμενης αντίληψης, εκτός του ότι θέτει ένα ευρύτερο κοινωνικό ζήτημα, καταδεικνύει ένα ακόμη λεπτότερο πρόβλημα: Πολλοί μαθητές που προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί αντιμετωπίζουν, επίσης, τις συγκεκριμένες δυσκολίες. Θα αφομοίωναν πολύ καλύτερα τη φυσική και θα ωρίμαζαν γρηγορότερα ως επαγγελματίες, αν είχαν κατάλληλα καθοδηγηθεί και βοηθηθεί σε πρωταρχικό στάδιο. Μεταξύ των φοιτητών που αποτυγχάνουν ή απλώς εξαφανίζονται από τα τμήματα θετικής κατεύθυνσης (ή δεν εγγράφονται ποτέ σε αυτά εξαιτίας του φόβου και

της ανασφάλειας που αισθάνονται όταν εκτελούν ποσοτικούς υπολογισμούς) υπάρχει μια μειονότητα που θα μπορούσε να ξεπεράσει το πρόβλημα. Αυτό αφορά ιδιαίτερα τους μέλλοντες δασκάλους του δημοτικού. Αφορά επίσης πολλούς άλλους μαθητές στους οποίους η βελτίωση της καλλιέργειάς τους στις θετικές επιστήμες θα βελτίωνε και την ικανότητά τους για σοφότερη διοίκηση και λήψη αποφάσεων ή θα τους καθιστούσε απλώς πιο σώφρονες πολίτες.

Το πρόβλημα πρέπει όντως να αντιμετωπίζεται στις μικρές τάξεις. Επειδή, όμως, οι περισσότεροι δάσκαλοι δεν έχουν αφομοιώσει τις γνώσεις και τις δεξιότητες που είναι απαραίτητες γι' αυτό το εγχείρημα, το πρόβλημα δεν αντιμετωπίζεται ούτε στις μικρές τάξεις, αλλά ούτε και στις επόμενες. Πρέπει, ωστόσο, να υπογραμμίσω με έμφαση ότι *δεν είναι οι δάσκαλοι υπεύθυνοι* γι' αυτό. Η σοβαρή κατάσταση στην οποία θα βρεθούν οι μέλλοντες δάσκαλοι παραγνωρίζεται κατά την εκπαίδευσή τους: Δεν τους βοηθάμε να αναπτύξουν τον αφηρημένο τρόπο σκέψης και την ικανότητα εκτέλεσης συλλογισμών, που πρέπει να μεταδώσουν στους μαθητές τους. Οι περισσότεροι δάσκαλοι είναι ιδιαίτερα ευσυνειδητοί και καλοπροαίρετοι· όμως, οι ικανότητες που προαναφέραμε δεν αναπτύσσονται αυθόρμητα. Οι δάσκαλοι χρειάζονται βοήθεια, την οποία πρέπει να τους παρέχουν οι σχολές τους τόσο πριν από το διορισμό τους όσο και μετά.

Το προσωπικό ορισμένων πανεπιστημίων, προφανώς χωρίς επίγνωση της καταστροφής που προκαλεί, είναι υπερήφανο επειδή προσελκύει φοιτητές διδάσκοντάς τους μαθήματα θετικών επιστημών χωρίς τη χρήση μαθηματικών. Αποφυγή των μαθηματικών σημαίνει, όμως, σχεδόν ολοκληρωτική αποφυγή όχι μόνο της άλγεβρας και της ανάλυσης, αλλά και οποιουδήποτε αριθμητικού συλλογισμού με λόγους και πηλίκα. Οι μέλλοντες δάσκαλοι, αν τελικά επιλέξουν κάποιο μάθημα φυσικών επιστημών, προτιμούν να είναι αυτού του είδους. Στα άλλα μαθήματα εγκαταλείπονται αβοήθητοι (ή καταφεύγουν στην απομνημόνευση των θεμάτων, χωρίς να κατανοούν το περιεχόμενό τους). Οδηγούμαστε, λοιπόν, αναπόφευκτα σε παραγωγή δασκάλων που από την πρώτη στιγμή της αποφοίτησής τους έχουν ανάγκη να καλύψουν τα κενά τους.

Αν θέλουμε σ' αυτό το επίπεδο να εξαλείψουμε τα προβλήματα εκτέλεσης συλλογισμών, μία λύση υπάρχει: Πρέπει εμείς, το προσωπικό των σχολών για δασκάλους, να συνειδητοποιήσουμε αμέσως ότι είναι απαραίτητο να βοηθήσουμε τους φοιτητές μας (και τους δασκάλους που ήδη υπηρετούν) να αφομοιώσουν τις προαπαιτούμενες γνώσεις που αναφέραμε. Μέχρι να εκπληρώσουμε την υποχρέωση αυτή, θα επισημαίνουμε απλώς το πρόβλημα ως ένδειξη εκφυλισμού της εκπαίδευσης, χωρίς ποτέ να απαλλάξουμε οριστικά τον κύκλο ανατροφοδότησης (σχολείο-πανεπιστήμιο-σχολείο) από το πρόβλημα στο στάδιο της εκπαίδευσης των δασκάλων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1Α

Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ

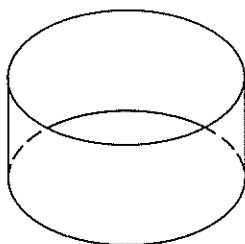
1. Διαλύουμε 176 g άλατος σε 5 l νερού. (Ο συνολικός όγκος του διαλύματος που προκύπτει είναι περίπου ίσος με 5 l):

(α) Υπολογίστε τη συγκέντρωση του διαλύματος εξηγώντας εν συντομία το συλλογισμό σας.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης, υπολογίστε πόσα κυβικά εκατοστά διαλύματος πρέπει να πάρουμε, ώστε να έχουμε στη διάθεσή μας 10 g άλατος. Εξηγήστε εν συντομία τους συλλογισμούς σας.

(γ) Κατασκευάστε ένα πρόβλημα που να περιλαμβάνει την έννοια της πυκνότητας και στη λύση του να ακολουθούνται βήματα συλλογισμών παρόμοια με τα βήματα των ερωτήσεων (α) και (β). Βεβαιωθείτε ότι έχετε επιλέξει εύλογες αριθμητικές τιμές που αφορούν στη φυσική κατάσταση που περιγράφεται. Παρουσιάστε τη λύση του προβλήματος, εξηγώντας εν συντομία τα βήματα των συλλογισμών σας.

2. Διαθέτουμε ένα κυλινδρικό δοχείο *A*, όπως το δοχείο που φαίνεται στην εικόνα. Ένα άλλο δοχείο *B* έχει το ίδιο σχήμα, αλλά οι γραμμικές διαστάσεις του είναι μεγαλύτερες κατά έναν παράγοντα 1,80.



Απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις, χρησιμοποιώντας μόνο λόγους που συνδέονται με την αλλαγή κλίμακας. Δεν πρέπει ωστόσο να χρησιμοποιήσετε τύπους για επιφάνειες και όγκους σχημάτων. Υπολογίστε το τελι-

κό αποτέλεσμα σε δεκαδική μορφή. Εξηγήστε εν συντομία κάθε βήμα των συλλογισμών σας:

(α) Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της περιμέτρου του B και του A , δηλαδή ποια είναι η τιμή του λόγου C_B/C_A ;

(β) Πόσες φορές η διατομή του B (δηλαδή το εμβαδόν S_B της βάσης του) είναι μεγαλύτερη από το εμβαδόν S_A ;

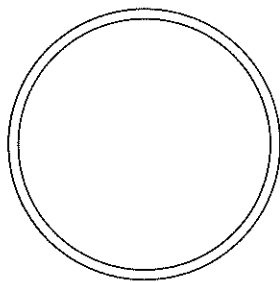
(γ) Αν το A περιέχει 25,0 l νερό όταν ήταν εντελώς γεμάτο, πόσα λίτρα περιέχει το B σε παρόμοια περίπτωση;

3. Ένα άγαλμα παριστάνει κάποιον έφιππο. Ο συνολικός όγκος του αγάλματος είναι το 0,51 του όγκου της πραγματικής σύνθεσης:

(α) Ποια σχέση έχει το μήκος του μπράτσου του ανθρώπου που απεικονίζεται στο άγαλμα με το μήκος του πραγματικού μπράτσου;

(β) Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της επιφάνειας του αγάλματος και της επιφάνειας της πραγματικής σύνθεσης;

4. Η ακτίνα της Γης στον ισημερινό έχει μήκος 6.378 km. Φανταστείτε μια κλωστή τυλιγμένη γύρω από τον ισημερινό μιας απολύτως λείας υδρογείου. Υποθέστε ότι προσθέτουμε 5 m στο μήκος της κλωστής, διατηρώντας το κυκλικό σχήμα της γύρω από το κέντρο της Γης.



Στη συγκεκριμένη περίπτωση, πόσο απέχει η κλωστή από την επιφάνεια της Γης; (Βεβαιωθείτε ότι εκτελείτε τους υπολογισμούς με τον απλούστερο και οικονομικότερο τρόπο· αποφύγετε την εκτέλεση άσχετων υπολογισμών και τη χρησιμοποίηση άσχετων δεδομένων. Η γραφική παράσταση με τη σχεδίαση της κατάλληλης ευθείας βοηθά περισσότερο από ένα «ποτάμι» λέξεων με τις οποίες προσπαθείτε να περιγράψετε τους συλλογισμούς σας.)

5. Ένα βαρίδι δεμένο στην άκρη ενός νήματος εκτελεί κυκλική κίνηση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Υποθέστε ότι η γραμμική ταχύτητα v του βαρι-

διού αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 2,35, ενώ η ακτίνα του κύκλου αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 1,76. Η μάζα του παραμένει 145 g.

Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της τελικής τιμής $F_{\pi,\tau}$ της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται στο σώμα και της αρχικής τιμής της $F_{\pi,a}$;

Εκθέτοντας τον τρόπο σκέψης σας, χρησιμοποιήστε τη γλώσσα της συναρτησιακής μεταβολής (λόγου χάρη, στην περίπτωση γεωμετρικών μεγεθών το εμβαδόν μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο του συντελεστή αλλαγής του μήκους). Δεν είναι σωστό να αντικαταστήσετε άμεσα σε τύπους τις τιμές που σας δίνονται, επειδή πρόκειται για τιμές λόγων και όχι για την τιμή της ταχύτητας ή της ακτίνας. Αποφύγετε επίσης να χρησιμοποιήσετε άσχετα δεδομένα.

6. Προκύπτει εμπειρικά ότι η απαιτούμενη ισχύς της μηχανής μιας βάρκας ή ενός πλοίου μεταβάλλεται περίπου ανάλογα με τον κύβο της ταχύτητας. Δηλαδή, αν θέλετε να διπλασιάσετε την ταχύτητα του σκάφους, πρέπει να οκταπλασιάσετε την ισχύ της μηχανής.

Ένα σκάφος μάζας 2 tn, με δύο προπέλες, κινείται με αρχική ταχύτητα v_a . Ο καπετάνιος αυξάνει την ισχύ των μηχανών κατά έναν παράγοντα 2,6. Κατά ποιον παράγοντα αυξάνεται η κινητική ενέργεια του σκάφους; Δηλαδή, ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της τελικής κινητικής ενέργειας $E_{\pi,\tau}$ και της αρχικής $E_{\pi,a}$; (Εξηγήστε εν συντομία το συλλογισμό σας. Χρησιμοποιήστε τη γλώσσα της συναρτησιακής μεταβολής και όχι τύπους. Αποφύγετε τη χρήση άσχετων στοιχείων. Υπολογίστε την τελική τιμή σε δεκαδική μορφή· μην περιοριστείτε σε κάποια γενική τελική έκφραση, χωρίς να εκτελέσετε τις πράξεις.)

2. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

2.1 Εισαγωγή

Ο ιστορικός Herbert Butterfield, στο βιβλίο του «The Origins of Modern Science», επισημαίνει:

Απ' όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισε και ξεπέρασε η ανθρώπινη σκέψη τα τελευταία χίλια πεντακόσια χρόνια, μία υπήρξε εκπληκτική ως προς τα χαρακτηριστικά της και ως προς την ευρύτητα των αποτελεσμάτων που προέκνυσαν απ' αυτή: το πρόβλημα της κίνησης.

Οι Έλληνες, παρά τον εκλεπτυσμένο τρόπο σκέψης τους και την ικανότητά τους στα μαθηματικά, δεν μπόρεσαν να επινοήσουν την έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Απέτυχαν, επίσης, να συλλάβουν την ιδέα της στιγμιαίας ποσότητας και να διεισδύσουν στο νόμο της αδράνειας. Το φαινόμενο της κίνησης μελετήθηκε εξονυχιστικά τους επόμενους αιώνες. Το αποφασιστικό βήμα, ωστόσο, για τη διαμόρφωση και τη μελέτη των σχετικών εννοιών έγινε μόλις τον 17ο αιώνα. Το γεγονός αυτό αποτελεί μέτρο της πολυπλοκότητας των εννοιών και επιβεβαιώνει τον δραματικό ισχυρισμό του Butterfield. Ζητάμε, ωστόσο, από τους μαθητές μας να αφομοιώσουν την ακολουθία αυτών των εννοιών μέσα από δύο-τρεις σελίδες «κρυπτογραφικού» κειμένου και μια σύντομη προφορική παρουσίαση.

Δεν πρέπει, λοιπόν, να μας εκπλήσσει το ότι ελάχιστοι μαθητές, σύμφωνα με σχετικές έρευνες, αφομοιώνουν τις θεμελιώδεις ιδέες της κινηματικής τα πρώτα χρόνια που διδάσκονται φυσική [Trowbridge και McDermott (1980, 1981).]

Στον παρόν Κεφάλαιο εξετάζουμε ορισμένες αιτίες αυτής της αποτυχίας. Παρουσιάζουμε, επίσης, ορισμένες στρατηγικές διδασκαλίας που είναι δυνατό να βοηθήσουν τους μαθητές.

2.2 Παραπλανητικές εξισώσεις και ορολογία

Η εισαγωγή στην κινηματική ακολουθεί συνήθως τα εξής βήματα: Θεωρούμε ένα σώμα που διανύει απόσταση d σε χρονικό διάστημα t και ορίζουμε τη μέση ταχύτητα v ως εξής:

$$v = \frac{d}{t} \quad (2.2.1)$$

Κατόπιν, εισάγουμε την επιτάχυνση γ με παρόμοιο τρόπο:

$$\gamma = \frac{v}{t} \quad (2.2.2)$$

και τελικά εμφανίζονται εξισώσεις, όπως:

$$d = \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (2.2.3)$$

ή

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (2.2.4)$$

Η εξίσωση 2.2.4 εφαρμόζεται άμεσα και σε περιπτώσεις όπου η αρχική ταχύτητα είναι θετική και η επιτάχυνση αρνητική (π.χ. στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω), οπότε η κίνηση δεν έχει σταθερή φορά.

Οι παρουσιάσεις αυτού του είδους είναι εξαιρετικά παραπλανητικές και ουσιαστικά λανθασμένες. Στις εξισώσεις 2.2.3 και 2.2.4 το σύμβολο t δεν παριστάνει αυθαίρετο χρονικό διάστημα, όπως συμβαίνει στην εξίσωση 2.2.1. Παριστάνει ενδείξεις χρονομέτρου (χρονικές στιγμές) μετρημένες από τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ένδειξη του χρονομέτρου ήταν μηδέν. Το σύμβολο d στις εξισώσεις 2.2.3 και 2.2.4 δεν παριστάνει πλέον το διάστημα που διανύει το σώμα· παριστάνει την απόσταση του κινητού από μια αυθαίρετη αρχή, ένα σημείο από το οποίο ποτέ, ίσως, δεν πέρασε το κινητό. Οι μαθητές, όμως, δεν ενημερώνονται ότι έχει αλλάξει το νόημα των συμβόλων στην ανάλυση που ακολουθεί την εξίσωση 2.2.1. Τελικά, πολλοί δεν κατανοούν πλήρως τις φυσικές έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ούτε τις αλγεβρικές σχέσεις. Καταφεύγουν, λοιπόν, στην απομνημόνευση υπολογιστικών μεθόδων που οδηγούν σε «σωστές» (μόνο από αριθμητική άποψη) απαντήσεις των προβλημάτων που υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου ενός εγχειριδίου φυσικής.

Η προηγούμενη παρουσίαση *πρέπει* να τροποποιηθεί, ώστε η πρώτη επαφή των μαθητών με την κινηματική να δίνει εγγυήσεις κατανόησης όλου του σχήματος. Οι συντομεύσεις, οι παραλείψεις και οι «απλουστεύσεις», που γίνονται με σκοπό να μειωθούν οι «περιπλοκότητες», στην πραγματικότητα όχι μόνο δεν οδηγούν στη γνήσια κατανόηση, αλλά τη δυσχεραίνουν.

Η έννοια της επιτάχυνσης συνδέεται αξεδιάλυτα με τη στιγμιαία ταχύτητα. Είναι, όμως, αδύνατο να διαπραγματευθούμε σωστά και με σαφήνεια στιγμιαίες ποιότητες χωρίς προηγουμένως να έχουμε συλλάβει τη διάκριση μεταξύ των εννοιών της χρονικής στιγμής (της ένδειξης του χρονομέτρου) και του χρονικού διαστήματος. Δεν μπορούμε, επίσης, να μελετήσουμε τις αλλαγές της κατεύθυνσης της κίνησης χωρίς να έχουμε συλλάβει τη διάκριση μεταξύ των εννοιών της θέσης, της αλλαγής της θέσης και του διαστήματος που διανύει το σώμα (πρόκειται για τρεις διαφορετικές έννοιες για τις οποίες η έννοια του «διαστήματος» χρησιμοποιείται συχνά χωρίς διάκριση).

Οι συγκεκριμένες έννοιες είναι όντως λεπτές. Ιδού, λοιπόν, γιατί η ανθρώπινη σκέψη χρειάστηκε τόσο χρόνο για να διεισδύσει σ' αυτές. Συνεπώς, είναι εξωπραγματικό να ζητάμε από τους μαθητές να τις κατανοήσουν σε σύντομο χρονικό διάστημα και μάλιστα μέσα από συντομεύσεις που συχνά επιβάλλουμε.

2.3 Γεγονός: θέση και χρονομετρική ένδειξη

Ο απλούστερος και ρεαλιστικότερος τρόπος για να παρουσιάσουμε τις έννοιες της κινηματικής είναι να ξεκινήσουμε από τις έννοιες της «θέσης» και της «ένδειξης του χρονομέτρου». (Παρεμπιπτόντως, αυτό ανοίγει από πολύ νωρίς το δρόμο για την ανάπτυξη της έννοιας του «γεγονότος», που είναι πολύ χρήσιμη στην εισαγωγή της Θεωρίας της Σχετικότητας.) Λόγου χάρη, αρχίζουμε τη μελέτη μας με την κίνηση μιας σφαίρας που κυλάει ή με ένα καροτσάκι που κινείται πάνω στο τραπέζι του εργαστηρίου· κατασκευάζουμε (ή φανταζόμαστε) φωτογραφικά στιγμιότυπα του κινητού σε τακτά χρονικά διαστήματα· τοποθετούμε μια βαθμολογημένη κλίμακα μπροστά από το αντικείμενο και καθοδηγούμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι οι αριθμοί στην κλίμακα δεν παριστάνουν αποστάσεις που διανύει το σώμα (μπορούμε να τις δεχθούμε μόνο ως αποστάσεις από μια αυθαίρετη αρχή όπου το σώμα, ίσως, ποτέ δεν βρέθηκε)· τέλος, καθοδηγούμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι χρειάζονται δύο τέτοιοι αριθμοί για να περιγράψουμε την αλλαγή της θέσης του κινητού σε ορισμένο χρονικό διάστημα. Αυτούς τους αριθμούς τους ονομάζουμε «τιμές της θέσης». (Στη δική μου τάξη ζητώ, συνήθως, από τους μαθητές να σχεδιάσουν στιγμιότυπα που ελήφθησαν δήθεν με τη βοήθεια στροβοσκοπίου. Κατόπιν, τους καθοδηγώ με σωκρατική μέθοδο διαμέσου της παραπάνω ακολουθίας συλλογισμών.)

Οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι μια τιμή πάνω στην κλίμακα της θέσης αντιστοιχεί στη θέση του ενδεικτικού σημείου που έχουμε ορίσει πάνω στο κινούμενο σώμα· αντιστοιχεί δηλαδή στην απόσταση του ενδεικτικού σημείου από κάποια αυθαίρετη αρχή όπου το σώμα ποτέ, ίσως, δεν βρέθηκε. Πρέπει, επίσης, να αντιληφθούν ότι η τιμή της θέσης δεν αναφέρεται σε κάποιο μήκος, έχει δηλαδή μηδενικό μήκος.

Κατόπιν, μπορούμε να εισαγάγουμε στο όλο σχήμα ένα χρονόμετρο και να συσχετίσουμε τη θέση του κινητού με την ένδειξη του χρονόμετρου. Η χρονομετρική ένδειξη δεν είναι χρονικό διάστημα: αντιστοιχεί στη θέση ενός άλλου σώματος (στην πραγματικότητα πρόκειται για τη θέση του δείκτη του χρονόμετρου, αν προς στιγμήν παραβλέψουμε ότι βρισκόμαστε στην εποχή των ψηφιακών). Το χρονικό διάστημα ορίζεται από δύο ενδείξεις. Η ένδειξη μηδέν δεν είναι απαραίτητο να περιλαμβάνεται στην αλληλουχία των ενδείξεων που μας ενδιαφέρουν. Η θέση του σώματος και η αντίστοιχη ένδειξη του χρονόμετρου συνδέονται αξεδιάλυτα μεταξύ τους, και ο συνδυασμός τους ονομάζεται «γεγονός».

Μπορούμε, λοιπόν, να συνδέσουμε την «ένδειξη του χρονόμετρου» με τη «χρονική στιγμή». Η σύνδεση πρέπει να γίνει προσεκτικά, επειδή η λέξη «στιγμή», αν και προέρχεται από το καθημερινό λεξιλόγιο, στη φυσική αποκτά ιδιαίτερο νόημα. Για τους περισσότερους μαθητές «στιγμή» σημαίνει μικρό χρονικό διάστημα. Λόγου χάρη, λέμε: «Θά 'μαι εκεί σε μια στιγμή». Πρέπει, λοιπόν, να τους βοηθήσουμε να αντιληφθούν ότι, όπως ακριβώς οι θέσεις έχουν εξ ορισμού μηδενικό μήκος, ομοίως οι ενδείξεις του χρονόμετρου ή οι χρονικές στιγμές έχουν εξ ορισμού μηδενική διάρκεια.

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο s για τη θέση και (δυστυχώς, αλλά κατά τα καθιερωμένα) το σύμβολο t για την ένδειξη του χρονόμετρου, τότε δεν επιτρέπεται ούτε εμείς ούτε οι μαθητές μας να χρησιμοποιούμε τις τιμές του s ως «αποστάσεις» και του t ως «χρόνους» (αν και για τους μαθητές το t σημαίνει πάντα *χρονικό διάστημα*). Είναι πιο συνετό να χρησιμοποιούμε τους όρους «θέση» και «ένδειξη του χρονόμετρου», διαφορετικά κινδυνεύουμε να μην είμαστε σαφείς.

2.4 Στιγμιαία θέση

Αν εισαγάγουμε προσεκτικά την έννοια της θέσης και της ένδειξης του χρονόμετρου, όπως περιγράψαμε προηγουμένως, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε άμεσα τη συγκεκριμένη παρουσίαση: εμβαθύνοντας σ' αυτή, δημιουργούμε τις προϋποθέσεις για να κατανοήσουν οι μαθητές τη δυσκολότερη έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας. Λόγου χάρη, αν ένα αντικείμενο κινείται συνεχώς, πόσο χρόνο παραμένει σε κάθε θέση; Οι μαθητές δυσκολεύονται να απαντήσουν σ' αυτή την καθόλου τετριμμένη ερώτηση. Πρέπει, λοιπόν, να τους βοηθήσουμε να αναπτύξουν τις εξής ιδέες:

Το ενδεικτικό σημείο που χρησιμοποιούμε στο αντικείμενό μας βρίσκεται σε κάποια θέση σε μια αντίστοιχη ένδειξη του χρονόμετρου και όχι για μια ένδειξη του χρονόμετρου (οι μαθητές θεωρούν ότι η λέξη «για» υποδηλώνει σαφώς *ορισμένη* διάρκεια): Για πόσα δευτερόλεπτα το ενδεικτικό σημείο παραμένει σ' αυτή τη θέση; (Πολλοί μαθητές απαντούν ότι το

αντικείμενο παραμένει στη θέση του για μικρό χρονικό διάστημα.) Πόσο διαρκεί μια ένδειξη του χρονομέτρου; (Πολλοί θεωρούν, επίσης, ότι ο συγκεκριμένος όρος παριστάνει χρονικό *διάστημα* ελάχιστων δευτερολέπτων, ανεξάρτητα από το αν έχουν παρακολουθήσει την ανάπτυξη που περιγράψαμε στο προηγούμενο εδάφιο.) Αν χρησιμοποιήσουμε τη λέξη «στιγμή» ως συνώνυμη της φράσης «ένδειξη του χρονομέτρου», οι ερωτήσεις διατυπώνονται ως εξής: Πόσο διαρκεί μια στιγμή; κτλ. Πρέπει, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν ότι μια ένδειξη του χρονομέτρου ή μια στιγμή διαρκεί *μηδενικό* πλήθος δευτερολέπτων: το αντικείμενο καταλαμβάνει μια θέση για μηδενικό πλήθος δευτερολέπτων. Είναι σημαντικό, ωστόσο, να διατυπώσουν οι ίδιοι τις εν λόγω ιδέες· για πολλούς δεν είναι αρκετό να παρακολουθήσουν απλώς μια διήγηση.

Αυτή η αλληλουχία των εννοιών φέρνει τους μαθητές για πρώτη φορά σε επαφή με ένα στιγμιαίο μέγεθος, τη «στιγμιαία θέση». Η συγκεκριμένη έννοια είναι λεπτή και δεν αφομοιώνεται εύκολα· αφομοιώνεται, όμως, πολύ ευκολότερα από την έννοια της «στιγμιαίας ταχύτητας». Αν έχουμε προετοιμάσει το έδαφος με την εισαγωγή της «στιγμιαίας θέσης», τότε η εισαγωγή της «στιγμιαίας ταχύτητας» ανάγεται σε ανακύκλωση των εννοιών «στιγμή» και «στιγμιαίος». Μειώνονται, έτσι, σημαντικά ορισμένες δυσκολίες που συνδέονται με την κατανόηση της έννοιας «στιγμιαία ταχύτητα».

2.5 Η εισαγωγή της έννοιας «μέση ταχύτητα»

Ο συνηθέστερος τρόπος εισαγωγής της «μέσης ταχύτητας» είναι ο εξής: «μέση ταχύτητα σε ένα χρονικό διάστημα είναι η μεταβολή της θέσης διαιρεμένη με το χρονικό διάστημα που συνέβη η μεταβολή»:

$$\bar{v} \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.5.1)$$

Δεν υπάρχει λάθος σ' αυτό τον ορισμό· αλλά, επειδή η διατύπωση αρχίζει με το «μέση ταχύτητα είναι...», στους περισσότερους μαθητές δημιουργείται η εντύπωση ότι ο όρος «ταχύτητα» είναι κάτι πρωταρχικό που θα έπρεπε να το «γνωρίζουν», ενώ η ιδέα που περιέχεται στην ποσότητα $\Delta s/\Delta t$ προκύπτει στη συνέχεια. Ωστόσο, η διδασκαλία διευκολύνεται σημαντικά, αν τηρούμε προσεκτικά τον κανόνα: *«πρώτα η ιδέα και μετά η ονομασία»*. Αυτό ισχύει όχι μόνο στην περίπτωση αυτή αλλά και κατά την εισαγωγή *κάθε* νέας ιδέας. Η επόμενη προσέγγιση είναι, λοιπόν, αποτελεσματικότερη:

Έχοντας αρχικά δημιουργήσει την εικόνα της θέσης ενός κινητού σε κάθε ένδειξη του χρονομέτρου, το επόμενο αποφασιστικό βήμα είναι να θέ-

σουμε το ερώτημα: Πώς μπορούμε να επινοήσουμε έναν αλγόριθμο, χρησιμοποιώντας τις τιμές του s και του t , για να συμπεράνουμε άμεσα πόσο γρήγορα κινιόταν το σώμα; Αυτό μας παρακινεί να εξετάσουμε το λόγο $\Delta s/\Delta t$, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το όνομά του· μελετάμε απλώς τη σημασία του, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα της κίνησης ενός σώματος κατά μήκος της κλίμακας των θέσεων. Ο συγκεκριμένος λόγος είναι μεγάλος όταν το σώμα κινείται γρήγορα, και μικρός όταν κινείται αργά· το αλγεβρικό του πρόσημο υποδηλώνει τη φορά της κίνησης κτλ. Αφού, λοιπόν, αναδειχθεί η χρησιμότητα και το νόημα του συγκεκριμένου λόγου, διευκολυνόμαστε αν του δώσουμε ένα όνομα· τον ονομάζουμε συμβατικά «μέση ταχύτητα». Οπότε μπορούμε, πλέον, να σταθούμε για λίγο και να υπογραμμίσουμε ότι η συγκεκριμένη έννοια εισήχθη σύμφωνα με τον κανόνα: «πρώτα η ιδέα και μετά η ονομασία», επισημαίνοντας την αξία του κανόνα αυτού.

Μια σημαντική αντιδιαστολή προκύπτει αν ζητήσουμε από τους μαθητές να εξετάσουν το λόγο $\Delta t/\Delta s$. Πώς συμπεριφέρεται αυτή η ποσότητα; Ποια θα μπορούσε να είναι η κατάλληλη περιγραφική ονομασία της; Αφήνοντας τους μαθητές να επινοήσουν την ονομασία, τους εντυπώνεται το γεγονός ότι η ιδέα προηγείται και ότι το περιεχόμενό της είναι σημαντικότερο από την ονομασία της. (Οι γεωφυσικοί ονομάζουν αυτό το μέγεθος «βραδύτητα» (slowness)· είναι χρήσιμο, επειδή το αντίστροφο της ταχύτητας εμφανίζεται στις εφαρμογές του νόμου του Snell στη διάδοση των ακουστικών και των σεισμικών κυμάτων.)

Η προηγούμενη προσέγγιση φέρνει τους μαθητές άμεσα αντιμέτωπους με το ότι οι επιστημονικές έννοιες δεν είναι αντικείμενα που τα «ανακαλύπτει» ο ερευνητής, αλλά αφαιρέσεις που ελεύθερα τις δημιουργεί ή τις επινοεί η ανθρώπινη ευφυΐα. (Αργότερα, κατά την εισαγωγή της έννοιας της «επιτάχυνσης», πρέπει και πάλι να επισημάνουμε αυτό το γεγονός.)

Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει, επίσης, την παρουσίαση της διαδικασίας ενός λειτουργικού ορισμού με σαφήνεια. Πρέπει, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να διατυπώσουν ευκρινώς όλη τη διαδικασία των λειτουργιών που οδηγούν στην επινόηση της «μέσης ταχύτητας»: Αρχικά, εισάγουμε την έννοια της θέσης και της ένδειξης του χρονόμετρου. Κατόπιν, προσδιορίζουμε τις τιμές του s και του t που αντιστοιχούν σε δύο γεγονότα και υπολογίζουμε την αλλαγή της θέσης, Δs , και το αντίστοιχο χρονικό διάστημα, Δt . Τέλος, διαιρούμε το Δs με το Δt και προσδιορίζουμε τη φυσική σημασία του αποτελέσματος, αποδίδοντάς του, επίσης, ένα όνομα. Ελάχιστοι μαθητές έχουν παρακολουθήσει τη διαδικασία ενός προσεκτικού λειτουργικού ορισμού. Για τους περισσότερους «ορισμός» σημαίνει αναζήτηση ενός συνωνύμου ή απομνημόνευση μιας «περίεργης» πρότασης. Καταρχάς, παρατηρείται μεγάλη αντίδραση στο να διηγούμαστε όλη τη «διαδικασία», περιγράφοντας κάθε βήμα που οδηγεί στη δημιουργία μιας φυσικής έννοιας. Η απλή παρουσίαση, ωστόσο, όσο εμπνευσμένη κι αν είναι, δεν είναι

αρκετή. Το νόημα του λειτουργικού ορισμού αποτυπώνεται μόνον αν οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να γράψουν με δικά τους λόγια τα στάδια του ορισμού και αν τα γραπτά τους ελέγχονται ως προς την επιστημονική ακρίβεια και την ορθή χρήση της γλώσσας.

Η έννοια της ταχύτητας εισάγεται, συνήθως, σε σχέση με την ομαλή κίνηση που είναι η απλούστερη περίπτωση. Αυτό είναι βολικό και επιθυμητό· όμως, τόσο τα εγχειρίδια όσο και οι καθηγητές παραβλέπουν, συνήθως, το ότι πολλοί μαθητές την προσπερνούν, χωρίς να σκεφτούν αν χρειάζεται επεξήγηση ή ερμηνεία. Είναι απαραίτητο, λοιπόν, να ερωτώνται τι σημαίνει και να καθοδηγούνται σε περιγραφές, όπως: «Σε κάθε διαδοχικό δευτερόλεπτο η θέση του κινητού αλλάζει κατά την ίδια ποσότητα».

2.6 Γραφική παράσταση της θέσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου

Οι γραφικές παραστάσεις της θέσης ως προς τις χρονομετρικές ενδείξεις διερευνώνται στα περισσότερα εγχειρίδια. Πρόκειται για πολύτιμη εναλλακτική ή συμπληρωματική θεώρηση στην περιφραστική και στην αλγεβρική. Στις γραφικές παραστάσεις η μέση ταχύτητα παρουσιάζεται πολύ συχνά (και αρκετά βολικά) ως η κλίση μιας χορδής της καμπύλης. Η στιγμιαία ταχύτητα προκύπτει, λοιπόν, ως η κλίση της εφαπτομένης σε ορισμένη χρονομετρική ένδειξη. Οι εν λόγω παραστάσεις χρησιμοποιούνται επίσης (μαζί με τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τη χρονομετρική ένδειξη) στην εξαγωγή των κινηματικών εξισώσεων της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Οι μαθητές δεν συνδέουν συνειδητά τις γραφικές παραστάσεις με την πραγματική εικόνα της κίνησης, εκτός κι αν τους καθοδηγήσουμε σε κάτι τέτοιο· τις θεωρούν αφαιρέσεις που δεν ερμηνεύονται. Αυτή η διαπίστωση ισχύει ιδιαίτερα για τους μαθητές που ο χαρακτήρας της σκέψης τους είναι ακόμα συγκεκριμένος (concrete) και όχι τυπικός (formal) (με την έννοια που χρησιμοποιεί τους όρους αυτούς ο Piaget). Βοηθάμε αποτελεσματικά τους μαθητές που έχουν αυτό το πρόβλημα, αν τους δώσουμε ασκήσεις στις οποίες πρέπει να μεταφράσουν μια γραφική παράσταση σε πραγματική κίνηση και το αντίστροφο [βλ. McDermott, Rosenquist και van Zee (1987)].

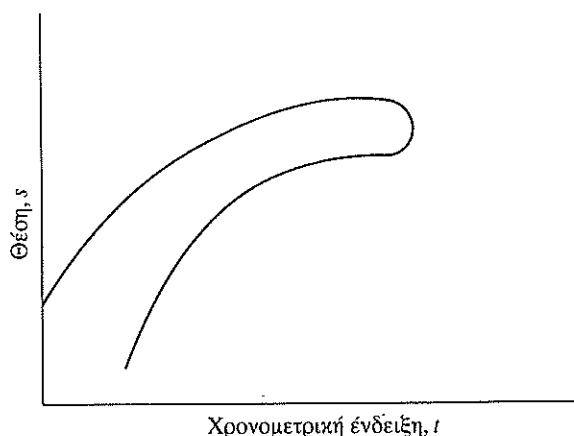
Λόγου χάρη, μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές ένα σύνολο γραφικών παραστάσεων του s ως προς το t και να τους ζητήσουμε να παραστήσουν με το χέρι τους την αντίστοιχη κίνηση κατά μήκος μιας ακμής ενός τραπεζιού. Η άμεση κιναισθητική (kinesthetic) αντίληψη που αποκτούν με την άσκηση αυτή, συμβάλλει στη δημιουργία παραστάσεων και βοηθά στη «μετάφραση» των γραφημάτων. Οι ασκήσεις είναι αποτελεσματικές όταν έχουν ποιοτικό χαρακτήρα, όταν, δηλαδή, ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις και να περιγράφουν κινήσεις, χωρίς να χρησιμοποιούν αριθμητικές τιμές. Και η αντίστροφη άσκηση, ωστόσο, είναι

εξίσου σημαντική: παρουσιάζουμε κινήσεις σφαιρών ή βαγονιών και ζητάμε από το μαθητή να σχεδιάσει τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του s ως προς το t . Χρήσιμη άσκηση είναι, επίσης, η «μετάφραση» μιας κίνησης, που αποδίδεται περιφραστικά, σε γραφική παράσταση. Χρήσιμο εργαλείο, το οποίο σήμερα διατίθεται παντού, είναι η εργαστηριακή συσκευή που προσδιορίζει με υπερήχους τη θέση του σώματος που κινεί ένας μαθητής και ένας μικροϋπολογιστής σχεδιάζει στην οθόνη τη γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στην κίνηση [Thornton (1987a) και (1987b)].

Ιδιαίτερα σημαντική άσκηση στις γραφικές παραστάσεις είναι εκείνη στην οποία ζητάμε από τους μαθητές να ερμηνεύσουν περιφραστικά ευθύγραμμα τμήματα σε διάγραμμα του s ως προς το t . Λόγου χάρη, πρέπει να αντιληφθούν ότι το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου προς τον άξονα των s παριστάνει μετατόπιση, ενώ το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου προς τον άξονα των t παριστάνει χρονικό διάστημα. Τέλος, σε αντιδιαστολή με τα προηγούμενα, ζητάμε το νόημα του μήκους ενός διαγώνιου ευθύγραμμου τμήματος σε διάγραμμα του s ως προς το t . Αρχικά, οι περισσότεροι μαθητές δεν έχουν το σθένος να υποστηρίξουν ότι αυτό το ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει φυσικό νόημα· συμμερίζονται λανθασμένες ερμηνείες, θεωρώντας τις περισσότερες φορές ότι παριστάνει διάστημα που διανύει το σώμα. Πλήρης κατανόηση επιτυγχάνεται όταν αντιλαμβανόμαστε όχι μόνο τι σημαίνει κάτι, αλλά και τι δεν σημαίνει. Αυτό, λοιπόν, το είδος παρουσίασης πρέπει να ακολουθήσει ο καθηγητής (ουδέποτε, ωστόσο, ακολουθείται από τα εγχειρίδια).

Χρήσιμο είδος άσκησης, που σπάνια το συναντάμε στα εγχειρίδια, είναι η άσκηση στην οποία εξετάζουμε την ταυτόχρονη συμπεριφορά, λόγου χάρη, δύο αυτοκινήτων που κινούνται ομαλά με διαφορετικές ταχύτητες, και σε μια αρχική χρονομετρική ένδειξη βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις. Αφού δώσουμε συγκεκριμένα στοιχεία, θέτουμε το ερώτημα: θα προσπεράσει το ένα αυτοκίνητο το άλλο; Αν ναι, σε ποια θέση και σε ποια χρονομετρική ένδειξη; Προβλήματα όπως αυτό, πρέπει να λύνονται και γραφικά και αλγεβρικά, και όχι μόνο με τον έναν από τους δύο τρόπους. Γίνονται, έτσι, αφορμή για επανάληψη στοιχειωδών γνώσεων άλγεβρας, ενώ παράλληλα οι συγκεκριμένες γνώσεις συνδέονται με μια φυσική διαδικασία με την οποία οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι. Οι περισσότεροι μαθητές που παρακολουθούν για πρώτη φορά μαθήματα φυσικής έχουν απόλυτη ανάγκη από την επανάληψη αυτή. Αρκετοί, επίσης, σπουδαστές που παρακολουθούν μαθήματα στα οποία χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός έχουν σοβαρές δυσκολίες να καταστρώσουν τις αντίστοιχες εξισώσεις.

Άλλο ζήτημα, που αρχικά δημιουργεί σοβαρές δυσκολίες, αφορά την ερμηνεία γραφικών παραστάσεων, όπως αυτή του Σχ. 2.6.1. Αν δεν έχουν ήδη παρόμοια εμπειρία, ελάχιστοι μαθητές έχουν το σθένος να πουν ότι η παράσταση δεν έχει νόημα. Πρέπει, λοιπόν, να τους ενθαρρύνουμε να υπο-



Σχήμα 2.6.1 Γραφική παράσταση χωρίς νόημα του s ως προς το t .

στηρίζουν αυτή την άποψη και να τη δικαιολογήσουν. Τέτοιες εμπειρίες τους βοηθούν να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση στο να εντοπίζουν τις περιπτώσεις που είναι άσχετες και χωρίς νόημα.

Ενδεικτικά προβλήματα, όπως τα προηγούμενα, υπάρχουν στο παράρτημα του Κεφαλαίου αυτού.

2.7 Στιγμιαία ταχύτητα

Οι μαθητές παύουν να θεωρούν την επιτάχυνση «αυτοφυή» έννοια μόνον αν τη συνδέσουν με την ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας. Πολλά εγχειρίδια, και κυρίως αυτά που δεν χρησιμοποιούν διαφορικό λογισμό, παρακαμπτουν το ζήτημα προσπαθώντας να κάνουν τα πράγματα «ευκολότερα» για τους μαθητές. Η συγκεκριμένη προσέγγιση κατά κανόνα δεν οδηγεί σε ουσιαστική κατανόηση του φαινομένου της ελεύθερης πτώσης, του νόμου της αδράνειας και της έννοιας της δύναμης. Οι μαθητές, λοιπόν, αναγκάζονται να απομνημονεύουν αλγόριθμους υπολογισμών και εκφράσεις χωρίς νόημα, οπότε αναπόφευκτα αποξενώνονται από το αντικείμενο.

Θά 'θελα να γνωρίζω έναν μαγικό τρόπο με τον οποίο θα εντυπωνόταν στο μυαλό του παθητικού μαθητή η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας, χωρίς ο μαθητής να καταβάλει πνευματική προσπάθεια. Το γεγονός ότι μάλλον δεν υπάρχει τέτοιος τρόπος αποδεικνύεται από τη μακρά ιστορία της εξέλιξης των κινηματικών εννοιών. Πρέπει, λοιπόν, να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να έρχονται σιγά σιγά σε επαφή με τις συγκεκριμένες ιδέες μέσα από μια σειρά πολλών «επεισοδίων» με επαναλήψεις. Έτσι, οι μαθητές ξα-

να συναντούν και επιβεβαιώνουν τις ιδέες αυτές, καθώς προχωρά η μελέτη της κινηματικής και της δυναμικής. Ελάχιστοι τις αφομοιώνουν την πρώτη φορά που τις συναντούν. Όμως, σε κάθε νέο «επεισόδιο», όλο και περισσότεροι ξεπερνούν το εμπόδιο. Θά 'θελα να υπογραμμίσω με έμφαση πως δεν προτείνω ότι πρέπει να καταπιαστούμε αποκλειστικά με την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας μέχρι να τη συλλάβει και ο τελευταίος μαθητής. Κάτι τέτοιο είναι μάταιο και ανέφικτο. Ο μαθητής αφομοιώνει προοδευτικά μια έννοια: η έννοια ωριμάζει στο μυαλό του με τη χρήση και την εφαρμογή. Ο ρυθμός, βέβαια, διαφέρει πολύ μεταξύ των μαθητών. Όμως, ο συνοπτικός τρόπος παρουσίασης που ακολουθούν τα περισσότερα εγχειρίδια είναι σχεδόν άχρηστος στην περίπτωση αυτή: η βραδύτητα στο ρυθμό παρουσίασης είναι απαραίτητη, αν μάλιστα συμπληρώνεται με την παρουσίαση των θεμάτων που αναφέραμε σε προηγούμενες ενότητες.

Αρχικά, μελετάμε την περίπτωση της σταθερής ταχύτητας και της ευθείας που περιγράφει την αντίστοιχη κίνηση στη γραφική παράσταση του s ως προς το t . Κατόπιν, μελετάμε τις περιπτώσεις όπου η ταχύτητα αυξάνεται ή ελαττώνεται, καθώς και την καμπυλότητα των γραφικών παραστάσεων που περιγράφουν τις εν λόγω κινήσεις. Εξετάζουμε το νόημα των χορδών στις συγκεκριμένες καμπύλες και τη σχέση τους με τη μέση ταχύτητα σε αυθαίρετα χρονικά διαστήματα. Τέλος, μελετάμε τις εφαπτόμενες των καμπυλών σε διαφορετικές χρονομετρικές ενδείξεις. Η κλίση της εφαπτομένης ερμηνεύεται ως η σταθερή ταχύτητα με την οποία θα συνέχιζε να κινείται το αντικείμενο, αν στην αντίστοιχη χρονομετρική ένδειξη σταματούσε απότομα οποιαδήποτε αλλαγή της ταχύτητας. Η κλίση μπορεί, επίσης, να συνδεθεί στο μυαλό των μαθητών με την ένδειξη του δείκτη του κοντέρ του αυτοκινήτου στην αντίστοιχη χρονομετρική ένδειξη. (Η αναφορά στο δείκτη του κοντέρ δεν είναι αρκετή. Πρέπει να παρακινήσουμε τους μαθητές να περιγράψουν την κατάσταση του αυτοκινήτου, όταν ο δείκτης παραμένει ακίνητος σε μη μηδενική ένδειξη και όταν στρέφεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά. Τέλος, οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν την ένδειξη του κοντέρ σε ορισμένη χρονομετρική ένδειξη.)

Θά 'θελα, πάλι, να υποστηρίξω ότι πρέπει να διεξαγάγουμε την προηγούμενη διερεύνηση και να μελετήσουμε τις διάφορες τιμές χωρίς την εισαγωγή του όρου «στιγμιαία ταχύτητα». Ο συγκεκριμένος όρος πρέπει να εισαχθεί (αφού έχει εμφανιστεί η αντίστοιχη έννοια) για να απλοποιήσουμε την κατάσταση.

Η έκφραση «η ταχύτητα για μια στιγμή» πρέπει να αποφεύγεται συστηματικά. Αντίθετα η έκφραση «σε μια στιγμή» είναι σωστότερη και βοηθά περισσότερο. Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε για σύγκριση την έννοια της στιγμιαίας θέσης που αναπτύξαμε προηγουμένως: οι δύο έννοιες αναφέρονται σε στιγμιαία μεγέθη.

Αφού εισαγάγουμε την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας, είναι απαραί-

τητο να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να διατυπώσουν με σαφήνεια έναν λειτουργικό ορισμό ο οποίος θα περιγράφει όλες τις πράξεις και τους υπολογισμούς που οδηγούν στο μέγεθος με το όνομα αυτό. Πρέπει, επίσης, να υπογραμμίσουμε με έμφαση ότι έχουμε δημιουργήσει μια νέα έννοια, διαφορετική από τη «μέση ταχύτητα», αν και ο όρος «ταχύτητα» εμφανίζεται πάλι. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να ενημερώνονται κάθε φορά με σαφήνεια για τη διαδικασία του επαναορισμού των μεγεθών. Η συγκεκριμένη διαδικασία προχωρά βαθμιαία κατά τη δημιουργία και την εκλέπτυνση των φυσικών εννοιών. Μια τέτοια συνειδητή ενημέρωση τους βοηθά να παρακολουθούν με ασφάλεια την «ολίσθηση» των τεχνικών όρων. Στην περίπτωση της «ταχύτητας», άλλη σημαντική «ολίσθηση» συμβαίνει όταν μεταφερόμαστε από την ευθύγραμμη κίνηση στη δισδιάστατη.

Πολλοί μαθητές, αν δεν καθοδηγηθούν να εξηγήσουν *περιφραστικά* την έννοια της ταχύτητας, δεν μπορούν να κατανοήσουν διαισθητικά το *υ*: το ερμηνεύουν απλώς ως σύμβολο που το χρησιμοποιούμε στους τύπους και το αντικαθιστούμε με αριθμητικές τιμές. Σε πρώτο στάδιο πρέπει να τους παρακινήσουμε (ιδιαίτερα όσους αντιμετωπίζουν πρόβλημα) να διερωτηθούν: «Τι σημαίνει ο όρος σταθερή ταχύτητα; Ποιες πληροφορίες μας δίνει για τη συμπεριφορά του κινητού;» Η απάντηση πρέπει να δοθεί με απλούς, μη τεχνικούς όρους από την καθημερινή εμπειρία. Ορισμένοι μαθητές προσπαθούν να «αναμασήσουν» τον λειτουργικό ορισμό. Άλλοι αναφέρουν απλώς ορισμένα στοιχεία για «το πόσο γρήγορα κινείται». Άλλοι πελαγοδρομούν ανάμεσα σε διάφορες παραλλαγές των λανθασμένων διατυπώσεων για τις αναλογίες που συζητήσαμε στα εδάφια 1.8 και 1.9. Άλλοι, τέλος, μιλούν για απόσταση ή αλλαγή της θέσης «προς» το χρόνο. (Η τελευταία διατύπωση είναι πιθανό να παγιδεύσει τον καθηγητή. Οι περισσότεροι από τους μαθητές που χρησιμοποιούν τη λέξη «προς» *δεν έχουν κατά νου* κάποιο πηλίκο, όπως, ίσως, νομίζουμε. Της αποδίδουν την έννοια του «κατά τη διάρκεια», χωρίς να συνειδητοποιούν τη σχέση της με τη μονάδα του χρονικού διαστήματος.) Είναι ανάγκη, λοιπόν, να επιμείνουμε μέχρι ο μαθητής να κατανοήσει ότι ο συγκεκριμένος αριθμός μάς δείχνει πόσο μακριά πηγαίνει το σώμα σε ένα δευτερόλεπτο (ή σε οποιαδήποτε μονάδα χρόνου). Στη λέξη «ένα» πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση: αν υπάρξει διστακτικότητα ή ασάφεια, η κατανόηση αποτυγχάνει.

Ακολουθώντας τούτη τη διαδικασία, ερμηνεύουμε τη «μέση ταχύτητα» ως τη *σταθερή* ταχύτητα με την οποία, αν κινόταν το σώμα, η αλλαγή της θέσης του θα ήταν η ίδια στο ίδιο χρονικό διάστημα. Ερμηνεύουμε, επίσης, τη «στιγμαία ταχύτητα» με τον τρόπο που περιγράφεται στο εδάφιο αυτό. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να τονίζουμε συνεχώς ότι η εν λόγω τιμή αναφέρεται στο τι συμβαίνει σε *ένα* δευτερόλεπτο.

Τέλος, πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ του λειτουργικού ορισμού και της ερμηνείας. Πρέπει, δηλαδή,

να συνειδητοποιήσουν ότι η ερμηνεία δεν συνιστά επαρκή ορισμό.

2.8 Αλγεβρικά πρόσημα

Αν πρόκειται για μια σειρά παραδόσεων στην οποία θα αναπτυχθεί πλήρως η αλγεβρική θεώρηση της ευθύγραμμης κίνησης, είναι σημαντικό να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν πώς εμφανίζονται για πρώτη φορά τα αλγεβρικά πρόσημα. Όσο προφανές κι αν είναι για μας ότι τα πρόσημα εμφανίζονται εξαιτίας της σύνδεσης της ευθείας των αριθμών με την κλίμακα των θέσεων, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται αυτό το γεγονός ούτε το διατυπώνουν με σαφήνεια αυτόματα. Πρέπει να τους καθοδηγήσουμε να αρθρώσουν με σαφήνεια, χρησιμοποιώντας δικά τους λόγια, ότι το πρόσημο της ταχύτητας προσδιορίζεται από το Δs , ενώ το Δt είναι εξαρχής θετικό. Πρέπει να αναφέρουν, επίσης, ότι το πρόσημο στο Δs εμφανίζεται επειδή *εμείς* εισάγουμε την ευθεία των αριθμών. *Εμείς*, λοιπόν, είμαστε υπεύθυνοι για την ερμηνεία του.

Οι περισσότεροι μαθητές δεν διακρίνουν ότι η εν λόγω ερμηνεία είναι προσωπική μας υπόθεση. Απομνημονεύουν την ερμηνεία των προσήμων ως κάποια οδηγία που υπάρχει στα εγχειρίδια ή επιβάλλεται από τον καθηγητή, χωρίς να εξετάζουν την προέλευσή τους. Η έλλειψη βαθύτερης επίγνωσης εμποδίζει, επίσης, σχεδόν ολοκληρωτικά την ερμηνεία και την κατανόηση του προσήμου του Δv : συνεπώς, η τυφλή απομνημόνευση συνεχίζεται.

2.9 Επιτάχυνση

Ορισμένοι συγγραφείς πιστεύουν, ακόμα, ότι οι μαθητές διευκολύνονται αν ορίσουν την επιτάχυνση ως $\gamma = v/t$. Αδυνατούν, προφανώς, να αντιληφθούν τη σύγχυση που προκαλείται, αν χρησιμοποιηθεί το ίδιο σύμβολο v και για τη στιγμιαία ταχύτητα και για τη μεταβολή της. Σήμερα, η συγκεκριμένη θεώρηση είναι, ευτυχώς, σχετικά σπάνια: τα περισσότερα εγχειρίδια αναγνωρίζουν την ανάγκη παρουσίασης της μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας μεταξύ δύο χρονομετρικών ενδείξεων. Συνεπής ορισμός, λοιπόν, είναι ο εξής:

$$\bar{\gamma} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.9.1)$$

Όπως στην περίπτωση της μέσης και της στιγμιαίας ταχύτητας, έτσι κι εδώ επιμένω ότι πρέπει να εφαρμόζουμε τον κανόνα: «πρώτα η ιδέα και μετά η ονομασία». Αρχικά, αναζητάμε έναν τρόπο για να περιγράψουμε το

πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα. Κατόπιν, εξετάζουμε τις ιδιότητες και τη συμπεριφορά της ποσότητας $\Delta v/\Delta t$ και, τέλος, εισάγουμε τον όρο «επιτάχυνση», αφού το νόημα και η χρησιμότητα του συγκεκριμένου λόγου έχει καταστεί φανερή.

Πολλοί μαθητές, ακόμα κι εκείνοι που προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί, χρειάζονται πολύ χρόνο για να αρχίσουν να αφομοιώνουν το φυσικό νόημα ενός μεγέθους. Η παραγωγή «σωστών απαντήσεων» στα προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος του κεφαλαίου της επιτάχυνσης σε κάθε εγχειρίδιο φυσικής, δεν αποτελεί εγγύηση ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια της επιτάχυνσης. Βεβαίως, οι μαθητές που δυσκολεύονται με τα προβλήματα αυτά, σχεδόν πάντοτε δεν μπορούν να περιγράψουν το νόημα της «επιτάχυνσης».

Αν ζητήσουμε από τους μαθητές να περιγράψουν με απλές καθημερινές λέξεις το νόημα της «επιτάχυνσης», πολλοί θα απαντήσουν ότι «η επιτάχυνση δείχνει πόσο γρήγορα κινείται κάτι», χωρίς να αντιλαμβάνονται σαφώς τι κινείται. Στη συνέχεια αν τους ζητήσουμε να περιγράψουν τι σημαίνει ο όρος «ταχύτητα» δίνουν την ίδια απάντηση. Μερικοί εκπλησσονται, ενώ ελάχιστοι ενοχλούνται από τον πλεονασμό· άλλοι δεν τον προσέχουν καθόλου. Προσεγγίζουμε αποτελεσματικά το πρόβλημα αν επιστρέψουμε στο παράδειγμα του αυτοκινήτου που επιταχύνεται: Ζητάμε από το μαθητή να επινοήσει μια πιθανή κατάσταση με αριθμητικές τιμές, προσδιορίζοντας την ταχύτητα σε μια πρώτη χρονομετρική ένδειξη και, κατόπιν, σε μια δεύτερη. Παριστάνει επιτάχυνση κάποια από τις δύο τιμές; Τι πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση; Με ποιες προϋποθέσεις η επιτάχυνση είναι μηδενική; Πώς θα περιγράφατε το νόημα του συγκεκριμένου αριθμού με μη τεχνικούς όρους της καθημερινής γλώσσας; δηλαδή, τι μας «λέει» ο συγκεκριμένος αριθμός για το τι συμβαίνει στο αυτοκίνητο; Συνήθως, πρέπει να προσπαθήσουμε πολύ για να μπορέσουν οι μαθητές (ιδιαίτερα όσοι έχουν δυσκολία) να πουν ότι η εν λόγω ποσότητα εκφράζει το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα σε ένα δευτερόλεπτο.

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, ώστε να *μη* δεχτούμε διατυπώσεις, όπως: «ταχύτητα ανά χρόνο» ή «μεταβολή της ταχύτητας προς το χρόνο». Οι περισσότεροι μαθητές, χρησιμοποιώντας τη λέξη «προς», δεν έχουν κατά νου κάποιο πηλίκο· τη χρησιμοποιούν απλώς με την έννοια της «διάρκειας», χωρίς να αντιλαμβάνονται άμεσα τη σύνδεσή της με τη μονάδα του χρονικού διαστήματος. Ορισμένοι μαθητές ερμηνεύουν την πρόταση «επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας στο χρόνο» ως «επιτάχυνση είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αλλάξει η ταχύτητα». Δεν μπορούν, λοιπόν, να μελετήσουν σωστά τα διάφορα προβλήματα, παρά μόνον όταν κατορθώσουν να διατυπώσουν σωστά τα διάφορα ζητήματα.

Κι εδώ, όπως στην περίπτωση της «ταχύτητας», είναι απαραίτητο να βοηθήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ του λειτουργ-

γικού ορισμού και της ερμηνείας.

Η αντιστροφή της προηγούμενης πορείας συλλογισμών είναι χρήσιμη και απαραίτητη σε πολλούς μαθητές: Υποθέστε ότι κάποια στιγμή η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι 4 km/h/s και εκείνη τη στιγμή η ταχύτητά του είναι 30 km/h . Πόση θα είναι η ταχύτητά του στο τέλος του επόμενου δευτερολέπτου; Πόση στο τέλος του μεθεπόμενου; κ.ο.κ. Στην αρχή, πολλοί μαθητές δεν μπορούν να «μεταφράσουν» τις αριθμητικές τιμές χωρίς να καταφύγουν σε μαθηματικό τύπο.

Αν οι μαθητές έχουν ήδη μελετήσει σε κάποιο βαθμό το φαινόμενο της ελεύθερης πτώσης, είναι χρήσιμη η επόμενη συζήτηση: Έχετε χρησιμοποιήσει την τιμή 10 m/s/s στην ελεύθερη πτώση; (Οι μαθητές απαντούν: Ναι.) Τι σημαίνει η συγκεκριμένη τιμή, δηλαδή σε τι αναφέρεται ή τι περιγράφει; (Οι μαθητές συχνά απαντούν: Τη βαρύτητα.) Ο όρος «βαρύτητα» αφορά συνολικά το φαινόμενο της ελκτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των υλικών σωμάτων. Η συγκεκριμένη τιμή, λοιπόν, είναι αδύνατο να είναι η «βαρύτητα». Ποιο μέγεθος είναι; Έχει σχέση με τις κινηματικές έννοιες που έχουμε περιγράψει; (Μ' αυτόν τον τρόπο οι μαθητές, ίσως, αναγνωρίσουν τελικά ότι η τιμή 10 m/s/s είναι επιτάχυνση.) Τώρα, υποθέστε ότι αφήνουμε μια μπάλα να πέσει από κάποιο ύψος. Πόση θα είναι η ταχύτητά της ύστερα από ένα δευτερόλεπτο; Στο τέλος του επόμενου δευτερολέπτου; Του μεθεπόμενου; κτλ. Υποθέστε ότι πετάμε μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω και ότι φεύγει από το χέρι μας με στιγμιαία ταχύτητα 30 m/s . Πόση θα είναι η ταχύτητά της στο τέλος του πρώτου δευτερολέπτου; Του επόμενου; Του τρίτου; Του τέταρτου; Του πέμπτου;

Με διαδικασίες όπως η προηγούμενη, οι μαθητές κάνουν βήματα στην κατεύθυνση να συλλάβουν το νόημα της επιτάχυνσης. Διαδικασίες αυτού του είδους δεν περιλαμβάνονται, δυστυχώς, στα προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος του κεφαλαίου στα εγχειρίδια φυσικής. Πρέπει, ωστόσο, να ξεκαθαρίσω ότι δεν επικρίνω αυτά τα προβλήματα ούτε θέλω να υποβαθμίσω την αξία τους: είναι ουσιώδη στη διαδικασία της μάθησης, δεν είναι όμως από μόνα τους αρκετά. Πρέπει να συμπληρώνονται και από ασκήσεις φαινομενολογικού χαρακτήρα του είδους που παρουσιάσαμε.

Επαναλαμβάνω ότι αν στην ανάπτυξη της κινηματικής χρησιμοποιούμε πλήρως την άλγεβρα, είναι απαραίτητο να σταθούμε για λίγο και να βοηθήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν τη σημασία του αλγεβρικού προσήμου του Δv . Αν δεν γίνει κάτι τέτοιο, λίγοι μαθητές καταλαβαίνουν την προέλευση του προσήμου της επιτάχυνσης. Πρέπει να αναγνωρίσουν ότι η ερμηνεία του προσήμου δεν αποτελεί δόγμα προερχόμενο από «τους ουρανούς»: προκύπτει από την εισαγωγή της ευθείας των αριθμών. Μπορούμε, λοιπόν, να το ερμηνεύσουμε όπως θέλουμε, αφού εμείς επινοούμε εξαρχής το σχήμα. Αυτή η ιδέα φαίνεται καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα λογικές τιμές για την αρχική και την τελική ταχύτητα ενός αντικει-

μένου που αρχικά έχει θετική ταχύτητα και επιταχύνεται ή επιβραδύνεται, και ενός άλλου αντικειμένου που αρχικά έχει αρνητική ταχύτητα και πάλι επιταχύνεται ή επιβραδύνεται. Οι τιμές του Δv πρέπει να καταγραφούν, ώστε να αναδειχθεί η σημασία του· τέλος, πρέπει να ερμηνευθεί με σαφήνεια το αλγεβρικό πρόσημό του.

Θά 'θελα να υπήρχε συντομότερος τρόπος παρουσίασης, αλλά δεν γνωρίζω κανέναν. Οι ιδέες είναι λεπτές και καθόλου τετριμμένες. Αν παραβλέψουμε το γεγονός αυτό, ελπίζοντας ότι η διείσδυση στο νόημα θα επιτευχθεί αυθόρμητα με το πέρασμα του χρόνου, τα προβλήματα παραμένουν και εμφανίζονται αργότερα στη δυναμική. Οι περισσότεροι καθηγητές, επειδή έχουν αντιληφθεί τη μεγάλη δυσκολία των μαθητών στα αλγεβρικά προβλήματα της δυναμικής, αγνοούν τα πρόσημα, τα αποφεύγουν ή τα χρησιμοποιούν απρόσεκτα και λανθασμένα. Ελπίζουν ότι τελικά η κατάσταση θα εξομαλυνθεί με τη βοήθεια των απαντήσεων που υπάρχουν στο τέλος του βιβλίου. Σπέρματα αυτού του συνδρόμου καλλιεργούνται, συνήθως, όταν, για να εξοικονομήσουμε χρόνο, αποφεύγουμε να ασχοληθούμε σοβαρά με το αλγεβρικό πρόσημο του Δv . Τακτοποιώντας το ζήτημα με το Δv δεν αίρονται όλες οι μελλοντικές δυσκολίες με τα πρόσημα της δυναμικής· ελαττώνονται, όμως, ουσιαστικά.

Η ανάπτυξη της έννοιας της επιτάχυνσης είναι, επίσης, ένα παράδειγμα του ότι οι επιστημονικές έννοιες είναι δημιουργήματα της ανθρώπινης φαντασίας και ευφυΐας (δραματικότερο παράδειγμα απ' αυτό που ανέφερα στο εδάφιο 2.5). Το alter ego του Γαλιλαίου στο βιβλίο «Δύο Νέες Επιστήμες» είχε συλλάβει δύο πιθανούς τρόπους περιγραφής της αλλαγής της ταχύτητας. Θα λέγαμε ότι πρόκειται για τα μεγέθη $\Delta v/\Delta s$ και $\Delta v/\Delta t$. Ο Γαλιλαίος απορρίπτει το πρώτο για λόγους όχι τόσο σαφείς. Υιοθετεί, όμως, το δεύτερο, επειδή διαισθάνεται ότι η ελεύθερη πτώση (δηλαδή, η κίνηση που θέλει να περιγράψει) είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ως προς το $\Delta v/\Delta t$, και όχι ως προς το $\Delta v/\Delta s$. Το συγκεκριμένο γεγονός δείχνει σαφώς το ρόλο της επινόησης και τη δυνατότητα ύπαρξης εναλλακτικών τρόπων περιγραφής ενός φαινομένου. Δείχνει, επίσης, ότι ορισμένες φορές η επιλογή υπογορεύεται από κριτήρια κομψότητας και απλότητας, μια ιδέα, που, σ' αυτό το στάδιο του «παιχνιδιού», ξαφνιάζει πολύ τους μαθητές.

2.10 Γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τις ενδείξεις του χρονόμετρου

Στο εδάφιο 2.6 επισημάναμε ότι η μελέτη των γραφικών παραστάσεων του s ως προς το t είναι χρήσιμη στη σύνδεση αφηρημένων ιδεών με απτή κιναισθητική εμπειρία. Οι περισσότερες παρατηρήσεις που αναφέρονται στο εν λόγω εδάφιο ισχύουν και για τις γραφικές παραστάσεις του v ως

προς το t . Πρέπει να κατευθύνουμε τους μαθητές να αναπαραστήσουν με το χέρι τους κατά μήκος της ακμής του τραπεζίου τις κινήσεις που αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις, και να τις περιγράψουν περιφραστικά. Πρέπει, επίσης, να «μεταφράσουν» τις προφορικές περιγραφές σε γραφικές παραστάσεις. Η συσκευή που ανιχνεύει με υπερήχους τη θέση του κινητού και συνδέεται με υπολογιστή είναι πολύτιμος βοηθός. [Στην εργασία των Goldberg και Anderson (1989) περιγράφονται σχετικές μαθησιακές δυσκολίες των μαθητών. Οι αδυναμίες αυτές εμφανίστηκαν κατά τη διάρκεια ενός συμβατικού μαθήματος κινηματικής.]

Όπως ακριβώς στις γραφικές παραστάσεις του s ως προς το t , πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να προσδιορίσουν το φυσικό νόημα διαφόρων ευθύγραμμων τμημάτων στα διαγράμματα του v ως προς το t : Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου προς τον άξονα του v παριστάνει *αλλαγή* της ταχύτητας· το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου προς τον άξονα του t παριστάνει χρονικό διάστημα· το μήκος ενός διαγώνιου τμήματος δεν έχει φυσικό νόημα. Ακόμα και τώρα, που για δεύτερη φορά εμφανίζεται το πρόβλημα, ελάχιστοι μαθητές έχουν αναπτύξει τόσο αυτοπεποίθηση ώστε να εκφράσουν τον τελευταίο ισχυρισμό. Οι μαθητές, όμως, που το κατορθώνουν αισθάνονται μεγάλη ικανοποίηση, και η αυτοπεποίθησή τους ενισχύεται.

Ορισμένοι μαθητές, ιδιαίτερα οι λιγότερο προικισμένοι κι εκείνοι που δεν ακολουθούν θετική κατεύθυνση (οπότε έχουν φτωχή εμπειρία σε συλλογισμούς με μεγέθη ή γραφικές παραστάσεις), αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στην ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων του v ως προς το t : προσπαθούν περισσότερο να απομνημεύσουν τα σχετικά ζητήματα παρά να τα αναλύσουν. Τους βοηθάμε σημαντικά, λοιπόν, αν αλλάξουμε τη μορφή των παραδειγμάτων. Λόγου χάρι, αν θέσουμε στον κατακόρυφο άξονα το ρυθμό αύξησης ενός πληθυσμού ή το ρυθμό με τον οποίο γεμίζει ή αδειάζει ένα δοχείο ή το ρυθμό με τον οποίο μια χώρα εισάγει πετρέλαιο κτλ. Η διαδικασία ερμηνείας των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων, ιδιαίτερα όταν ο ρυθμός παίρνει αρνητικές τιμές, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν συντομότερα τα σχετικά ζητήματα. Αν περιοριστούμε απλώς στις γραφικές παραστάσεις του v ως προς το t , δεν τους βοηθάμε σημαντικά. Η διαπίστωση αυτή δείχνει την αξία του να μελετάμε τα αφηρημένα θέματα με περισσότερους από έναν τρόπους.

Υπάρχει, επίσης, μια άλλη διάσταση στο θέμα: η «επικοινωνία» μεταξύ της γραφικής παράστασης της θέσης και της γραφικής παράστασης της ταχύτητας. Σε ορισμένα εγχειρίδια υπάρχουν σχετικές διερευνήσεις, σπάνια, όμως, τόσες ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν και να αφομοιώσουν το θέμα. Επιπλέον, σπάνια τα σχετικά ζητήματα εμφανίζονται σε εξετάσεις. Οι μαθητές, ωστόσο, αδιαφορούν για ό,τι δεν πρόκειται να αποτελέσει αντικείμενο εξέτασης — ιδιαίτερα εκείνοι που έχουν άμεση ανάγκη να εξασκηθούν. [Λίγα ενδεικτικά προβλήματα υπάρχουν στο παράρτημα του πα-

ρόντος Κεφαλαίου. Μελέτες του τρόπου που οι μαθητές κατανοούν τις γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν σε αυτό το θέμα υπάρχουν στις εργασίες του Brasell (1987) και των Goldbreg και Anderson (1989).]

2.11 Εμβαδά

Στο 1ο Κεφάλαιο συζητήσαμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του εμβαδού. Η μελέτη της κινηματικής τούς βοηθά να την κατανοήσουν καλύτερα εφαρμόζοντάς την και χρησιμοποιώντας τη σε ένα πλούσιο και αυτόνομο πλαίσιο.

Σε ορισμένα εγχειρίδια υπάρχουν λίγες ασκήσεις υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από μια καμπύλη σε κάποια γραφική παράσταση. Οι ασκήσεις αυτές, ωστόσο, περιορίζονται σε κανονικά σχήματα (τρίγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα κτλ.), όπου οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν απλούς γεωμετρικούς τύπους. Πολλοί, ωστόσο, αρχίζουν να εκτιμούν τις δυνατότητες της διαδικασίας και το νόημα των τύπων μόνον αν τους υποχρεώσουμε να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός σχήματος για το οποίο δεν υπάρχει τύπος· οπότε *πρέπει* να προχωρήσουν στην καταμέτρηση των μοναδιαίων τετραγώνων. Επαναλαμβάνω ότι προβλήματα για το σπίτι αυτού του είδους δεν δίνονται. Εμφανίζονται μόνο σε τεστ.

Αν από την πρώτη επαφή με την κινηματική οι μαθητές ασχοληθούν με εμβαδά, προετοιμάζονται να κατανοήσουν πολλά θέματα:

Οι μαθητές που έχουν ήδη διδαχθεί ή ακόμα διδάσκονται απειροστικό λογισμό έχουν την ευκαιρία να αντιληφθούν πώς ερμηνεύεται το «ολοκλήρωμα» χωρίς να χρησιμοποιήσουν κάποιον αδιαφανή αλγόριθμο υπολογισμού του. Είναι εκπληκτικό το πόσοι μαθητές τελειώνουν το μάθημα του απειροστικού λογισμού, και μάλιστα με καλό βαθμό, αγνοώντας εντελώς το νόημα του ολοκληρώματος σε συγκεκριμένο πλαίσιο, λόγου χάρη στην κινηματική. (Αυτή η διαπίστωση δείχνει σαφώς ότι και στη διδασκαλία των μαθηματικών υπάρχει έλλειψη ποικιλίας εναλλακτικών τρόπων μελέτης μιας έννοιας. Δείχνει, επίσης, ότι ούτε στα μαθηματικά οι μαθητές έχουν χρόνο να ερμηνεύσουν και να αναλύσουν το περιεχόμενο των εννοιών, όπως συμβαίνει ακριβώς στη διδασκαλία της φυσικής.)

Οι μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί απειροστικό λογισμό, έχουν την ευκαιρία μέσω της έννοιας του εμβαδού να ασχοληθούν και να συλλάβουν το νόημα της συνεχούς μεταβολής, χωρίς τη χρήση απειροστικού λογισμού. Αν εκμεταλλευτούμε κατάλληλα αυτό το γεγονός, αναδεικνύεται σε ισχυρό εργαλείο στη μελέτη με συνεπή τρόπο των θεω-

ρημάτων της ώθησης-ορμής και του έργου-ενέργειας. Επίσης, ανοίγει το δρόμο για να αντιληφθούν οι μαθητές, λόγου χάρη, τι καταγράφει ο μετρητής του ηλεκτρικού που έχουμε στο σπίτι μας.

2.12 Το μέγιστο ύψος στην κατακόρυφη βολή

Οι καθηγητές γνωρίζουν την τρομερή δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο να αντιληφθούν την κατάσταση κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα έχει μηδενιστεί, ενώ η επιτάχυνση δεν έχει μηδενιστεί· όπως, λόγου χάρη, συμβαίνει σε μια σφαίρα, όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος της πτήσης της, αν την πετάξουμε κατακόρυφα προς τα πάνω. Παρόμοια κατάσταση εμφανίζεται όταν μια σφαίρα κινείται ελεύθερα σε κεκλιμένο επίπεδο, αρχικά προς τα πάνω και κατόπιν προς τα κάτω ή στο σημείο της μέγιστης απόκλισης ενός εκκρεμούς (αν και πρόκειται ουσιαστικά για κίνηση σε δύο διαστάσεις και όχι σε μία). Οι μαθητές δυσκολεύονται να πιστέψουν ότι η επιτάχυνση δεν είναι μηδενική, αν και η ταχύτητα είναι μηδενική. Είναι, λοιπόν, απαραίτητη η διάκριση μεταξύ της επιτάχυνσης, της στιγμιαίας ταχύτητας και της μεταβολής της. Όταν για πρώτη φορά οι μαθητές συνάντησαν τις συγκεκριμένες καταστάσεις, δεν αφομοίωσαν τις απαραίτητες έννοιες παρά την κατατοπιστική ανάπτυξη των σχετικών ζητημάτων από τα εγχειρίδια και από τους καθηγητές, και παρά τις ασκήσεις, που υπάρχουν συνήθως στο τέλος των εγχειριδίων. Υπάρχει, επίσης, γλωσσικό πρόβλημα, το οποίο καλλιεργούν από αμέλεια τα εγχειρίδια, οι καθηγητές και οι ίδιοι οι μαθητές.

Το γλωσσικό πρόβλημα οφείλεται στην απρόσεκτη χρήση των λέξεων «σταματώ» ή «ηρεμώ», όταν περιγράφουμε την κατάσταση του σώματος στο μέγιστο ύψος. Αναφέροντας ότι η σφαίρα «σταματά» ή «ηρεμεί για μια στιγμή», οι μαθητές το εννοούν κυριολεκτικά. Γι' αυτούς οι δύο φράσεις σημαίνουν ότι το σώμα «σταματά για μια στιγμή», και θεωρούν ότι όντως ηρεμεί για πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Σ' αυτήν την περίπτωση η επιτάχυνση θα ήταν όντως μηδενική.

Ένα τέχνασμα, βγαλμένο μέσα από την πείρα μου, που βοηθά να αρθεί η παρανόηση και να επαναπροσανατολιστεί η σκέψη των μαθητών, είναι το εξής: Υποθέστε ότι από μια εξέδρα ή ένα ελικόπτερο παρατηρείτε την κίνηση μιας σφαίρας, καθώς βάλλεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω· η εξέδρα ή το ελικόπτερο ανέρχονται κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα ακριβώς ίση μ' αυτήν που η σφαίρα εγκαταλείπει το χέρι εκείνου που την πετά. Υποθέστε, επίσης, ότι αφήνετε από το ελικόπτερο μια άλλη σφαίρα (χωρίς να την πετάξετε) την ίδια στιγμή που ξεκινά και η πρώτη. Περιγράψτε την κίνηση των δύο σφαιρών από τη δική σας σκοπιά, καθώς το ελικόπτερο συνεχίζει να ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα.

Όταν για πρώτη φορά έθεσα το πρόβλημα, νόμιζα ότι πολλοί μαθητές,

ιδιαίτερα οι λιγότερο εύστοφοι, θα αντιμετώπιζαν τεράστια δυσκολία με την αλλαγή του συστήματος αναφοράς, και δεν ήμουν πολύ αισιόδοξος για το διδακτικό αποτέλεσμα του προβλήματος. Προς έκπληξή μου ανακάλυψα ότι οι περισσότεροι μαθητές απαντούν σωστά, ιδιαίτερα αν το πρόβλημα διατυπωθεί προσεκτικά και με σαφήνεια. Αντιλαμβάνονται ότι η κίνηση των δύο σφαιρών είναι ταυτόσημη για κάθε παρατηρητή. Αντιλαμβάνονται επίσης ότι από τη σκοπιά του παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο ελικόπτερο, οι δύο σφαίρες φαίνεται ότι πέφτουν (επιταχυνόμενες) *συνεχώς*. Τέλος αντιλαμβάνονται ότι τίποτα το ιδιαίτερο δεν συμβαίνει —καμιά αλλαγή, δηλαδή, στη συμπεριφορά των σφαιρών— τη στιγμή που ο επίγειος παρατηρητής διαπιστώνει ότι οι σφαίρες έχουν φτάσει στο μέγιστο ύψος. Αρχίζουν, λοιπόν, να παραδέχονται ότι οι σφαίρες *δεν* «σταματούν» και ότι επιταχύνονται συνεχώς, έστω κι αν η στιγμιαία ταχύτητά τους μηδενίζεται από τη σκοπιά του επίγειου παρατηρητή.

Τα προηγούμενα ενισχύουν τη σημασία του να αναφερόμαστε στη στιγμιαία ταχύτητα *σε* μια χρονική στιγμή και *όχι για* μια χρονική στιγμή. Αναδεικνύουν, επίσης, με έμφαση το ότι κάθε ταχύτητα διαρκεί μηδενικό πλήθος δευτερολέπτων. Μόλις ο μαθητής κάνει νύξη διερευνητικά και διστακτικά για το ότι η ταχύτητα στο μέγιστο ύψος είναι μηδενική *σε* μια χρονική στιγμή, ενώ την ίδια στιγμή η επιτάχυνση δεν είναι μηδενική, τότε έχει πραγματοποιήσει ένα αποφασιστικό βήμα στην κατεύθυνση κατανόησης της φύσης των στιγμιαίων μεγεθών και στην αποσαφήνιση της διάκρισης μεταξύ της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Η αφομοίωση διευκολύνεται με επαναλαμβανόμενες ποσοτικές ασκήσεις της μορφής που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 2.9, συνδεδεμένες στενά με τα αλγεβρικά πρόσημα: Αν ως θετική θεωρήσουμε την προς τα πάνω κατεύθυνση, και η σφαίρα φύγει από το χέρι μας με ταχύτητα $+30 \text{ m/s}$, πόση είναι η ταχύτητά της στο τέλος του πρώτου δευτερολέπτου; [Βεβαιωθείτε ότι οι μαθητές σημειώνουν με σαφήνεια το πρόσημο κάθε τιμής.] (Ο μαθητής απαντά: $+20 \text{ m/s}$)· στο τέλος του επόμενου δευτερολέπτου; (Ο μαθητής απαντά: $+10 \text{ m/s}$)· στου μεθεπόμενου; (Ο μαθητής απαντά διστακτικά: 0 m/s ;). Για πόσο χρόνο η σφαίρα έχει αυτήν την ταχύτητα; (Απάντηση: 0 δευτερόλεπτα;). Πόση είναι η ταχύτητα στο τέλος του *επόμενου* δευτερολέπτου; (Ο μαθητής σχεδόν παραπαίει... παραθέτει έναν αριθμό χωρίς πρόσημο... ή απαντά με αμφιβολία: -10 m/s ;). Πόση είναι η επιτάχυνση κάθε στιγμή, κατά τη διάρκεια *όλης* της διαδικασίας; (Όταν ο μαθητής τελικά απαντήσει: -10 m/s^2 , αρκετά ζητήματα τοποθετούνται αυτόματα στη σωστή θέση τους.)

Τέλος, ο κ. Brian Popp της ομάδας μας «για την Έρευνα της Διδασκαλίας της Φυσικής» έχει προτείνει ένα απλό και ελκυστικό πείραμα: Ενώ ανεβαίνετε με αυτοκίνητο σε ανηφορικό δρόμο, βάλτε «νεκρό» και αφήστε το ελεύθερο. Τη στιγμή που θα μηδενιστεί η ταχύτητα, πατήστε απότομα το φρένο: θα αισθανθείτε ένα ισχυρό τράνταγμα (το πείραμα δεν πρέπει να

εκτελεστεί σε πολύ απότομη ανηφόρα). Αν επαναλάβετε το πείραμα σε οριζόντιο δρόμο, και πατήσετε το φρένο τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα, δεν θα αισθανθείτε το τράνταγμα. Στην εν λόγω επίδειξη χρειάζεται ανασκόπηση της δυναμικής και της έννοιας της δύναμης — και είναι μια καλή ευκαιρία. Μπορούμε, επίσης, να επανέλθουμε στο συγκεκριμένο πείραμα κατά τη μελέτη του 2ου Νόμου του Νεύτωνα.

2.13 Η λύση των προβλημάτων της κινηματικής

Τα συνήθη αριθμητικά προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου της κινηματικής στα εγχειρίδια φυσικής συνιστούν πολύτιμο τρόπο εξάσκησης. Η ιδιαίτερη έμφαση που δίνουμε σε τούτο το βιβλίο σε λιγότερο συνηθισμένα ζητήματα δεν σημαίνει ότι υποτιμάμε τα προβλήματα που υπάρχουν στα εγχειρίδια. Σήμερα, σε πολλά εγχειρίδια υπάρχουν λογικές, συστηματικές οδηγίες προσέγγισης των λύσεων: Φτιάξτε ένα σχήμα της κατάστασης που περιγράφεται στο πρόβλημα· σχεδιάστε τον άξονα των θέσεων και ορίστε τη θετική και την αρνητική κατεύθυνση· μεταφράστε τους όρους του προβλήματος σε σύμβολα και κατασκευάστε έναν πίνακα με τα δεδομένα μεγέθη και τα σύμβολά τους και με τα άγνωστα μεγέθη και τα σύμβολά τους· επιλέξτε την εξίσωση της κινηματικής που επιλύει το πρόβλημα με τον αποτελεσματικότερο τρόπο· εκτελέστε τους απαραίτητους υπολογισμούς· ερμηνεύστε τα αποτελέσματά σας.

Όταν στο εγχειρίδιο δεν υπάρχει η συγκεκριμένη βοήθεια, συνήθως αναλαμβάνει ο καθηγητής αυτή την υποχρέωση, αναρτώντας, μάλιστα, μέσα στην τάξη ή διανέποντας υποδειγματικές λύσεις προβλημάτων με βάση τη συστηματική προσέγγιση.

Ο καθηγητής ωστόσο πρέπει να έχει οπωσδήποτε υπόψη του την τρομακτική αντίδραση που εκδηλώνουν οι μαθητές στο να χρησιμοποιήσουν τις συστηματικές οδηγίες παρά την προφανή δύναμη και απλότητά τους.* Η πείρα με δίδαξε ότι οι περισσότεροι μαθητές αρχίζουν να παίζουν στα σοβαρά τις οδηγίες *μόνον* αν τους τις ζητάμε σε τεστ ή αν τους αφαιρούμε πολλούς βαθμούς κάθε φορά που δεν τις χρησιμοποιούν. Η αντίδραση αυτή εμφανίζεται, επίσης, στη δυναμική και μάλιστα εντονότερα. Μπορούμε, όμως, να την ελαττώσουμε σε αξιοσημείωτο βαθμό, αν επιμένουμε να ακο-

* Και προσωπικά είχα αυτή την εμπειρία: όταν για πρώτη φορά έδωσα σε μαθητές οδηγίες για την επίλυση ασκήσεων φυσικής, τις βρήκαν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και άρχισαν να τις χρησιμοποιούν· ύστερα από λίγο, όμως, τις εγκατέλειψαν, καταφεύγοντας σε αυτοσχεδιασμούς. Τα πλεονεκτήματα των οδηγιών εμφανίστηκαν πάλι όταν οι αυτοσχεδιασμοί απέτυχαν σε πολύπλοκα προβλήματα, στα οποία οι μαθητές «δεν ήξεραν από πού να αρχίσουν». (Σ.τ.μ.)

λουθούν οι μαθητές τις οδηγίες αυτές ήδη από την κινηματική.

Υπάρχει, επίσης, ένα άλλο λιγότερο ορατό φαινόμενο (το οποίο δεν αναφέρεται συχνά): Στα πρώτα μαθήματα οι μαθητές αρνούνται να «αγγίξουν το μολύβι» για να φτιάξουν ένα πρόχειρο σχήμα ή για να συμβολίσουν τα απαραίτητα μεγέθη, πριν συλλάβουν συνολικά τη λύση. Αν απαιτούμε από τους μαθητές να ακολουθούν αυτόν τον τρόπο, θέλοντας και μη εισχωρούν στο πρόβλημα, και πολλές φορές φτάνουν στη λύση του λόγω «κεκτημένης ταχύτητας»! Η συνεχώς αυξανόμενη ικανοποίηση που κερδίζουν απ' αυτήν την εμπειρία τούς κάνει να θέλουν όλο και περισσότερο να διεισδύουν βαθμιαία στη λύση ενός προβλήματος, χρησιμοποιώντας χαρτί, μολύβι και διαλογισμό, χωρίς να περιμένουν μέχρι να τη συλλάβουν συνολικά. Πρόκειται, όντως, για μεγάλο βήμα στην ανάπτυξη της σκέψης και στην ικανότητα εκτέλεσης αφηρημένων λογικών συλλογισμών.

2.14 Η χρήση του υπολογιστή

Η κινηματική αποτελεί, βεβαίως, πλούσιο πεδίο για να αρχίσουν οι μαθητές να αποκτούν εμπειρία στην εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών και να εξοικειώνονται στοιχειωδώς με τον υπολογιστή. Έχουμε, λοιπόν, εκμεταλλευτεί αρκετά αυτή την ευκαιρία και υπάρχει υλικό δημοσιευμένο. [Λόγου χάρη, βλ. Eisberg (1976).] Με τη χρήση του υπολογιστή στο συγκεκριμένο πλαίσιο εμπλουτίζεται συνεχώς η διδασκαλία. Το γεγονός αυτό δυστυχώς δεν επισημαίνεται πάντοτε. Όταν ο μαθητής πρέπει να συντάξει το πρόγραμμα ενός αριθμητικού υπολογισμού, ακολουθεί τελικά τον στοιχειωδέστερο τρόπο: θέτει μια αρχική τιμή στη στιγμιαία επιτάχυνση, για κάποιο βραχύ χρονικό διάστημα, από την οποία προκύπτει μια μικρή μεταβολή στην ταχύτητα· αν θεωρήσουμε ότι το κινητό κινείται με τη νέα ταχύτητά του για σύντομο χρονικό διάστημα, προκύπτει η νέα θέση του· από τη νέα θέση προκύπτει η νέα επιτάχυνσή του κ.ο.κ. (Η άσκηση είναι πολύτιμη, ακόμα και στην περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.)

Ελάχιστοι μαθητές αντιλαμβάνονται ή αφομοιώνουν την αριθμητική αλληλουχία μεταξύ των εννοιών της κινηματικής, αν τους παρουσιάσουμε απλώς τις τελικές αλγεβρικές εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης ή ορισμένων ειδικών κινήσεων όπου η επιτάχυνση μεταβάλλεται. Η σύνταξη σχετικού προγράμματος στον υπολογιστή (ή ακόμα και η εκτέλεση υπολογισμών με το χέρι) αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποκαλυπτική και βοηθά τους μαθητές να αφομοιώσουν το πλήρες νόημα των εννοιών.

Είναι προφανές ότι στη διάρκεια κάθε μαθήματος δεν υπάρχει χρόνος για να ασχοληθούμε με τα πάντα. Οτιδήποτε, ωστόσο, παρασύρει τους μαθητές στη χρήση υπολογιστή τσέπης ή προσωπικού αποτελεί επένδυση στο «χρηματιστήριο» της αφομοίωσης των εννοιών της ταχύτητας και της επιτά-

χυνσης με σημαντικό κέρδος. Το όφελος είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διεύρυνση απλώς της «κομπιουτερικής κουλτούρας» του μαθητή, μολονότι δεν υποτιμώ καθόλου αυτό το γεγονός.

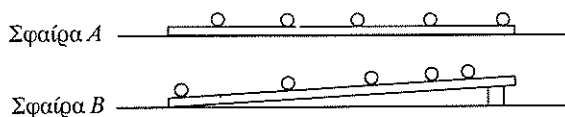
2.15 Έρευνα στη διαμόρφωση και την αφομοίωση της έννοιας της ταχύτητας

Στους περισσότερους καθηγητές φυσικής η έννοια της διανυσματικής ταχύτητας (ή απλώς της ταχύτητας) φαίνεται απλή, αυτονόητη και φανερά συνδεδεμένη με την καθημερινή εμπειρία της κίνησης. Οι καθηγητές φυσικής, λοιπόν, δυσκολεύονται να πιστέψουν ότι οι μαθητές δεν αφομοιώνουν τα βασικά χαρακτηριστικά της από τα εγχειρίδια και τις παραδόσεις. Το ότι η βαθιά και ουσιαστική κατανόηση δεν αναπτύσσεται εύκολα, φαίνεται με σαφήνεια στις έρευνες που πραγματοποιήθηκαν με την καθοδήγηση των Trowbridge και McDermott (1980).

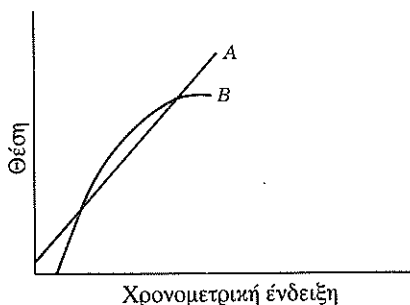
Σε διερευνητικές συνεντεύξεις με μαθητές, οι Trowbridge και McDermott ανακάλυψαν ότι οι μαθητές που δεν είχαν γνώσεις φυσικής, αντιλαμβάνονταν τον όρο «ταχύτητα» ως σχέση μεταξύ της απόστασης που έχει διανύσει ένα κινητό και του χρόνου που έχει παρέλθει (όχι, όμως, απαραίτητα ως λόγο). Ομοίως, χρησιμοποιούσαν τον όρο «επιτάχυνση» με την πρωταρχική σημασία του, ως «αύξηση της ταχύτητας», και όχι ως λόγο. Οι Trowbridge και McDermott επισήμαναν ότι στο συγκεκριμένο στάδιο οι μαθητές αντιλαμβάνονταν με απλοϊκό τρόπο τις έννοιες και όχι ως έννοιες ορισμένες με ακρίβεια σε σύνδεση με καθιερωμένους τεχνικούς όρους. Στη συνέχεια, απέδειξαν ότι η πρωτογενής αντίληψη ανθίσταται, τουλάχιστον σε κάποιο βαθμό, ακόμα κι αν οι μαθητές παρακολουθήσουν την ανάπτυξη των σχετικών εννοιών σε ένα τυπικό μάθημα φυσικής.

Αποκαλυπτικό δείγμα της αντίληψης των μαθητών είναι οι απαντήσεις τους κατά τη μελέτη του επόμενου πειράματος: Ο μαθητής παρατηρεί δύο σφαίρες που κυλούν παράλληλα (Σχ. 2.15.1). Η A εκτελεί ομαλή κίνηση από τα αριστερά προς τα δεξιά, ενώ η B κινείται προς την ίδια κατεύθυνση με αρχική ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα της A . Καθώς η B ανέρχεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, επιβραδύνεται και στιγμιαία ηρεμεί. Αρχικά, η B προσπερνά την A , αλλά μετά από λίγο η A προσπερνά τη B . Ο μαθητής παρατηρεί αρκετές φορές την κίνηση κάθε σφαίρας ξεχωριστά και, κατόπιν, την ταυτόχρονη κίνησή τους· έχει λοιπόν την άνεση να αφομοιώσει το φαινόμενο. (Η γραφική παράσταση της θέσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου, που αντιστοιχεί στις κινήσεις που μόλις περιγράψαμε, φαίνεται στο Σχ. 2.15.2· ωστόσο, δεν χρησιμοποιήθηκε στη συνέντευξη.)

Στη συνέντευξη οι ερευνητές έθεσαν στους μαθητές την ερώτηση: «Υπάρχει κάποια στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θέσης είναι



Σχήμα 2.15.1 Πείραμα σύγκρισης ταχυτήτων. Οι σφαίρες κινούνται από αριστερά προς τα δεξιά. Η σφαίρα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η σφαίρα Β εκκινεί με μεγαλύτερη ταχύτητα από την Α και επιβραδύνεται. Σε δύο σημεία η μια σφαίρα προσπερνά την άλλη. (Στο Σχ. 2.15.2 υπάρχει η γραφική παράσταση των δύο κινήσεων.)



Σχήμα 2.15.2 Η γραφική παράσταση της θέσης ως προς τη χρονομετρική ένδειξη των κινήσεων που περιγράφονται στο Σχ. 2.15.1. (Η γραφική παράσταση δεν χρησιμοποιήθηκε στις συνεντεύξεις με τους μαθητές.)

και για τις δύο σφαίρες ο ίδιος;» (Χρησιμοποιούσαν τον όρο «ταχύτητα» μόνον αν είχε ήδη εισαχθεί.) Οι Trowbridge και McDermott διαπίστωσαν ότι σημαντικός αριθμός μαθητών (μέχρι 30% σε τμήματα όπου χρησιμοποιούσαν απειροστικό λογισμό, και μεγαλύτερο ποσοστό σε λιγότερο προχωρημένα τμήματα) απαντούσε ότι οι δύο σφαίρες είχαν την ίδια ταχύτητα όταν η μια σφαίρα προσπερνούσε την άλλη, και όχι στη διάρκεια που η μεταξύ τους απόσταση παρέμενε σχεδόν σταθερή. Ταύτιζαν, δηλαδή, την έννοια της «ίδιας ταχύτητας» με την εικόνα του «προσπεράσματος» ή της «ίδιας θέσης». Η συγκεκριμένη αντίληψη ήταν εντυπωμένη στο μυαλό τους· δεν επρόκειτο για σύμπτωση ούτε οφειλόταν στην ιδιοσυγκρασία ορισμένων μαθητών.

Όταν οι μαθητές παρατηρούσαν τις κινήσεις των δύο σφαιρών, κατάλληλα προετοιμασμένων, ώστε να μην προσπερνά η μία την άλλη, απαντούσαν ότι ουδέποτε οι δύο σφαίρες είχαν την ίδια ταχύτητα, παρόλο που για μια στιγμή συνέβαινε όντως κάτι τέτοιο. Πολλοί μαθητές από την προσωπική τους εμπειρία με αυτοκίνητα που προσπερνά το ένα το άλλο, θεωρούσαν ότι το αυτοκίνητο που έπεται έχει μικρότερη ταχύτητα από εκείνο που προηγείται. Θεωρούσαν, επίσης, πως όταν βρίσκονται δίπλα δίπλα έχουν προς στιγ-

μήν την ίδια ταχύτητα. (Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να μάθει περισσότερες λεπτομέρειες για τις συνεντεύξεις και να βρει αποσπάσματα από τις απαντήσεις των μαθητών, πρέπει να συμβουλευτεί την αρχική δημοσίευση.)

Οι Trowbridge και McDermott συνοψίζουν την έρευνά τους ως εξής:

Πήραμε τις συνεντεύξεις πριν οι μαθητές παρακολουθήσουν την παρουσίαση των σχετικών θεμάτων, αλλά και μετά την παρουσίαση. Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές κατέληγαν σε λανθασμένα συμπεράσματα, επειδή χρησιμοποιούσαν τη θέση των κινητών ως κριτήριο για τον προσδιορισμό της σχετικής τους ταχύτητας. Αν και οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση μπορούσαν γενικά να διατυπώσουν έναν αποδεκτό ορισμό της ταχύτητας, δεν κατανοούσαν αρκετά το νόημά της. Δεν μπορούσαν επίσης να προσδιορίσουν μια διαδικασία με την οποία σε ένα πραγματικό φαινόμενο θα αποφάσιζαν αν και πότε δύο σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα. Αντίθετα, επέστρεφαν στο ευλογοφανές κριτήριο του «προσπεράσματος». Ορισμένοι αντιλαμβάνονταν το γεγονός ότι ένα σώμα προηγείται ή έπεται ως κίνηση με μεγαλύτερη ή μικρότερη ταχύτητα, αντίστοιχα. Τη χρήση της θέσης του κινητού στον προσδιορισμό της σχετικής ταχύτητας την ονομάζουμε «σύγχυση θέσης-ταχύτητας». Δεν χρησιμοποιούμε τη λέξη «σύγχυση» για να δηλώσουμε τη λανθασμένη υποκατάσταση μιας πλήρως ανεπτυγμένης έννοιας με άλλη· τη χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τη χρησιμοποίηση χωρίς διάκριση μεταξύ τους δύο πρωτογενών εννοιών...

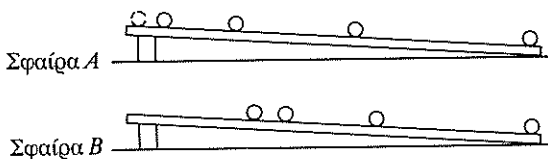
Η έρευνά μας έφερε, επίσης, στο φως το πόσο βαθιά εντυπωμένες στο μυαλό των μαθητών είναι ορισμένες πρωτογενείς αντιλήψεις... Ακόμα κι όταν πήραμε συνεντεύξεις μετά το τέλος της σειράς των σχετικών μαθημάτων, παρατηρήσαμε το εξής: κάθε φορά που εμφανίζονταν οι δυσκολίες που προαναφέραμε, φαινόταν ότι προέρχονταν από την ίδια σύγχυση μεταξύ της ταχύτητας και της θέσης, η οποία είχε εμφανιστεί και στις συνεντεύξεις πριν από την αρχή των μαθημάτων. Η πεποίθηση ότι το κριτήριο της θέσης είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί στη σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων, παρέμενε σε ορισμένους μαθητές ακόμη και έπειτα από αρκετές εβδομάδες διδασκαλίας.

2.16 Έρευνα στη διαμόρφωση και την αφομοίωση της έννοιας της επιτάχυνσης

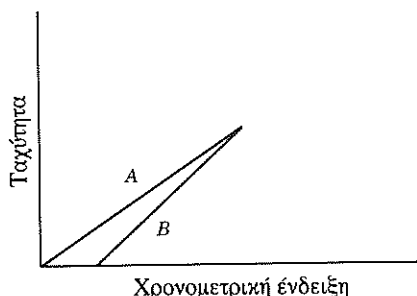
Εκτός από την έρευνα στην έννοια της ταχύτητας, οι Trowbridge και McDermott (1981) καθοδήγησαν παρόμοια έρευνα για την έννοια της επιτάχυνσης.

Μαθητές με γνώσεις κινηματικής παρατηρούσαν πάλι τις κινήσεις που περιγράφονται στο Σχ. 2.15.1 και 2.15.2 του προηγούμενου εδαφίου. Κατόπιν, οι ερευνητές τους ρωτούσαν αν οι δύο σφαίρες είχαν ποτέ την ίδια επιτάχυνση. Ορισμένοι μαθητές απαντούσαν ότι οι επιταχύνσεις των σφαιρών ήταν ίδιες όταν οι ταχύτητές τους ήταν ίδιες. Όταν στη συνέχεια τους ζητούσαν να δικαιολογήσουν την άποψή τους, τυπική απάντηση ήταν η εξής: «Η επιτάχυνσή όας είναι εκείνο το πηλίκο του “δέλτα υ” προς το “δέλτα t”». Στη θέση, λοιπόν, όπου τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα, έχουν επίσης το ίδιο “δέλτα t” και το ίδιο “δέλτα υ”. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν είχαν αντιληφθεί τη διαφορά μεταξύ της ταχύτητας και της μεταβολής της. Η επιπλέον έρευνα έδειξε ότι χρησιμοποιούσαν την έκφραση «προς το» με την έννοια της έκφρασης «κατά τη διάρκεια»· δεν την αντιλαμβάνονταν ως λόγο.

Σε ένα πιο εκλεπτυσμένο πείραμα, οι μαθητές παρατηρούσαν δύο σφαίρες που κατέβαιναν σε δύο κεκλιμένα επίπεδα με διαφορετικές επιταχύνσεις. Οι εν λόγω κινήσεις παριστάνονται στο Σχ. 2.16.1 και Σχ. 2.16.2 (βλ. επόμενη σελίδα). Οι διαφορετικές επιταχύνσεις επιτυγχάνονταν με δύο αυλάκια από αλουμίνιο, ελάχιστα διαφορετικού πλάτους μεταξύ τους, ενώ η γωνία κλίσης ήταν και στις δύο περιπτώσεις η ίδια. Η Α αφηνόταν πρώτη από ένα σημείο που βρισκόταν αρκετά εκατοστά πριν από τη Β. Η σφαίρα αυτή αφού κυλούσε λίγα εκατοστά, χτυπούσε ένα μικροδιακόπτη που ελευθέρωνε τη Β. Όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση (η οποία δεν χρησιμοποιήθηκε στις συνεντεύξεις), οι σφαίρες έχουν την ίδια μέση και τελική ταχύτητα. Η Β, ωστόσο, που κυλούσε σε στενότερο αυλάκι αποκτούσε την



Σχήμα 2.16.1 Πείραμα σύγκρισης επιταχύνσεων. Οι σφαίρες κινούνται από τα αριστερά προς τα δεξιά και κυλούν σε αυλάκια ελάχιστα διαφορετικού πλάτους. Έτσι, οι επιταχύνσεις τους δεν είναι ίδιες. Απεικονίζονται οι διαδοχικές θέσεις τους όπως θα εμφανίζονταν σε στροβοσκοπική φωτογραφία. Ο διακεκομμένος κύκλος απεικονίζει την αρχική θέση της σφαίρας Α. Οι πλήρεις κύκλοι απεικονίζουν τις θέσεις των σφαιρών σε ίσα χρονικά διαστήματα.



Σχήμα 2.16.2 Η γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τις χρονομετρικές ενδείξεις των κινήσεων που απεικονίζονται στο Σχ. 2.16.1. Στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου οι σφαίρες αποκτούν την ίδια ταχύτητα και εισέρχονται σε ένα τούνελ. (Το τούνελ χρησιμοποιήθηκε για να μην αποσπάται η προσοχή του μαθητή από τη συμπεριφορά των σφαιρών μετά την κάθοδό τους από το κεκλιμένο επίπεδο. Η γραφική παράσταση δεν χρησιμοποιήθηκε στις συνεντεύξεις με τους μαθητές.)

τελική ταχύτητα σε συντομότερο χρονικό διάστημα από την *A*, και η επιτάχυνσή της ήταν 15% μεγαλύτερη. Στη βάση των κεκλιμένων επιπέδων, όπου και οι δύο σφαίρες κινούνταν πλέον με την ίδια ταχύτητα, κυλούσαν δίπλα δίπλα και έμπαιναν σε ένα τούνελ. (Το τούνελ υπήρχε για να μην αποσπάται η προσοχή του μαθητή από τη συμπεριφορά των σφαιρών μετά την κάθοδό τους από το κεκλιμένο επίπεδο. Η εν λόγω συμπεριφορά ήταν άσχετη με το πρόβλημα.)

Αρχικά, οι σφαίρες κυλούσαν ξεχωριστά η μια από την άλλη, και οι μαθητές διαπίστωναν ότι και οι δύο επιταχύνονταν. Στη συνέχεια, παρατηρούσαν ταυτόχρονα τις δύο κινήσεις για να μπορούν να τις συγκρίνουν. Τέλος, οι ερευνητές ρωτούσαν: «Οι δύο σφαίρες έχουν ίδιες ή διαφορετικές επιταχύνσεις;».

Για να βοηθήσουν τους μαθητές να προσέξουν το κύριο εννοιολογικό περιεχόμενο του πειράματος, και όχι τις τεχνικές λεπτομέρειές του, τους έδιναν ορισμένες ειδικές οδηγίες. Τους εξηγούσαν ότι για να συγκρίνουν τις επιταχύνσεις δεν ήταν απαραίτητο να προσδιορίσουν την αιτία της επιτάχυνσης: δεν ήταν απαραίτητο να εξετάσουν αν οι σφαίρες, τα αυλάκια και οι κλίσεις είναι ίδιες. Η σύγκριση έπρεπε να γίνει αυστηρά στο πλαίσιο των κινήσεων που παρατηρούσαν. Τους υποδείκνυαν, επίσης, ότι η *B* άρχιζε να κινείται μετά την *A*. Αν οι μαθητές δεν παρατηρούσαν ότι οι δύο σφαίρες έμπαιναν ταυτόχρονα στο τούνελ και δεν συνέκριναν από μόνοι τους τις τελικές ταχύτητες, τους καθοδηγούσαν με ερωτήσεις, ώστε να παρατηρήσουν τα δύο ζητήματα. Τους βοηθούσαν, λοιπόν, να επικεντρώσουν την προσοχή τους σε παρατηρήσεις απαραίτητες για τη σύγκριση των επιταχύνσεων.

Οι Trowbridge και McDermott συνέταξαν έναν κατάλογο με απαντήσεις από τις πλέον αφελείς έως τις απολύτως σωστές, όπως φαίνεται στον

Πίνακας 2.16.1

Σύνοψη των παρατηρήσεων των μαθητών στο πείραμα σύγκρισης των επιταχύνσεων^a

Παρατήρηση	Ερμηνεία της παρατήρησης
1. Οι σφαίρες έχουν την ίδια επιτάχυνση, επειδή η κλίση των επιπέδων είναι η ίδια.	Μη κινηματική προσέγγιση.
2. Οι σφαίρες έχουν την ίδια ή διαφορετική επιτάχυνση ανάλογα με την τελική σχετική θέση τους.	Σύγκριση μεταξύ θέσης και επιτάχυνσης.
3. Οι σφαίρες έχουν την ίδια επιτάχυνση, επειδή η τελική ταχύτητά τους είναι η ίδια.	Σύγκριση μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης.
4. Η σφαίρα Α έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, επειδή προσπερνά τη Β.	
5. Η σφαίρα Α έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, επειδή στο ίδιο χρονικό διάστημα καλύπτει μεγαλύτερη απόσταση από τη Β.	
6. Οι σφαίρες ίσως έχουν την ίδια επιτάχυνση, επειδή σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα η Α καλύπτει μεγαλύτερη απόσταση από τη Β.	
7. Η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, επειδή σε μικρότερη απόσταση η ταχύτητά της μεταβάλλεται όσο και η ταχύτητα της Α.	Διάκριση μεταξύ της ταχύτητας και της μεταβολής της, παραγνωρίζοντας το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.
8. Η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, επειδή κάποια στιγμή η ταχύτητά της γίνεται ίση με της Α και κατόπιν αυξάνεται κατά μεγαλύτερη ποσότητα.	
9. Η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, επειδή στο ίδιο χρονικό διάστημα η ταχύτητά της μεταβάλλεται περισσότερο από της Α.	Ποιοτική κατανόηση της επιτάχυνσης ως ο λόγος $\Delta v/\Delta t$.
10. Η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση, επειδή η ταχύτητά της σε συντομότερο χρονικό διάστημα μεταβάλλεται όσο και η ταχύτητα της Α.	

^a Από το άρθρο των Trowbridge και McDermott (1981).

Πίνακας 2.16.1.

Σε συνεντεύξεις που ελήφθησαν πριν από τη διδασκαλία των απαραίτητων εννοιών, μόνον το 17% των μαθητών που παρακολουθούσαν μαθήματα φυσικής με τη χρήση απειροστικού λογισμού απάντησαν με επιτυχία. Σε άλλες ομάδες το αντίστοιχο ποσοστό ήταν μικρότερο — μέχρι μηδενικό σε μια τάξη μαθητών με χαμηλό υπόβαθρο γενικών γνώσεων.

Αντίθετα, σε συνεντεύξεις μετά τη διδασκαλία των σχετικών θεμάτων, το ποσοστό επιτυχίας στην πρώτη ομάδα έφθασε στο 38%, ενώ στην άλλη ομάδα περίπου στο 25%. Οι μαθητές με χαμηλό υπόβαθρο γνώσεων παρα-

κολούθησαν μια προσεκτικά προετοιμασμένη διδασκαλία, χωρίς να παρακολουθήσουν το πείραμα, αλλά με περισσότερο συγκεκριμένα φαινόμενα και με σκοπό να αυξηθεί η ικανότητά τους, για εκτέλεση συλλογισμών με λόγους. Στην ομάδα αυτή η επιτυχία αυξήθηκε στο 40%. (Περισσότερες λεπτομέρειες, αποτελέσματα άλλων ελέγχων και πληροφορίες για τη διακύμανση των δεδομένων υπάρχουν στο άρθρο που προαναφέραμε.)

2.17 Αποτελέσματα της έρευνας

Οι προηγούμενες έρευνες δείχνουν με δραματικό τρόπο το χάσμα που υπάρχει μεταξύ της πρωτογενούς αντίληψης με την οποία οι περισσότεροι μαθητές, αρχικά, αντιμετωπίζουν την κινηματική και της αφομοίωσης των εννοιών που έχουμε επινοήσει στη φυσική (όπως αυτές παρουσιάζονται στα εγχειρίδια και τις παραδόσεις). Καταδεικνύουν, επίσης, την ισχυρή αντίσταση που εμφανίζουν οι συγκεκριμένες αντιλήψεις στο πλαίσιο ενός συμβατικού μαθήματος.

Εμείς, οι καθηγητές φυσικής, ωστόσο, δεν εντοπίζουμε τα κενά που υπάρχουν στον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν και αφομοιώνουν τις ιδέες. Και τούτο, επειδή προτιμούμε να μείνουμε ικανοποιημένοι με τις εμπνευσμένες παραδόσεις μας, και επειδή τα συμβατικά προβλήματα για το σπίτι και οι ερωτήσεις των τεστ δεν αναδεικνύουν την πραγματική κατάσταση της σκέψης και το βαθμό κατανόησης των μαθητών. Έχουμε την τάση να πιστεύουμε ότι επειδή οι μαθητές ανταποκρίνονται επαρκώς στην επίλυση των προβλημάτων που υπάρχουν στο τέλος των κεφαλαίων, έχουν επίσης κατανοήσει τις σχετικές έννοιες· ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει.

Κάθε φορά μπορούμε να εκλεπτύνουμε και να βελτιώσουμε την παρουσίαση των ιδεών· αυτό, μάλιστα, είναι σε κάθε περίπτωση πολύτιμο. Ωστόσο, απατώμαστε αν πιστεύουμε ότι η ζωντάνια και η σαφήνεια στην παρουσίαση αρκούν από μόνες τους. Για να αφομοιώσει ο εκπαιδευόμενος τις αφηρημένες έννοιες είναι ουσιώδες να προσανατολίσουμε τη σκέψη του, ώστε να δραστηριοποιηθεί στη χρήση των εννοιών σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Οι έννοιες πρέπει να συνδεθούν στενά με άμεση, ορατή ή κιναισθητική εμπειρία. Επίσης, πρέπει να καθοδηγήσουμε τον εκπαιδευόμενο να αντιμετωπίσει και να επιλύσει τις αντιφάσεις που προκύπτουν από τις δικές του παρανοήσεις. [Περισσότερα παραδείγματα με μαθητές υψηλού επιπέδου και παραδείγματα χρήσιμων ερωτήσεων υπάρχουν στη μελέτη του Peters (1982).]

Τα κενά στην κατανόηση είναι αδύνατο να καλυφθούν απολύτως την πρώτη φορά παρουσίασης της κινηματικής, ακόμα και με τις καλύτερες ασκήσεις και τεστ. Η πραγματική μάθηση των αφηρημένων ιδεών είναι βραδεία διαδικασία: απαιτεί χρόνο και επανάληψη. Η επανάληψη, ωστό-

σο, έχει φτωχά αποτελέσματα αν δεν μεσολαβήσει κάποιο χρονικό διάστημα. Η προσπάθειά μας αποδίδει περισσότερο αν προχωράμε σε άλλα θέματα, και με κάθε ευκαιρία επιστρέφουμε και επικαλούμαστε πάλι τις έννοιες της κινηματικής με συγκεκριμένο και διαισθητικό τρόπο. Καθώς οι μαθητές συναντούν τις ίδιες ιδέες σε συνεχώς πλουσιότερο περιβάλλον, τις αφομοιώνουν βαθμιαία (κάθε μαθητής, ωστόσο, αφομοιώνει τις έννοιες με διαφορετικό ρυθμό).

Μπορούμε να προκαλέσουμε τις απαραίτητες «συναντήσεις» των μαθητών με τις ιδέες με παρατηρήσεις, προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις σε τεστ, οι οποίες θα συμπληρώνουν τις ασκήσεις που κατά κανόνα υπάρχουν στα εγχειρίδια. Οι δοκιμασίες που χρησιμοποιούν οι Trowbridge και McDermott στις έρευνές τους είναι κατάλληλα παραδείγματα· έχουν λοιπόν μεγάλη διδακτική αξία. Λίγες ενδεικτικές συμπληρωματικές ερωτήσεις υπάρχουν στο παράρτημα του παρόντος Κεφαλαίου. Οι καθηγητές που θα ερευνήσουν και θα επαληθεύσουν τα μαθησιακά προβλήματα που περιγράψαμε θα επινοήσουν αναμφίβολα και άλλες (καλύτερες) ερωτήσεις, καθώς και παραλλαγές των ερωτήσεων που προτείνονται εδώ. Έτσι, θα συνεισφέρουν στο κοινό «ταμείο» που είναι απαραίτητο να εμπλουτιστεί, και το περιεχόμενό του να διοχετευθεί στα περιοδικά και τα βιβλία. Μια εκπαιδευτική σειρά, η οποία σχεδιάστηκε για την εφαρμογή των γνώσεων που αποκτήθηκαν μέσω των προαναφερόμενων ερευνών, περιγράφεται από τους Rosenquist και McDermott (1987).

2.18 Ο Γαλιλαίος και η γέννηση της σύγχρονης επιστήμης

Η μελέτη της κινηματικής προσφέρεται ως εξαιρετική ευκαιρία αποκάλυψης ορισμένων ουσιαστών ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών της επιστημονικής σκέψης, αν μάλιστα εξετάσουμε το νοηματικό περιεχόμενο του έργου «Διάλογοι για Δύο Νέες Επιστήμες». Δεν είναι σημαντικό ποιος υπήρξε πρωτοπόρος σε αυτό το πεδίο ή η σειρά με την οποία αναπτύχθηκε η ιστορική μελέτη είναι κάτι περισσότερο από απλή χρονολογική παράθεση των γεγονότων. Το ότι ο Γαλιλαίος είχε προδρομούς στην κινηματική και στη θεωρία της «κεκτημένης δύναμης» είναι αληθές. Η συγκεκριμένη μελέτη, ωστόσο, δεν έχει τόσο μεγάλη σημασία σε ένα εισαγωγικό μάθημα φυσικής. Πολυτιμότερα συμπεράσματα προκύπτουν αν αναζητήσουμε σε ποια θέματα ο ίδιος ο Γαλιλαίος δίνει έμφαση στην προσέγγισή του:

1. Ο Γαλιλαίος είχε πλήρη συνείδηση ότι διατύπωνε *ορισμούς* νέων εννοιών· δεν «ανακάλυπτε» νέες οντότητες. Μελέτησε, λοιπόν, εναλλακτικούς ορισμούς της επιτάχυνσης (εκτός από τον καθιερωμένο ορισμό της) με τον τρόπο που αναφέραμε στο εδάφιο 2.9.

2. Ο Γαλιλαίος, σαφώς και ενσυνειδήτως, θέτει περιορισμούς στο στό-

χο της έρευνάς του: κάθε φορά να κατακτά και να αποσαφηνίζει μόνο ένα σημαντικό ζήτημα. Αφού προηγηθεί κάποια συζήτηση (στις «Δύο Νέες Επιστήμες») για τον ορισμό της επιτάχυνσης και της στιγμιαίας ταχύτητας στην ελεύθερη πτώση, ο αμερόληπτος ακροατής Sagredo προτείνει:

Από την προηγούμενη μελέτη μου φαίνεται ότι μπορούμε να λάβουμε τη σωστή απάντηση στο ερώτημα «τι προσδίδει επιτάχυνση στην κίνηση των βαρέων σωμάτων;» που έχει μελετηθεί από τους φιλοσόφους.

Ο Salviati (το alter ego του Γαλιλαίου) διακόπτει απότομα τον προηγούμενο συλλογισμό με τούτα τα λόγια:

Δεν νομίζω ότι τώρα είναι η κατάλληλη στιγμή να διερευνήσουμε την αιτία της επιτάχυνσης στις φυσικές κινήσεις, για την οποία έχουν διατυπωθεί πολλές απόψεις από τους φιλοσόφους... Προς το παρόν, ο σκοπός του Συγγραφέα μας είναι απλώς η ανάδειξη και η διερεύνηση ορισμένων ιδιοτήτων της επιταχυνόμενης κίνησης, οποιαδήποτε κι αν είναι η αιτία της επιτάχυνσης...

Με άλλα λόγια, ο Γαλιλαίος απορρίπτει κατηγορηματικά έναν από τους στόχους του Αριστοτέλη, να ερμηνευθούν, δηλαδή, από την πρώτη στιγμή συνολικά τα χαρακτηριστικά της ελεύθερης πτώσης. Η δήλωση του Salviati περιέχει μια σύγχρονη άποψη: Ένα απολύτως εμφανές χαρακτηριστικό της σύγχρονης επιστημονικής έρευνας είναι η ικανότητα του ερευνητή να περιορίζει το στόχο του. Έτσι, κάθε φορά πραγματοποιείται ένα επιπλέον βήμα στην κατανόηση και αποφεύγονται περιττές ανησυχίες και συγχύσεις που δημιουργούν οι πρόωρες και άσχετες με το ζητούμενο ερωτήσεις. (Η συγκεκριμένη τακτική, βεβαίως, δεν έχει πάντοτε επιτυχία: σε ορισμένες περιπτώσεις, μάλιστα, οδηγεί στην απόκρυψη συμπερασμάτων και εμποδίζει τη λύση του προβλήματος. Το να αποφασίσουμε με επιτυχία πότε και σε ποια έκταση θα περιορίσουμε την έρευνά μας χαρακτηρίζει ακόμα τους ιδιοφυείς.)

3. Ο Γαλιλαίος παραβλέποντας την αντίσταση του αέρα στην πτώση του σώματος, εισήγαγε την *εξιδανίκευση* στην επιστημονική σκέψη. Αντλήθηκε ότι μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατανόηση της Φύσης χωρίς να ασχοληθούμε από την πρώτη στιγμή με όλες τις λεπτομέρειες και τις περιπλοκότητες των φυσικών φαινομένων: η αντίληψή μας βελτιώνεται μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων. Ο κύριος όγκος των θεμάτων που μελετάμε στην εισαγωγική φυσική περιορίζεται σε παρόμοιες απλουστεύσεις και εξιδανικεύσεις. Πρέπει, λοιπόν, να ενημερώνουμε συνεχώς τους μαθητές για τη συγκεκριμένη στρατηγική. Δύσκολα, ωστόσο, μπορούμε να υποστηρίξουμε την άποψη αυτή καλύτερα από τον ίδιο τον Γαλιλαίο:

Όσον αφορά τις διαταραχές που προκαλεί η αντίσταση του μέσου είναι... σημαντικές και, λόγω των πολλαπλών μορφών της, η αντίσταση αυτή δεν υπόκειται σε αμετάβλητους νόμους και λεπτομερή περιγραφή. Αν, λοιπόν, λάβουμε υπόψη μας την αντίσταση του αέρα στις κινήσεις που μελετάμε, θα δούμε ότι ο αέρας επιδρά σε κάθε κίνηση, και μάλιστα με άπειρη ποικιλία τρόπων, που οφείλεται στην άπειρη ποικιλία της μορφής, του βάρους και της ταχύτητας των βλημάτων... Είναι αδύνατο, λοιπόν, να περιγράψουμε ακριβώς αυτά τα χαρακτηριστικά... άπειρα στον αριθμό τους. Για να χειριστούμε επιστημονικά το θέμα, είναι απαραίτητο να απομακρυνθούμε απ' αυτές τις δυσκολίες. Κατόπιν, αφού ανακαλύψουμε και αποδείξουμε τα θεωρήματα στην περίπτωση που δεν υπάρχει αντίσταση, μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε και να τα εφαρμόσουμε έως εκείνο το όριο που μας διδάσκει η εμπειρία.

4. Η επίκληση από τον Γαλιλαίο της μαρτυρίας του πειράματος παρουσιάζεται συχνά παραμορφωμένα και απλοϊκά. Υπονοείται, δηλαδή, ότι η μελέτη της κύλισης σε κεκλιμένο επίπεδο υπήρξε το «πρώτο πείραμα» και ότι πριν απ' αυτό δεν είχαν εκτελεστεί παρατηρήσεις και πειράματα. Στην πραγματικότητα, οξυδερκείς και ευφυείς παρατηρητές υπήρχαν ήδη από τους κλασικούς χρόνους. Λόγου χάρη, οι Έλληνες επικαλούνταν την αντίσταση που εμφανίζει η φουσχωμένη κύστη ενός χοίρου (αν προσπαθήσουμε να τη συμπιέσουμε) για να αποδείξουν άμεσα την υλικότητα του αέρα. Επίσης, οι βιολογικές μελέτες του Αριστοτέλη προκαλούν μέχρι σήμερα το θαυμασμό των βιολόγων. Οι αρχαίοι, ωστόσο, δεν σχεδίαζαν πειράματα για να ελέγχουν υποθέσεις. Το νέο στοιχείο στις «Δύο Νέες Επιστήμες» ήταν η προμελετημένη διατύπωση μιας υπόθεσης (λόγου χάρη το ότι το Δυ/Δι είναι σταθερό στη «φυσιολογικά επιταχυνόμενη» κίνηση, δηλαδή στη βαρυτικά επιταχυνόμενη κίνηση) και ο σχεδιασμός ενός πειράματος για τον έλεγχο αυτής της υπόθεσης.

5. Ο Γαλιλαίος έχοντας περιορισμένες δυνατότητες, λόγω της σχετικά χονδροειδούς μεθόδου μέτρησης χρονικών διαστημάτων (ζύγιζε την ποσότητα του νερού που έρρεε από ένα μεγάλο δοχείο), μπόρεσε να εκτελέσει παρατηρήσεις για λίγες μόνο κλίσεις του κεκλιμένου επιπέδου. Για να καταλήξει στα σημαντικότερα συμπεράσματά του έπρεπε να υποστηρίξει με επιχειρήματα την άποψή του για τις οριακές (ασυμπτωτικές) καταστάσεις. Αρχικά, λοιπόν, απέδειξε ότι η επιτάχυνση παραμένει σταθερή για κάθε κλίση στην οποία μπόρεσε να εκτελέσει παρατηρήσεις. Κατόπιν, υποστήριξε ότι θα έπρεπε να αναμένουμε ότι η συγκεκριμένη συμπεριφορά επιμένει έως το όριο όπου η κλίση γίνεται 90° , οπότε το σώμα πέφτει πλέον ελεύθερα. Συμπεράνανε, λοιπόν, ότι η ελεύθερη πτώση είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Δεν περιορίστηκε, ωστόσο, μόνο στη μία οριακή περίπτωση· εξέτασε, επί-

σης, και την αντίθετή της, την κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο (μηδενικής κλίσης):

... κάθε ταχύτητα, από τη στιγμή που θα αποδοθεί σε ένα κινούμενο σώμα, διατηρείται απολύτως σταθερή για τόσο χρόνο όσο οι εξωτερικές αιτίες της επιτάχυνσης και της επιβράδυνσης έχουν απομακρυνθεί. Πρόκειται για μια συνθήκη που συναντάται μόνο στα οριζόντια επίπεδα. Και τούτο, επειδή στην περίπτωση που το σώμα κατεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο υπάρχει μια αιτία που επιταχύνει το σώμα, ενώ όταν ανεβαίνει υπάρχει η επιβράδυνση. Από αυτό προκύπτει ότι η κίνηση κατά μήκος του οριζόντιου επιπέδου είναι αέναη: Αν η ταχύτητα είναι σταθερή, δεν μειώνεται ούτε ατονεί...

Ο Γαλιλαίος, λοιπόν, μελετώντας μια ασυμπτωτική περίπτωση κατέληξε στην πρώτη σωστή προσέγγιση του Νόμου της Αδράνειας: Αντί να αναζητάμε τι διατηρεί ένα σώμα σε κίνηση, θά 'πρεπε καλύτερα να αναζητάμε τι το αναγκάζει να σταματήσει.

Σε ελάχιστα εγχειρίδια έχουν επινοηθεί καταστάσεις όπου οι μαθητές καθοδηγούνται να εξετάσουν οριακές περιπτώσεις, για να εξαγάγουν μια ιδέα ή ένα συμπέρασμα ή για να ελέγξουν απλώς την αξία των αποτελεσμάτων τους στη λύση ενός προβλήματος απ' αυτά που υπάρχουν στο τέλος των εγχειριδίων. Η κατάσταση που μόλις αναλύσαμε είναι χρονικά από τις πρώτες στις οποίες οι μαθητές μπορούν να παρακολουθήσουν αυτό το είδος συλλογισμού και να διαισθανθούν τη δύναμή του. Προσφέρεται, λοιπόν, για πολύτιμη εκμετάλλευση, λόγω του διανοητικού περιεχομένου της.

6. Ούτε ο Πλάτων ούτε ο Αριστοτέλης πίστευαν ότι τα μαθηματικά σχετίζονται με την περιγραφή και την κατανόηση του πραγματικού φυσικού κόσμου. Για τον Πλάτωνα η φυσική με τις αβεβαιότητές της απείχε πολύ από την καθαρή, απόλυτη αλήθεια και από την πραγματικότητα των μαθηματικών εννοιών: Αν και μπορούμε να φανταστούμε μια εφαιπτομένη σε κάποιο κύκλο, δεν μπορούμε με τον πιο λεπτεπίλεπτο διαβήτη και γνώμονα να κατασκευάσουμε έναν κύκλο και μια ευθεία με μόνο ένα κοινό σημείο μεταξύ τους. Ο Αριστοτέλης αντιλαμβανόταν αντίστροφα τούτη την κατάσταση: Η πραγματικότητα στηρίζεται στις μορφές, τις διαδικασίες και τις ποιότητες του φυσικού κόσμου — χαρακτηριστικά που είναι αδύνατο να περιγραφούν απολύτως με όρους της ακριβούς, αφηρημένης και εξωπραγματικής αλήθειας των μαθηματικών. Η βαθιά διχογνωμία αποτυπώθηκε στις κλασικές σπουδές και μεταφέρθηκε στην Αναγέννηση (αναγέννηση της κλασικής αρχαιότητας). Ο Γαλιλαίος προσπάθησε να ανατρέψει αυτές τις απόψεις εγκαινιάζοντας έτσι τον εξαιρετικά γόνιμο κλάδο της μαθηματικής φυσικής. Ο κλάδος αυτός έφτασε στο αποκορύφωμά του με τον Νεύτωνα, τον Laplace, τον Maxwell, τον Einstein και τον Schrödinger, και παίζει κυρίαρχο ρόλο στη σύγχρονη επιστήμη.

Ο Γαλιλαίος είχε προηγουμένως υποστηρίξει: Ο Κοπέρνικος κατέταξε τη Γη μεταξύ των ουράνιων σωμάτων· παράλληλα η αστρονομία υπήρξε πάντοτε μαθηματική επιστήμη· επειδή, λοιπόν, τα μαθηματικά εφαρμόζονταν στην κίνηση των ουράνιων σωμάτων, εφαρμόζονται και στη Γη. Ο Westfall (1971) αναφέρει: «Αν οι προαιώνιοι θεοί προσέφεραν μόνο ένα αντικείμενο στα Μαθηματικά, η Γη θα ήταν από τις πρώτες επιλογές τους... [Ο Γαλιλαίος] συμπλήρωσε τη μαθηματική επιστήμη των ισορροπούντων σωμάτων με τη μαθηματική επιστήμη των κινούμενων σωμάτων».

Στις «Δύο Νέες Επιστήμες» ο Γαλιλαίος προπαγανδίζει συνεχώς την ομορφιά και τη δύναμη των μαθηματικών και καταδεικνύει την εφαρμοσιμότητά τους στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Αφού τοποθετήσει το ζήτημα των κινηματικών εξισώσεων στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, διακηρύσσει:

[Ανακάλυψα] ...ορισμένες ιδιότητες της [φυσιολογικά επιταχυνόμενης] κίνησης τις οποίες αξίζει να γνωρίζουμε και οι οποίες μέχρι τώρα δεν είχαν παρατηρηθεί ούτε αποδειχθεί. Ορισμένες επιπόλαιες παρατηρήσεις είχαν γίνει. Γνωρίζαμε, λόγω χάρη, ότι η φυσιολογική κίνηση ενός βαρέος σώματος που πέφτει είναι συνεχώς επιταχυνόμενη. Μέχρι τώρα, ωστόσο, δεν είχε μελετηθεί το είδος της επιτάχυνσης. Όσο γνωρίζω, ουδείς μέχρι τώρα έχει αποδείξει ότι ο λόγος μεταξύ των διαστημάτων που διανύει σε ίσα χρονικά διαστήματα ένα σώμα (που, ενώ αρχικά ηρεμούσε, πέφτει ελεύθερα) είναι ίδιος με το λόγο μεταξύ των περιττών αριθμών, αν αρχίσουμε από τον αριθμό ένα.

[Η εξαγωγή του προηγούμενου συμπεράσματος από την εξίσωση $\Delta s = (1/2)g(\Delta t)^2$ είναι πολύτιμη άσκηση για το σπίτι. Αναγκάζει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν λόγους, αντί να τους αποφύγουν, αντικαθιστώντας απλώς στους τύπους.]

Για τον Γαλιλαίο η εμφάνιση ακέραιων αριθμών στην περιγραφή ενός συνηθισμένου φυσικού φαινομένου είχε βαθύ φιλοσοφικό νόημα: Έδειχνε ότι η φύση ήταν κατά μια έννοια «μαθηματική» και ότι τα μαθηματικά εφαρμόζονται με επιτυχία στη φυσική φιλοσοφία. Σήμερα, η εμφάνιση ακέραιων αριθμών μάς συναρπάζει είτε αυτό συμβαίνει στο συντονισμό και στα στάσιμα κύματα είτε στην εξίσωση του Balmer και στην κβαντική μηχανική, είτε στον χημικό νόμο των πολλαπλών αναλογιών, είτε στην απόδειξη του Mendel για τη διαφοροποίηση σε κάποιο σημείο του γενετικού συστήματος:

Ο Γαλιλαίος προσπαθώντας να περιγράψει με μαθηματικό τρόπο τη βολή, χρησιμοποίησε για πρώτη φορά την αρχή της σύνθεσης:

Στις προηγούμενες σελίδες συζητήσαμε τις ιδιότητες της ομοιόμορφης

κίνησης και της φυσιολογικά επιταχυνόμενης κίνησης... Προτείνω, λοιπόν, να επεκτείνουμε τούτες τις ιδιότητες στην κίνηση ενός σώματος η οποία προκύπτει από τη σύνθεση δύο άλλων, μιας ομοιόμορφης και μιας επιταχυνόμενης... Αυτό το είδος κίνησης εμφανίζεται σε ένα κινούμενο βλήμα...

Ο Γαλιλαίος, αφού παρουσιάζει την κίνηση ενός βλήματος, αποδεικνύει ότι το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται όταν η γωνία βολής είναι 45° . Στη συνέχεια, βάξει τον Sagredo να πει:

Η δύναμη των αυστηρών αποδείξεων, όπως συμβαίνει στα μαθηματικά, με γεμίζει θαυμασμό και ευχαρίστηση. Από στοιχεία που παραθέτουν οι πυροβολητές, γνώριξα ήδη ότι κατά τη χρησιμοποίηση των κανονιών και των όλμων το μέγιστο βεληνεκές... επιτυγχάνεται όταν η γωνία βολής είναι 45° . το να κατανοήσουμε, όμως, γιατί συμβαίνει αυτό έχει πολύ μεγαλύτερη σημασία από την απλή μαρτυρία άλλων ανθρώπων ή ακόμα και από τα αποτελέσματα επαναλαμβανόμενων πειραμάτων.

Νομίζω ότι το απόσπασμα αυτό καταδεικνύει τον τεράστιο πλούτο της κινηματικής. Μπορούμε, λοιπόν, να παρουσιάσουμε την ανάπτυξη της κινηματικής όχι μόνο ως έναν σημαντικό σταθμό στην ιστορία του πνεύματος, αλλά και ως δείγμα ορισμένων χαρακτηριστικών της σύγχρονης σκέψης και αναζήτησης. Τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μάλιστα εμφανίζονται σε πρωταρχικό στάδιο μέσα από τη μελέτη ενός σχετικά απλού θέματος. Η γνώση που αποκτά ο μαθητής με αυτό τον τρόπο είναι τουλάχιστον μια από τις συνιστώσες της «γενικής» ή «ελεύθερης» μόρφωσης που πρέπει να παρέχεται μέσω μιας σειράς μαθημάτων θετικών επιστημών· είναι, λοιπόν, σημαντική τόσο για τους επιστήμονες των θετικών επιστημών και τους μηχανικούς όσο και για τους επιστήμονες των θεωρητικών επιστημών. Πρόκειται για ένα μόνο στοιχείο της καλλιέργειας στις θετικές επιστήμες και όχι για το μοναδικό. Θεωρώ ότι μια από τις σοβαρότερες ελλείψεις των περισσότερων εισαγωγικών μαθημάτων φυσικής είναι το ότι οι μαθητές δεν εξετάζονται και ως προς αυτήν τη μορφωτική διάσταση.

2.19 Η παρατήρηση και η εξαγωγή συμπεράσματος

Ένα χαρακτηριστικό των αφηρημένων λογικών συλλογισμών, που δυσκολεύει πολλούς μαθητές, είναι η διάκριση μεταξύ της παρατήρησης και της διαδικασίας εξαγωγής συμπεράσματος. Η κυριότερη αιτία είναι ότι οι μαθητές δεν εξασκούνται στο θέμα αυτό σε κανένα στάδιο της εκπαίδευ-

σής τους. Το πείραμα του Γαλιλαίου με τις μπάλες που κυλάνε στο κεκλιμένο επίπεδο, αποτελεί εξαιρετική ευκαιρία για εξάσκηση σε ένα πλούσιο, μη τετριμμένο πλαίσιο.

Αφού παρουσιάσουμε στους μαθητές όλη την ακολουθία (τη διατύπωση της αρχικής υπόθεσης, το σχεδιασμό του πειράματος, την εκτέλεσή του και την ερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων), τους ζητάμε να την αναλύσουν και να διακρίνουν τα στοιχεία που προκύπτουν από την παρατήρηση από τα στοιχεία που προκύπτουν από τους συλλογισμούς. Οι καθηγητές που δεν ζητούν αυτό το είδος ανάλυσης, αργότερα θα εκπλαγούν από το βάθος και την έκταση της σύγχυσης των μαθητών. Στην αντίθετη περίπτωση θα εκπλαγούν από την καθοδήγηση και τη βοήθεια που προσφέρει η συγκεκριμένη ανάλυση στους μαθητές. Ωστόσο, δεν πρέπει να αναμένουν ότι η σύγχυση θεραπεύεται με αυτή τη μοναδική έκθεση των απαραίτητων ιδεών: η άσκηση πρέπει να επαναλαμβάνεται με κάθε ευκαιρία.

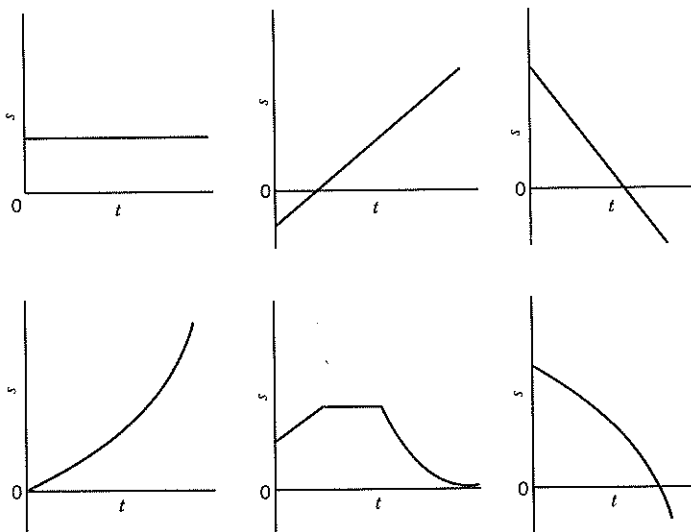
Εκτός από τη διάκριση μεταξύ της παρατήρησης και της εξαγωγής συμπεράσματος, η εξέταση του κεκλιμένου επιπέδου παρέχει πολύτιμη ευκαιρία για να ασχοληθούμε με τους λόγους. Πρέπει να δείξουμε μέσω της ανάλυσης, όπως έκανε ο Γαλιλαίος (και όχι απλώς μέσω αλγεβρικών σχέσεων) το εξής: Ο λόγος μεταξύ των αποστάσεων που διανύει το σώμα, από το σημείο όπου άρχισε να κινείται, ισούται με το λόγο μεταξύ των τετραγώνων των αντίστοιχων χρονικών διαστημάτων. Φαίνεται, ίσως, περιττό να δίνουμε τόση έμφαση στους λόγους. Ωστόσο, μόνο αν το κάνουμε σε κάθε ευκαιρία, θα βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις σοβαρές δυσκολίες και ελλείψεις που περιγράψαμε στο 1ο Κεφάλαιο.

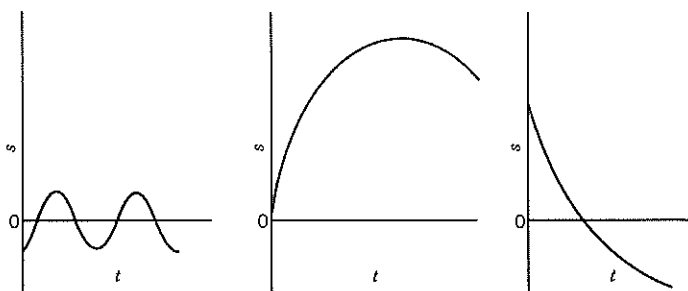
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2Α

Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ

Παρατήρηση: Το 1ο και το 2ο πρόβλημα οδηγούν τους μαθητές να επικαλεστούν την κιναισθητική εμπειρία τους για να διαμορφώσουν την έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και για να ερμηνεύσουν συμβατικές γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν την ευθύγραμμη κίνηση. Αν, μάλιστα, χρησιμοποιήσουν το πρόγραμμα «Microcomputer Based Laboratory» (MBL) [Thorton (1987a) και (1987b)] και τον ανιχνευτή θέσης με ακουστικές συχνότητες, που είναι συνδεδεμένος με μικροϋπολογιστή, η αποτελεσματικότητα των συγκεκριμένων ασκήσεων αυξάνεται σημαντικά: παρέχεται στους μαθητές άμεση οπτική επίδειξη, ανατροφοδότηση και διόρθωση των λαθών, ενισχύοντας την όλη προσπάθεια.

1. Υποθέστε ότι μια ακμή του τραπεζιού είναι η ευθεία στην οποία θα εκτελεστεί η κίνηση. Υποθέστε ότι η θέση $s=0$ βρίσκεται πλησίον του μέσου της ευθείας, οι θετικές τιμές της θέσης δεξιά του και οι αρνητικές αρι-





στερά του. Το χέρι σας παριστάνει το κινούμενο σώμα.

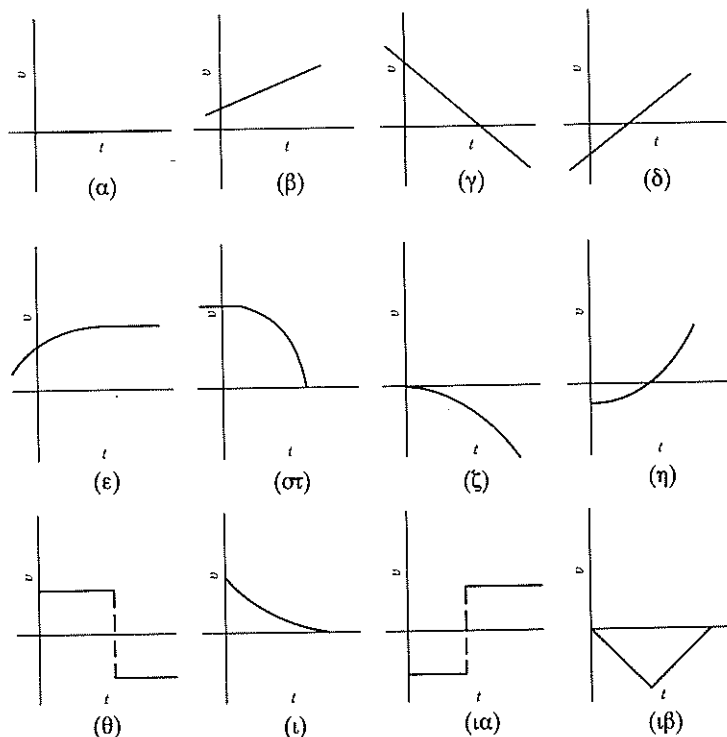
Ερμηνεύστε τη διαδικασία που φαίνεται στα προηγούμενα διαγράμματα της θέσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου, εκτελώντας με το χέρι σας την κίνηση που υποδηλώνουν. Περιλάβετε όλες τις λεπτομέρειες: Λόγου χάρη την επιτάχυνση, την επιβράδυνση, την αλλαγή της φοράς της κίνησης, τη στάση, και την κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Για $t=0$ και στο τέλος της διαδικασίας τοποθετήστε το χέρι σας στη σωστή θέση. Περιγράψτε με λέξεις την κίνηση, καθώς την εκτελείτε.

Αφού εκτελέσετε τις κινήσεις με το χέρι σας, σχεδιάστε το διάγραμμα του v ως προς το t που αντιστοιχεί σε κάθε διάγραμμα του s ως προς το t . Σχεδιάστε το διάγραμμα της ταχύτητας ακριβώς κάτω από το διάγραμμα της θέσης, έτσι ώστε οι αντίστοιχες ενδείξεις του χρονομέτρου με πρώτη ματιά να συμπίπτουν.

2. Υποθέστε ότι μια ακμή του τραπέζιού είναι η ευθεία στην οποία θα εκτελεστεί η κίνηση. Η θέση $s=0$ βρίσκεται πλησίον του μέσου της ευθείας, οι θετικές τιμές της θέσης δεξιά του και οι αρνητικές αριστερά του. Το χέρι σας παριστάνει το κινούμενο σώμα.

Ερμηνεύστε τη διαδικασία που φαίνεται στα επόμενα διαγράμματα της ταχύτητας, ως προς το χρόνο, εκτελώντας την κίνηση με το χέρι σας (βλ. επόμενη σελίδα). Δείχνουν τα διαγράμματα πού πρέπει να βρίσκεται το χέρι σας για $t=0$; Επαναλάβετε την κίνηση πολλές φορές, θέτοντας το χέρι σας κάθε φορά σε διαφορετική αρχική θέση για $t=0$. Περιγράψτε την κίνηση με λέξεις, καθώς την εκτελείτε.

Έχοντας εκτελέσει και περιγράψει τις κινήσεις, σχεδιάστε το αντίστοιχο διάγραμμα του s ως προς το t για κάθε διάγραμμα του v ως προς το t . Σχεδιάστε το διάγραμμα της θέσης ακριβώς πάνω από το διάγραμμα της ταχύτητας, έτσι ώστε οι αντίστοιχες ενδείξεις του χρονομέτρου με πρώτη ματιά να συμπίπτουν.



3. Τα αυτοκίνητα A και B κινούνται σε ευθύ δρόμο ως εξής: Όταν το ρολόι δείχνει $t=0,00$ h, το αυτοκίνητο A βρίσκεται στη θέση $s=3,80$ km και η ταχύτητά του παραμένει 57 km/h. Όταν το ρολόι δείχνει $t=0,50$ h, το B βρίσκεται στη θέση $s=0,00$ km και η ταχύτητά του παραμένει 80 km/h.

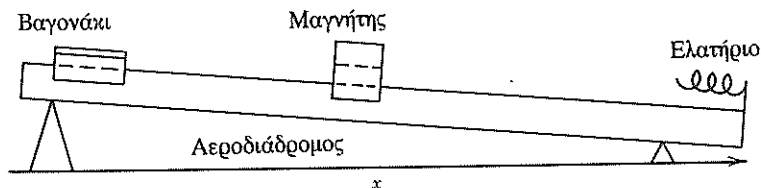
Τι ώρα θα δείχνει το ρολόι, όταν το B θα προφτάσει και θα ξεπεράσει το A ; Σε ποια θέση θα γίνει η συνάντηση; Ύστερα από πόσο χρόνο από τη στιγμή που το B βρισκόταν στο $s=0,00$, το B θα προφτάσει το A ; Τη στιγμή της συνάντησης, πόσο θα έχει απομακρυνθεί το A από τη θέση όπου βρισκόταν για $t=0,0$.

Ελέγξτε τις γνώσεις σας λύνοντας το πρόβλημα με δύο διαφορετικούς τρόπους: Αρχικά, λύστε το πρόβλημα *διαγραμματικά*, σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση του s ως προς το t για τις δύο κινήσεις και προσδιορίζοντας τις ζητούμενες τιμές. Κατόπιν, λύστε το πρόβλημα *αλγεβρικά*, εμφανίζοντας δύο εξισώσεις: μια για τη θέση s_A του αυτοκινήτου A ως συνάρτηση των ενδείξεων t του ρολογιού και μια άλλη για τη θέση s_B του B ως συνάρτηση του t . Για να το πετύχετε, πρέπει να μεταφράσετε τη διατύπωση του προβλήματος σε σύμβολα. Έτσι, προκύπτουν δύο εξισώσεις, που μπορείτε να τις λύσετε ταυτόχρονα ως προς τα άγνωστα μεγέθη, όπως μάθατε στην άλγεβρα.

4. Παρατήρηση προς τον καθηγητή: Τις περισσότερες δοκιμασίες που χρησιμοποίησαν οι Trowbridge και McDermott [(1980), (1981)] στις έρευνές τους μπορούμε να τις προσαρμόσουμε για διδακτικούς σκοπούς, και να βοηθήσουμε τους μαθητές να αφομοιώσουν τις έννοιες. Τα πειράματα επίδειξης είναι δυνατό να γίνουν στην τάξη. Επίσης, οι σχετικές ερωτήσεις δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να παρακολουθήσουν όσες επαναλήψεις των πειραμάτων επιθυμούν και να συζητήσουν μεταξύ τους επιχειρηματολογώντας υπέρ της μιας ή της άλλης άποψης. Πρόκειται για ιδιαίτερα αποτελεσματικό τρόπο: οι μαθητές έρχονται διαισθητικά σε επαφή με τις έννοιες σε πραγματικές καταστάσεις και αποκτούν βαθύτερη γνώση από τη γνώση που τους προσφέρουν τα συνήθη προβλήματα των εγχειριδίων. Ο Trowbridge (1988) έχει προετοιμάσει ένα υλικό, που βασίζεται στη χρήση υπολογιστή με τον τίτλο «Graphs and Tracks», όπου υπάρχουν ασκήσεις αυτού του είδους. Για τη συγκεκριμένη προσπάθειά του τιμήθηκε με κρατικό βραβείο.

5. Παρατήρηση προς τον καθηγητή: Ο Peters (1982) περιγράφει μια άριστη επίδειξη, κάπως πλουσιότερη και συνθετότερη από την επίδειξη των Trowbridge και McDermott και ιδιαίτερα κατάλληλη για μαθητές που προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί. Η συσκευή απεικονίζεται στο Σχ. 2Α-1. Ένα βαγονάκι γλιστρά προς τα κάτω, πάνω σε έναν λίγο κατηφορικό αεροδιαδρόμο. Στο κατώτερο άκρο του αεροδιαδρόμου υπάρχει ένα σπειροειδές ελατήριο. Ένας συνηθισμένος πεταλοειδής μαγνήτης είναι τοποθετημένος στο μέσο του αεροδιαδρόμου, έτσι ώστε το βαγονάκι να περνά χωρίς τριβές μεταξύ των πόλων του μαγνήτη. Το βαγονάκι ενώ ηρεμεί στο πάνω άκρο, αφήνεται ελεύθερο, οπότε αρχίζει να επιταχύνεται έως το σημείο όπου βρίσκεται ο μαγνήτης. Περνώντας ανάμεσα στους πόλους του, κινείται με σταθερή ταχύτητα λόγω των ρευμάτων Foucault. Κατόπιν, επιταχύνεται ως το ελατήριο. Φτάνοντας στο ελατήριο αναπηδά ως το μαγνήτη. Τέλος, επιστρέφει στο ελατήριο και αναπηδά ακόμα μια φορά.

Αφού εκτελέστηκαν πολλές επαναλήψεις του πειράματος μπροστά στους μαθητές, τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν σε λευκό χαρτί τη γραφική παράσταση του s ως προς το t και του v ως προς το t . Η άσκηση δόθηκε σε

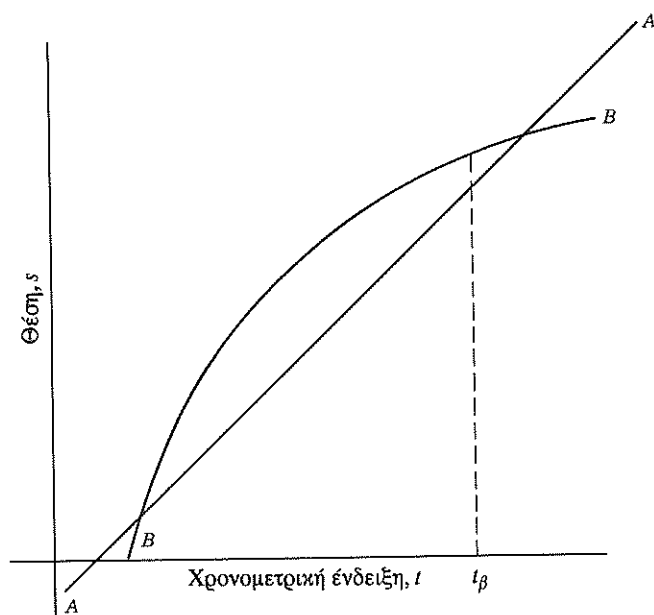


Σχήμα 2Α-1 Επίδειξη του κινούμενου βαγονιού [Peters (1982)].

μια ομάδα επίλεκτων μαθητών που παρακολουθούσαν παραδόσεις φυσικής στις οποίες χρησιμοποιούνταν απειροστικός λογισμός. Προηγουμένως, στην τάξη είχε αναπτυχθεί η ευθύγραμμη κίνηση και είχε παρουσιαστεί με ακρίβεια το νόημα του s και του t . Ο Peters αναφέρει ότι μόνο το 30% των επίλεκτων μαθητών αναπαρέστησε με σχετική ακρίβεια την κίνηση την πρώτη φορά που την παρακολούθησε. Επίσης, περιγράφει και αναλύει ορισμένες από τις πιο διαδεδομένες λανθασμένες απαντήσεις και συγχύσεις που εμφανίστηκαν.

6. Παρατήρηση προς τον καθηγητή: Το επόμενο πρόβλημα είναι μια εύκολα βαθμολογίσιμη μεταφορά στο χαρτί του γυμνάσιματος των Trowbridge και McDermott για τη σύγκριση ταχυτήτων, για την οποία συζητήσαμε στο εδάφιο 2.15. Από την πείρα μου προέκυψε ότι τα στατιστικά συμπεράσματα που εξάγονται από τη μελέτη των απαντήσεων των μαθητών (αν το πρόβλημα δοθεί με αυτή τη μορφή) είναι —προς μεγάλη μας έκπληξη— παρόμοια με τα συμπεράσματα που παραθέτουν οι Trowbridge και McDermott. Η επαφή με αυτό το πρόβλημα βοηθά ορισμένους μαθητές να ξεπεράσουν τις πρωτογενείς αντιλήψεις τους και να αντιληφθούν σαφέστερα τη διαφορά μεταξύ της έννοιας της θέσης και της ταχύτητας.

Στο Σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της θέσης δύο σφαιρών A και B ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου. Οι σφαίρες κινούνται ευθύγραμμα σε παράλληλες τροχιές.



(α) Σημειώστε με το σύμβολο t_a πάνω στον άξονα του t τις χρονικές στιγμές που η μια σφαίρα προσπερνά την άλλη.

(β) Τη στιγμή που η ένδειξη του χρονομέτρου είναι t_B , ποια από τις δύο σφαίρες κινείται γρηγορότερα, η Α ή η Β;

(γ) Σημειώστε με το σύμβολο t_r πάνω στον άξονα του t τις χρονικές στιγμές που οι δύο σφαίρες έχουν την ίδια ταχύτητα.

(δ) Κατά το χρονικό διάστημα που φαίνεται στο διάγραμμα η σφαίρα Β:

- (1) επιταχύνεται συνεχώς
- (2) επιβραδύνεται συνεχώς
- (3) κατά ένα μέρος του χρονικού διαστήματος επιταχύνεται και κατά το υπόλοιπο επιβραδύνεται.

(Σημειώστε τη σωστή απάντηση.)

7. Παρατήρηση που είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί έξω από την αίθουσα διδασκαλίας: Κρατήστε μια μπάλα (λόγου χάρη του τένις ή οποιουδήποτε παιδικού παιχνιδιού) με το χέρι σας τεντωμένο και, κατόπιν, αφήστε την να πέσει κατακόρυφα. Παρατηρήστε αρκετές φορές τις αναπηδήσεις της στο έδαφος. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του s ως προς το t και του v ως προς το t για τη συμπεριφορά που παρατηρήσατε. Βεβαιωθείτε ότι έχετε τοποθετήσει τα διαγράμματα ακριβώς το ένα κάτω από το άλλο, έτσι ώστε οι αντίστοιχες ενδείξεις του χρονομέτρου να βρίσκονται η μια κάτω από την άλλη.

8. Παρατήρηση που είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί έξω από την τάξη: Κρατήστε ένα φύλλο χαρτί παράλληλα προς το έδαφος και αφήστε το να πέσει κατακόρυφα. Παρατηρήστε τη συμπεριφορά του και το είδος της επιτάχυνσής του. Κατόπιν τσαλακώστε το, ώστε να γίνει μια σφιχτή μπάλα, και αφήστε το να πέσει κατακόρυφα. Συγκρίνετε τις δύο περιπτώσεις, περιγράφοντας και ερμηνεύοντας με δικά σας λόγια τις διαφορές.

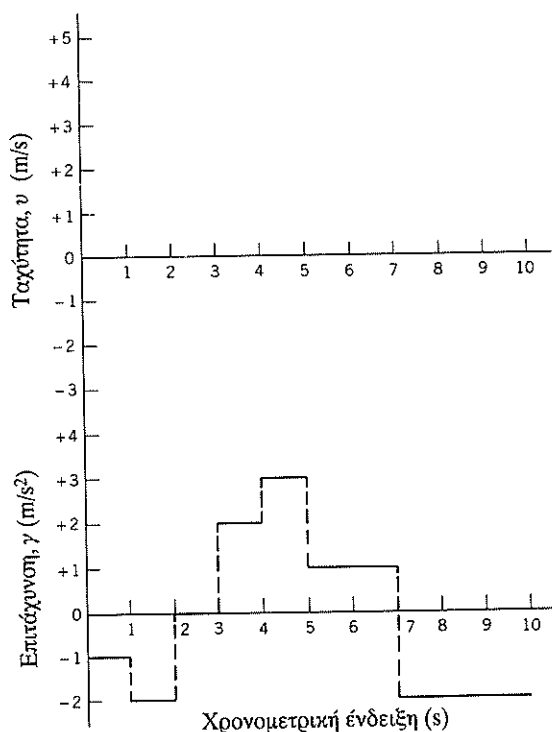
9. Παρατήρηση που είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί έξω από την τάξη (ή επίδειξη που είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί μέσα στην τάξη): Σε νήμα μήκους 3 m δέστε μερικά βάρη (π.χ. μεταλλικά «παξιμάδια», ροδέλες, πέτρες ή κομμάτια ξύλου) σε ομοιόμορφα διαστήματα μήκους 30 ή 40 cm. Ανεβείτε πάνω σε μια καρέκλα ή σε ένα τραπέζι ή (αν είναι απαραίτητο) σε μια σκάλα και κρατήστε κατακόρυφα το νήμα με τα βάρη, ώστε το κάτω άκρο του να απέχει από το πάτωμα όσο απέχουν τα βάρη μεταξύ τους. Αφήστε το νήμα να πέσει και ακούστε προσεκτικά τον κρότο που κάνουν τα βάρη, καθώς χτυπούν στο πάτωμα.

Περιγράψτε τον ήχο που ακούτε: οι κρότοι πυκνώνουν συνεχώς, αραιώνουν ή ακούγονται ομοιόμορφα;

10. Παρατήρηση προς τον καθηγητή: Το επόμενο είδος άσκησης βοηθά να οδηγηθούν οι μαθητές να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ της επιτάχυνσης και της ταχύτητας και να συνδέσουν την επιτάχυνση με τη μεταβολή της ταχύτητας:

Στο κάτω διάγραμμα εμφανίζεται η εξέλιξη της επιτάχυνσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου σε μια ευθύγραμμη κίνηση. Υπάρχουν περίοδοι με σταθερή επιτάχυνση και απότομα άλματα από μια τιμή της επιτάχυνσης σε άλλη. Αυτό είναι απολύτως πραγματοποιήσιμο στη Φύση: αν και οι αλλαγές στην επιτάχυνση είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν ακαριαία (δηλαδή σε μηδενικό χρονικό διάστημα), είναι, ωστόσο, δυνατό να πραγματοποιηθούν σε χρονικά διαστήματα σύντομα συγκριτικά με την κλίμακα που χρησιμοποιείται στη γραφική παράσταση. Κάτι τέτοιο υπονοείται και στο εν λόγω παράδειγμα.

Στο πάνω διάγραμμα σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τις χρονομετρικές ενδείξεις, θεωρώντας ότι το σώμα ξεκινά από την ηρεμία τη στιγμή $t=0$. Προσδιορίστε τη μορφή της γραφικής παράστα-



Η επιτάχυνση γ ως προς τη χρονομετρική ένδειξη t

σης, αν το σώμα έχει μη μηδενική αρχική ταχύτητα για $t=0$.

11. Παρατήρηση προς τον καθηγητή: Το επόμενο πρόβλημα αναγκάζει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν μια περίπτωση όπου η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή, και να αντιληφθούν ότι οι κινηματικές εξισώσεις που διαθέτουν δεν εφαρμόζονται σ' αυτήν. Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι σημαντική και διαφωτιστική. Σπάνια, ωστόσο, αναφέρεται σε ένα εισαγωγικό μάθημα φυσικής.

Ένα σώμα εκκινεί από την ηρεμία από τη θέση $s=0,0$, όταν η ένδειξη του χρονομέτρου είναι $t=0,0$. Όταν το χρονόμετρο δείχνει $t=5,0$ sec, παρατηρούμε ότι το σώμα βρίσκεται στη θέση $s=+40,0$ m και έχει στιγμιαία ταχύτητα $v=+11,0$ m/sec.

Συγκρίνετε προσεκτικά τα δεδομένα. Η επιτάχυνση του σώματος ήταν σταθερή ή μεταβλητή; Εξηγήστε το συλλογισμό σας. Οι κινηματικές εξισώσεις που χρησιμοποιούσατε στο μάθημα εφαρμόζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση; Γιατί εφαρμόζονται ή γιατί όχι; Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου, που τα δεδομένα υποδηλώνουν. Προκύπτει ευθεία ή καμπύλη; Αν προκύπτει καμπύλη, είναι κοίλη με τα κοίλα προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

12. Παρατήρηση προς τον καθηγητή: Στην επόμενη άσκηση οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν με δικά τους λόγια το νόημα των όρων μιας εξίσωσης.

Σχεδόν ποτέ δεν αντιμετωπίζουν παρόμοιες ασκήσεις. Οι συγκεκριμένες ασκήσεις, ωστόσο, βοηθούν σημαντικά στη μάθηση και την κατανόηση. Παρόμοια άσκηση είναι δυνατό να τεθεί και στη συνέχεια σε συνδυασμό με τις εξισώσεις που προκύπτουν στη μελέτη της βολής.

Θεωρήστε την επόμενη συνηθισμένη κινηματική εξίσωση, που περιγράφει την αλλαγή της θέσης ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$$

Αποδώστε με δικά σας λόγια τη φυσική ερμηνεία κάθε όρου του δεξιού μέλους της εξίσωσης.

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Ο Νόμος της Αδράνειας και η έννοια της δύναμης ανέκαθεν δυσκόλευαν σοβαρά τους μαθητές. Τα θέματα αυτά, λοιπόν, έχουν ερευνηθεί περισσότερο από κάθε άλλο. Αν λάβουμε υπόψη μας το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε η ανθρώπινη σκέψη για να ανακαλύψει τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των φυσικών φαινομένων, τότε η προηγούμενη διαπίστωση δεν πρέπει να μας εκπλήσσει. Σήμερα, οι αρχάριοι μαθητές αντιμετωπίζουν, αναπόφευκτα, ορισμένα από τα αρχικά εμπόδια και τις δυσκολίες, όσο κι αν οι καθηγητές συντομεύουν το χρόνο και «λειαίνουν το έδαφος», μέσω της καθοδήγησης και της διδασκαλίας.

Οι περισσότεροι μαθητές έρχονται σε μας με κανόνες και έννοιες που τους υπαγορεύει η διαίσθησή τους. Συνήθως, αποκαλούμε υποτιμητικά αυτούς τους κανόνες και τις έννοιες «λανθασμένες αντιλήψεις». Οι διαισθητικές αντιλήψεις, ωστόσο, δεν είναι παράλογες ούτε χαρακτηρίζουν ορισμένους μόνο μαθητές. Από παιδαγωγική άποψη, λοιπόν, προσανατολιζόμαστε ορθότερα και προσεκτικότερα αν δεχτούμε τις συγκεκριμένες απόψεις μάλλον ως «πρωτογενείς αντιλήψεις» (που πρέπει να τις τροποποιήσουμε μέσω της συγκεκριμένης εμπειρίας) παρά ως «λανθασμένες αντιλήψεις» (που πρέπει να τις εξαλείψουμε, αμέσως, με την προφορική διδασκαλία και με λίγες επιδείξεις στις οποίες οι μαθητές δεν συμμετέχουν ενεργά).

Έρευνες, που παρατίθενται στη συνέχεια του Κεφαλαίου, έχουν επανειλημμένα αποκαλύψει ότι οι πρωτογενείς αντιλήψεις έχουν βαθιές ρίζες και ανθίστανται σθεναρά σε κάθε μεταβολή. Επιπλέον, οι εν λόγω αντιλήψεις δεν είναι σταθερές: «ολισθαίνουν» από τη μια φυσική κατάσταση στην άλλη. Εμφανίζονται, λοιπόν, αντιφάσεις που δεν γίνονται αμέσως αντιληπτές.

Όπως συμβαίνει και με τις έννοιες της κινηματικής που μελετήσαμε στο 2ο Κεφάλαιο, δεν περιμένουμε από το μαθητή να αφομοιώσει τη Δυναμική μόνο μέσω της προφορικής παρουσίασης, όσο διαιγής κι αν είναι αυτή. Επιπλέον, τα συμβατικά προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος κάθε σχετικού κεφαλαίου είναι ανεπαρκή. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα υποτιμάμε ή ότι συνηγορούμε στην κατάργησή τους. Συνιστούν απολύτως ουσιαστικές ασκήσεις για τη χρήση των «εργαλείων» της δυναμικής. Χωρίς τα εργαλεία αυτά

ο μαθητής δεν θα μπορούσε να αποκτήσει την ικανότητα να εφαρμόζει και να χρησιμοποιεί τους νόμους της κίνησης. Ωστόσο, στα υπάρχοντα εγχειρίδια, τα περισσότερα προβλήματα περιορίζονται κατά κανόνα σε υπολογισμούς. Τα ζητούμενά τους σπάνια προκαλούν σκέψεις φαινομενολογικού και πειραματικού χαρακτήρα, που, όπως έχουν δείξει οι έρευνες, βοηθούν το μαθητή να ξεπεράσει τα εννοιολογικά φράγματα. Έχει αποδειχθεί επανειλημμένα ότι η ικανότητα του μαθητή να απαντά πλήρως ή εν μέρει στα προβλήματα δεν αποτελεί παράλληλα και εγγύηση ότι ο μαθητής έχει όντως κατανοήσει τις βασικές έννοιες. Επίσης, οι ποιοτικές, φαινομενολογικού χαρακτήρα, ερωτήσεις που υπάρχουν στο τέλος των κεφαλαίων είναι από μόνες τους ανεπαρκείς, όταν δεν συνοδεύονται από συγκεκριμένη εμπειρία, «σωκρατική» καθοδήγηση και τελικά από κάποια εξέταση.

Οι διαυγείς, ζωντανές παρουσιάσεις, παράλληλα με τα συμβατικά, ποσοτικά προβλήματα, είναι απαραίτητο να συμπληρώνονται με ερωτήσεις και προβλήματα που απασχολούν τη σκέψη του μαθητή σε συλλογισμούς ποιοτικού και φαινομενολογικού χαρακτήρα. Οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίζουν απτά εμπειρικά δεδομένα, αντιφάσεις και ασυνέπειες, για να αναγκαστούν αφ' ενός να αρθρώσουν με δικά τους λόγια συλλογισμούς και επιχειρήματα, αφ' ετέρου να απορρίψουν τις βαθιά ριζωμένες, αληθοφανείς, διαισθητικές, πρωτογενείς αντιλήψεις τους. Οι εν λόγω αντιλήψεις εμποδίζουν την ανάπτυξη των αντιλήψεων που (αν και αντιτίθενται στη διαισθήση) είναι τελικά οι σωστές. Οι περισσότεροι μαθητές, λοιπόν, έχουν ανάγκη από αρκετές επαφές αυτού του είδους, κατανεμημένες χρονικά σε όλο και πλουσιότερο πλαίσιο. Είναι λάθος να περιμένουμε ότι οι αδυναμίες τους θεραπεύονται με μια σειρά επαναληπτικών μαθημάτων.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια προσπάθεια να βοηθηθεί ο καθηγητής να αντιληφθεί ορισμένα από τα κενά που εμφανίζονται σε πολλές παρουσιάσεις. Υπάρχουν, επίσης, παραδείγματα συμπληρωματικών θεωρήσεων και ασκήσεων, που φαίνεται ότι βοηθούν το μαθητή. Αποτελέσματα της εφαρμογής των προσεγγίσεων που προτείνονται, παρατίθενται από τον Hake (1987) και από τους Tobias και Hake (1988), στο πλαίσιο ενός ελεγχόμενου πειράματος που εκτελέστηκε με τη συμμετοχή προπτυχιακών φοιτητών και συναδέλφων θεωρητικών επιστημών του Πανεπιστημίου της Ιντιάνα.

3.2 Η λογική δομή των νόμων της κίνησης

Το φιλοσοφικό-επιστημολογικό υπόβαθρο της νευτώνειας μηχανικής έχει συζητηθεί εκτενώς και επί μακρόν σε πολλά δοκίμια. Το παρόν Κεφάλαιο, ωστόσο, δεν αποτελεί ανασκόπηση της εκτενούς βιβλιογραφίας. [Ο ενδιαφερόμενος φυσικός μπορεί να βρει μια άριστη σύνοψη των σύγχρο-

νων απόψεων στα άρθρα του Eisenbud (1958) και του Weinstock (1961) που παρατίθενται στον βιβλιογραφικό κατάλογο.] Ωστόσο, πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή και την ανάλυση των εννοιολογικών προβλημάτων των μαθητών, είναι χρήσιμο να μελετήσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της λογικής των Νόμων της Μηχανικής. Σε πολλά εγχειρίδια τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά συχνά παραλείπονται ή περνούν στο περιθώριο σε σύντομο χρονικό διάστημα μετά την παρουσίασή τους.

Πολλές παρουσιάσεις αρχίζουν με μια βασική παράλειψη: παραγνωρίζουν ότι τις λέξεις «δύναμη» και «μάζα» (τις οποίες στην καθημερινή ομιλία τις χρησιμοποιούμε συχνά μεταφορικά) τις δανειστήκαμε από την καθομιλουμένη και τους αποδώσαμε λεπτό τεχνικό νόημα, ασυνήθιστο για το μαθητή. (Σε ορισμένες παρουσιάσεις, μάλιστα, υπονοείται ότι ο μαθητής γνωρίζει εκ των προτέρων την επιστημονική σημασία των συγκεκριμένων όρων.) Οι μαθητές, γενικά, δεν αντιλαμβάνονται αυτόματα ούτε διαισθάνονται παρόμοιες σημασιολογικές μεταβολές: συνεχίζουν να αποδίδουν στους όρους ασαφές μεταφορικό νόημα, το οποίο έχουν προηγουμένως αφομοιώσει ή συναντήσει. Βοηθά πολύ, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι, αν και οι λέξεις παραμένουν οι ίδιες, το νόημά τους έχει απολύτως αναθεωρηθεί.

Πρόκειται για ζήτημα λειτουργικού ορισμού. Ωστόσο, τα περισσότερα εγχειρίδια παραλείπουν, δυστυχώς, τελείως τους λειτουργικούς ορισμούς. Αναπτύσσουν τα αντίστοιχα θέματα σάμπως οι όροι να έχουν ήδη οριστεί ή διατυπώνουν δυσνόητους συλλογισμούς που αποτελούν ουσιαστικά φαύλο κύκλο. Όσο στοιχειωδέστερο είναι το επίπεδο του εγχειριδίου, τόσο η τάση για διατύπωση κυκλικών ορισμών και για «απλοποίηση» των θεμάτων προς όφελος του μαθητή είναι εντονότερη.

Στο συγκεκριμένο πλαίσιο δεν υπάρχει, όντως, ελπίδα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες. Ο βαθμός διείσδυσης στον λειτουργικό ορισμό της «δύναμης» και της «μάζας» — από την άποψη της έμφασης, της αυστηρότητας, της αφαίρεσης και της λεπτολόγησης — επαφίεται στην κρίση του καθηγητή. Ωστόσο, η επιτυχία δεν κατακτάται χωρίς προσπάθεια.

Υπάρχουν επίπεδα εκλέπτυνσης πολύ διαφορετικά μεταξύ τους, και ο καθηγητής πρέπει να επιλέξει το επίπεδο που ταιριάζει στους μαθητές προς τους οποίους απευθύνεται. Επίσης, η διαδικασία του ορισμού είναι δυνατό να επεκταθεί χρονικά: δεν είναι απαραίτητο να εξαντληθεί από την πρώτη στιγμή. Μπορούμε να αρχίσουμε με λιγότερο εκλεπτυσμένο τρόπο και κατόπιν να βοηθήσουμε τους μαθητές να εκλεπτύνουν τις έννοιες, επανερχόμενοι σπειροειδώς στο θέμα και εισάγοντας αυστηρότερους ορισμούς, καθώς με την εξέλιξη του μαθήματος όλο και περισσότερο θα συλλαμβάνουν τη συνολική δομή.

Υπάρχουν δύο κύριες διαδικασίες προσεκτικού λειτουργικού ορισμού της «δύναμης» και της «μάζας». Επειδή δεν βρίσκω καλύτερο όρο, ονομά-

ζω την πρώτη διαδικασία «νευτώνεια» (στην πραγματικότητα ο ίδιος ο Νεύτων ουδέποτε διατύπωσε έναν σαφή λειτουργικό ορισμό των εν λόγω όρων). Η άλλη διαδικασία συνδέεται με το όνομα του Ernst Mach (1893).

Στο πλαίσιο της παρουσίασης του Mach, αρχικά ορίζεται η αδρανειακή μάζα. Αυτό πραγματοποιείται με τη μελέτη του πειράματος της συμπεριφοράς βαγονιών: Αποδεχόμεστε ως νόμο της φύσης την εμπειρική παρατήρηση ότι ο λόγος των επιταχύνσεων (κατά συνέπεια της μεταβολής των ταχυτήτων) δύο σωμάτων είναι σταθερή ιδιότητα των σωμάτων. Στη συνέχεια, ορίζουμε το λόγο των μαζών ως τον αντίστροφο λόγο των επιταχύνσεων. Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα ορίζεται ως το γινόμενο mg που αντιστοιχεί στο σώμα. [Πρόκειται, βεβαίως, απλώς για πυκνή περιλήψη μιας εκτενέστερης ακολουθίας συλλογισμών. Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται για όλες τις λεπτομέρειες μια άριστη παρουσίαση υπάρχει στο άρθρο του Weinstock (1961).]

Εξετάζοντας αρκετά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται εκτενώς (χωρίς να ισχυρίζομαι ότι η εξέταση ήταν πλήρης) βρήκα ότι σημαντική μειονότητα χρησιμοποιεί την ακολουθία του Mach. Επειδή η συγκεκριμένη ακολουθία είναι γερά θεμελιωμένη και αυτοσυνεπής, δεν θα συζητήσω λεπτομερώς το παιδαγωγικό περιεχόμενό της· θα αναφέρω απλώς ότι οι περισσότερες παρουσιάσεις της είναι τόσο δυσνόητες και αφηρημένες, ώστε λίγοι μαθητές έχουν όντως την πιθανότητα να συλλάβουν με λειτουργικό τρόπο τις αντίστοιχες έννοιες. Για να επιτευχθεί η κατανόηση, οι καθηγητές πρέπει να επεκτείνουν και να συγκεκριμενοποιήσουν περισσότερο την ανάπτυξη. Πρέπει, ακόμη, να καθοδηγήσουν τους μαθητές να ερμηνεύσουν, να εξηγήσουν και να αναλύσουν τις έννοιες με δικά τους λόγια.

Επειδή τα περισσότερα εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται εκτενώς υιοθετούν τη «νευτώνεια» προσέγγιση (εκκινώντας από τη δύναμη και όχι από τη μάζα) και επειδή ο ίδιος τη χρησιμοποιώ θεωρώντας την περισσότερο συγκεκριμένη, θα την αναλύσω λεπτομερέστερα. Σπεύδω, ωστόσο, να επισημάνω ότι η εν λόγω προσέγγιση δεν είναι μοναδική. Δεν υπάρχει ένας «απόλυτος ορθός» ή αναπόφευκτος δρόμος διαμέσου αυτού του επιστημολογικού πεδίου. Πρωταρχική σημασία έχει η εσωτερική συνέπεια του δικτύου των εννοιών που προσπαθούμε να δημιουργήσουμε. Επαφίεται στον καθηγητή να επιλέξει τις εναλλακτικές λύσεις που θα βοηθήσουν τους μαθητές να διαμορφώσουν σαφέστερη και σταθερότερη αντίληψη. Η αντίληψη αυτή θα υπόκειται, βέβαια, σε περιορισμούς λογικής συνέπειας και θα είναι απαλλαγμένη από τη διαληλλία των νοημάτων.

[Μια εκλεπτυσμένη (από μαθηματική άποψη) παρουσίαση της φαινομενολογικής ακολουθίας που παρουσιάζεται στα επόμενα εδάφια, υπάρχει στο άρθρο του Keller (1987).]

3.3 Λειτουργική ερμηνεία του 1ου Νόμου

Ο Νόμος της Αδράνειας (ή 1ος Νόμος του Νεύτωνα, όπως οι περισσότεροι τον αποκαλούμε) δεν διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Νεύτωνα. Ο Γαλιλαίος τον γνώριζε σχεδόν και ο Καρτέσιος ακριβώς. Πριν ο Νόμος δημοσιευστεί στα «Principia», είχε ήδη αφομοιωθεί από τη σκέψη των πιο δραστήριων και παραγωγικών φυσικών φιλοσόφων, αν και για μερικές δεκαετίες η φυσική της κίνησης διδασκόταν χωρίς να περιέχεται στα σχολικά εγχειρίδια. Στα «Principia» ο Νεύτων δεν διεκδικεί την πατρότητα του Νόμου. Αναγνωρίζει την πρωτοπορία άλλων ερευνητών και παρουσιάζει το Νόμο ως στοιχείο ανεξαρτητοποίησης από τη σχολή του Αριστοτέλη και της «κεκτημένης δύναμης».

Επειδή οι αρχάριοι στο κεφάλαιο της δυναμικής είναι επιφορτισμένοι με ιδέες και κανόνες (που υπαγορεύει η κοινή αντίληψη) για τη συμπεριφορά των κινούμενων σωμάτων, αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία να παρακολουθήσουν τη διείσδυση στα νοήματα. Στα επόμενα εδάφια αναλύουμε τα μαθησιακά προβλήματα που προκύπτουν. Προς το παρόν, επιθυμώ να μελετήσω μια άλλη πλευρά του 1ου Νόμου: πώς μπορούμε να τον ερμηνεύσουμε με λειτουργικό τρόπο μέσω μιας ακολουθίας ορισμού εννοιών;

Στον κατάλογο των ορισμών, που υπάρχει στην αρχή των «Principia», εντοπίζουμε τον Ορισμό IV:

Ασκούμενη δύναμη είναι η δράση που ασκείται σε κάποιο σώμα και μεταβάλλει την κατάσταση της ηρεμίας ή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.

Κατόπιν, ως Νόμο I, μεταξύ των τριών Νόμων της Κίνησης, εντοπίζουμε τον εξής:

Κάθε σώμα παραμένει στην κατάσταση ηρεμίας ή ομαλής κίνησης σε ευθεία γραμμή, εκτός κι αν εξαναγκαστεί να μεταβάλει την κατάστασή του εξαιτίας κάποιων δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.

Στις προηγούμενες διατυπώσεις η διαλληλία των νοημάτων είναι προφανής. Υποδεικνύουν, ωστόσο, τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατό να βοηθήσουμε το μαθητή να ερμηνεύσει το Νόμο I στο πλαίσιο μιας σύγχρονης παρουσίασης. Μέχρι τώρα δημιουργήσαμε απλώς λειτουργικούς ορισμούς των εννοιών της κινηματικής· δεν ορίσαμε τη «δύναμη» και τη «μάζα». Δεχόμαστε, λοιπόν, την άποψη ότι η ηρεμία και η ομαλή ευθύγραμμη κίνηση είναι φυσιολογικές καταστάσεις των σωμάτων και ότι οι αλληλεπιδράσεις με άλλα σώματα είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να μεταβληθεί η συγκεκριμένη κατάσταση. Στο πλαίσιο αυτό ερμηνεύουμε το Νόμο I ως

ποιοτικό λειτουργικό ορισμό της δύναμης, δηλαδή της δράσης ενός σώματος στο υπό εξέταση σώμα, που έχει αποτέλεσμα τη μεταβολή της ταχύτητας του δεύτερου (αν συμπεριλάβουμε στο μέτρο της ταχύτητας τη διεύθυνσή της).

Πραγματοποιούμε, έτσι, το πρώτο βήμα στην κατεύθυνση διατύπωσης ενός λειτουργικού ορισμού της δύναμης. Το επόμενο προκύπτει από τη διατύπωση του Νόμου II.

3.4 Λειτουργικός ορισμός μιας κλίμακας της δύναμης

Στο προηγούμενο εδάφιο επισημάναμε ότι στη διατύπωση του Νόμου της Αδράνειας διακρίνουμε ένα ποιοτικό νόημα της δύναμης: αντιλαμβανόμαστε τη δύναμη ως δράση που ασκείται από άλλα σώματα και μεταβάλλει την ταχύτητα του σώματος. Το επόμενο βήμα είναι να εκλεπτύνουμε την έννοια της δύναμης περιγράφοντάς την ποσοτικά¹. Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να ακολουθήσουμε περισσότερες από μία προσεγγίσεις. Ο ίδιος ο Νεύτων επέλεξε να συνδέσει την «κινούσα δύναμη» (όπως την ονόμασε) με τη μεταβολή της ορμής που οφείλεται στην ώθηση. [Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη συγκεκριμένη προσέγγιση υπάρχουν στο άρθρο των Arons και Bork (1964).] Η σύγχρονη αντίληψη για τη δύναμη διαφέρει από την αντίληψη του Νεύτωνα: είναι, λοιπόν, προτιμότερο να συνεχίσουμε τη μέλημάς με σύγχρονο τρόπο.

Αρχίζουμε παρουσιάζοντας διαδικασίες που μπορούν να εκτελεστούν με τη βοήθεια μικρών βαγονιών που γλιστρούν χωρίς τριβή σε επίπεδο γυάλινο τραπέζι ή σε τραπέζι που καλύπτεται με στρώμα αέρα (οι κινηματο-

1. Στο σημείο αυτό είναι ευκαιρία να αντιληφθούν οι μαθητές άμεσα ότι οι ορισμοί νέων εννοιών σπάνια, αν όχι ποτέ, διατυπώνονται ολοκληρωμένα και αυστηρά την πρώτη φορά που συναντάμε τις έννοιες. Αρχίζουμε, συνήθως, με έναν προκαταρκτικό, δοκιμαστικό, ακόμη και «ακατέργαστο» ορισμό, τον οποίο επεκτείνουμε και βελτιώνουμε καθώς κατανοούμε βαθύτερα το νόημά του, μέσω της χρήσης και των εφαρμογών. Αυτό συμβαίνει ακριβώς με την έννοια της «ταχύτητας»: αρχίζουμε με τον ορισμό της μέσης ταχύτητας στην ευθύγραμμη κίνηση και εκλεπτύνουμε το νόημά της, ορίζοντας αλγεβρική φορά στην ευθεία των αριθμών. Εκλεπτύνουμε ακόμα περισσότερο το νόημά της μέσω της έννοιας της «στιγμιαίας ταχύτητας»: τέλος, γενιζεύουμε τα διανυσματικά χαρακτηριστικά της σε δύο και τρεις διαστάσεις. Σε κάθε στάδιο διατύπωσης νέου ορισμού η έννοια τροποποιείται σημαντικά. Μεταμορφώνεται απολύτως σε νέα έννοια, αν και διατηρείται η αρχική ονομασία της. Με τον τρόπο, ωστόσο, που διδάσκουμε τις έννοιες, οδηγούμε τους μαθητές να προσέχουν την ονομασία των εννοιών χωρίς να συγκρατούν το νόημά τους.

Είναι σημαντική πνευματική εμπειρία για τους μαθητές να αποστασιοποιούνται από το θέμα και να συνειδητοποιούν τη διαδικασία του ορισμού και του επανορισμού κάθε φορά που συναντούν μια τέτοια διαδικασία.

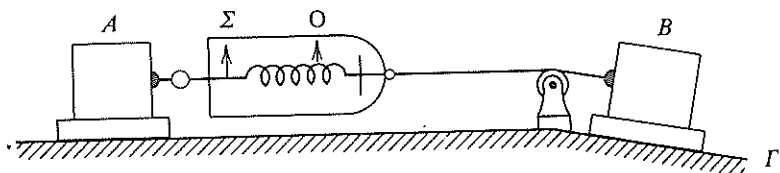
γραφικές ταινίες του PSSC για την «Αδράνεια» και την «Αδρανειακή Μάζα» με αφηγητή τον Edward Purcell παρουσιάζουν ορισμένα πειράματα, παρόμοια με τα ιδεατά πειράματα που θα περιγράψουμε). Επιλέξτε ένα βαγονάκι A που θα αποτελεί το σώμα αναφοράς στα πειράματά μας. Κατόπιν, προσδώστε του διάφορες επιταχύνσεις σε ευθεία γραμμή, τραβώντας το με ένα ελαφρύ ελατήριο. Σε ένα άγραφο χαρτόνι μπορούμε να παρατηρήσουμε και να σημειώσουμε τις επιμήκυνσεις του ελατηρίου (Σχ. 3.4.1, βλ. επόμενη σελίδα).

Η διαίσθηση μας υπαγορεύει, ορθώς, ότι διαφορετική ένταση έλξης προσδίδει στο σώμα A διαφορετική επιτάχυνση. Με κάθε δράση ή έλξη συνδέουμε την αντίστοιχη τιμή της επιτάχυνσης και κατασκευάζουμε την «κλίμακα της δύναμης». Φανταζόμαστε, λοιπόν, τα επόμενα πειράματα: (1) φωτογραφίζουμε σε ίσα χρονικά διαστήματα το βαγονάκι A , καθώς επιταχύνεται· (2) από την ακολουθία των αυξανόμενων μετατοπίσεων προσδιορίζουμε αν η επιτάχυνση είναι ομαλή, όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου παραμένει σταθερή.

Μετρήσεις αυτού του είδους είτε άμεσες, όπως του Σχ. 3.4.1, είτε έμμεσες καταδεικνύουν ότι σταθερή επιμήκυνση του ελατηρίου συνδέεται με σταθερή επιτάχυνση. Επίσης, είναι δυνατό να πειστούμε ότι το φαινόμενο είναι αναπαραγωγίσιμο: η ίδια επιμήκυνση του ελατηρίου προσδίδει την ίδια επιτάχυνση σε διαφορετικές περιπτώσεις και προς διαφορετικές κατευθύνσεις (δεξιά ή αριστερά, βόρεια ή νότια)². Αφού πειστούμε για τη μοναδικότητα και επαναληψιμότητα κάθε πειράματος, συμπληρώνουμε την κλίμακα της δύναμης, σημειώνοντας σε κάθε θέση της βελόνας την αριθμητική τιμή της επιτάχυνσης που προσδίδεται στο βαγονάκι A .

Κατά συνέπεια, οι αριθμοί 1,00, 2,00, 3,00 κτλ. τοποθετούνται στις θέσεις που βρίσκεται η βελόνα, όταν η επιτάχυνση του σώματος είναι αντίστοιχα 1,00, 2,00, 3,00 m/s² κτλ., όπως προσδιορίζεται στις φωτογραφίες. Οι δεκαδικές τιμές προσδιορίζονται με παρόμοιο τρόπο: η τιμή 1,50 δεν τοποθετείται στο μέσο της απόστασης μεταξύ του 1,00 και του 2,00, αλλά στο σημείο που βρίσκεται η βελόνα όταν στο σώμα προσδίδεται επιτάχυνση 1,50 m/s².

2. Ανάλογα με το βαθμό κλέπτυνσης που ταιριάζει στους μαθητές μας μας δίνεται η ευκαιρία να κάνουμε ορισμένες συμπληρωματικές λεπτομερέστερες παρατηρήσεις: το ελατήριο δεν πρέπει να επιμηκύνεται τόσο ώστε η βελόνα να μην επιστρέφει στην αρχική θέση της, όπου η μηδενική ένδειξη αντιστοιχεί σε μηδενική επιτάχυνση. Μεταξύ των πειραμάτων είναι πάντοτε δυνατό να ελέγχουμε την εν λόγω συμπεριφορά. Στην κατασκευή της κλίμακας του δυναμομέτρου πρέπει να επιδεικνύουμε παρόμοια προσοχή, όπως και στη μέτρηση χρονικών διαστημάτων και αποστάσεων με ρολόγια και υποδεκάμετρα αντίστοιχα. Ακριβείς μετρήσεις γίνονται σε ελεγχόμενες συνθήκες θερμοκρασίας, εξάλειψης των κραδασμών, των παραμορφώσεων και άλλων άσχετων επιδράσεων. Είναι βέβαια πρακτικά δύσκολο να εντοπίσουμε και να ελέγξουμε *a priori* τις άσχετες επιδράσεις: τις ανακαλύπτουμε μέσω της δοκιμής, του λάθους και των διαδοχικών προσεγγίσεων.



Σχήμα 3.4.1. Το βαγονάκι B κινούμενο χωρίς τριβή πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο Γ προσδίδει σταθερή γραμμική επιτάχυνση στο βαγονάκι A . Η επιτάχυνση μεταβάλλεται αν αυξήσουμε ή ελαττώσουμε την κλίση του επιπέδου. Όταν η επιτάχυνση είναι μηδενική και το ελατήριο χαλαρό, ο δείκτης που είναι προσαρμοσμένος στο ένα άκρο του ελατηρίου βρίσκεται στη θέση O . Στο σχήμα το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί, ο δείκτης βρίσκεται στη θέση Σ και το σώμα A επιταχύνεται. (Παρατήρηση: καμιά υπόθεση δεν έχει γίνει για τη «γραμμικότητα» του ελατηρίου ή για το αν το ελατήριο ικανοποιεί το νόμο του Hooke.)

Με παρόμοιο τρόπο προσδιορίζονται άλλες τιμές της δύναμης, λόγω χάρη 2,36, 3,82 κτλ. Με άλλα λόγια η κλίμακα της δύναμης κατασκευάζεται χωρίς καμιά υπόθεση για την ομοιομορφία ή την ανομοιομορφία της επιμήκυνσης του ελατηρίου, δηλαδή, *χωρίς* να θεωρούμε ότι το ελατήριο ικανοποιεί το Νόμο του Hooke.

Αν το βαγονάκι A είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε να ταιριάζει στις διεθνείς προδιαγραφές του αντικειμένου που ονομάζεται «χιλιόγραμμα», ονομάζουμε τις τιμές που σημειώσαμε στο δυναμόμετρο «νιούτον». Έχουμε, λοιπόν, έναν δοκιμαστικό ορισμό της δύναμης μέσω της κλίμακας του δυναμομέτρου. Οι τιμές της δύναμης, τις οποίες συμβολίζουμε με F , ταυτίστηκαν *αυθαίρετα* με τις τιμές της επιτάχυνσης που αποκτούσε το σώμα αναφοράς A . Το ερώτημα αν ο αυθαίρετος ορισμός της κλίμακας της δύναμης είναι γόνιμος και χρήσιμος, μπορεί να απαντηθεί από την ίδια τη Φύση στο πλαίσιο επιπλέον πειραμάτων.

3.5 Εφαρμογή του δυναμομέτρου σε άλλα αντικείμενα: αδρανειακή μάζα

Αν αντικαταστήσουμε το βαγονάκι A με το βαγονάκι Δ που κινείται χωρίς τριβές μπορούμε να προσδώσουμε στο Δ επιταχύνσεις χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε ένδειξη του δυναμομέτρου. Στο συγκεκριμένο πείραμα διαπιστώνουμε ότι σε σταθερή ένδειξη της κλίμακας, λόγω χάρη στην ένδειξη 3,00 N, αντιστοιχεί σταθερή και αναπαραγωγίσιμη επιτάχυνση του Δ · ωστόσο, η συγκεκριμένη επιτάχυνση δεν είναι απαραίτητα 3,00 m/s², όπως συνέβη με το A . Υποθέστε ότι σ' αυτήν την περίπτωση (όταν η ένδειξη είναι 3,00 N), η επιτάχυνση προκύπτει 1,50 m/s². Σημειώστε ότι δεν είναι δυνατό να πούμε ακόμα τι θα παρατηρήσουμε με άλλες ενδείξεις του δυναμομέτρου: τα πειράματα πρέπει να συνεχιστούν. Με άλλες ενδείξεις του δυναμομέτρου, παίρνουμε αποτελέσματα που σχετίζονται με συστηματικό και

Πίνακας 3.5.1

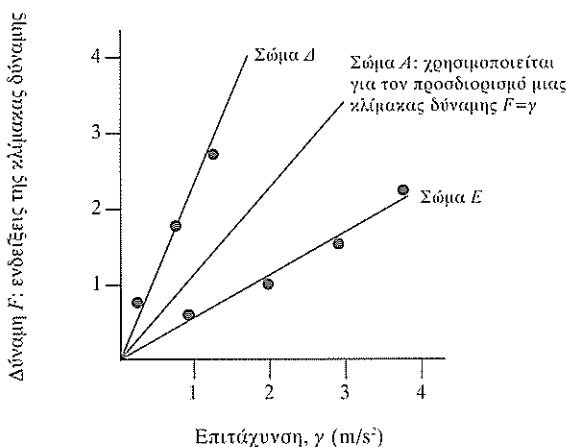
Επιτάχυνση γ προσδίδεται στο σώμα Δ όταν ασκείται δύναμη F μέσω του δυναμομέτρου που ορίστηκε στο εδάφιο 3.4.

(1) Ασκούμενη δύναμη F (η οποία ορίζεται μέσω της επιτάχυνσης που αποκτά το A , χωρίς να καθορίζονται οι μονάδες)	(2) Επιτάχυνση που αποκτά το A , m/s^2	(3) Παρατηρούμενη επιτάχυνση που αποκτά το Δ , m/s^2	(4) Φανταστικά ενδεχόμενα της επιτάχυνσης του Δ (δεν πραγματοποιούνται στο πείραμα) m/s^2	(5)
0,50	0,50	0,25	1,00	3,00
1,00	1,00	0,50	1,10	2,50
1,62	1,62	0,81	1,20	2,20
2,00	2,00	1,00	1,40	2,00
3,00	3,00	1,50	1,50	1,50
4,00	4,00	2,00	1,60	1,00

απλό τρόπο με το αποτέλεσμα που παρατηρήσαμε πριν;

Στον Πίνακα 3.5.1 φαίνονται τα πραγματικά αποτελέσματα (στήλη 3) σε αντιπαράβολή με τα αποτελέσματα που μπορούμε να φανταστούμε, αλλά δεν ελήφθησαν στην πραγματικότητα (στήλες 4 και 5). Σημειώστε την παιδαγωγική αξία τού να παρατηρούν οι μαθητές τι συμβαίνει και τι δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Χωρίς την άμεση αντιπαράβολή η σημασία της ιδέας που παρουσιάζουμε, συχνά δεν εκτιμάται ή κατανοείται ελλιπώς. Ο καλύτερος τρόπος για να συλλάβουν οι μαθητές την ιδέα που περιέχεται στον Πίνακα 3.5.1, είναι η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της F ως προς τη γ για τα δεδομένα που περιέχονται στις στήλες 3, 4 και 5.

Εξετάζοντας τη στήλη 3 και τη γραφική παράσταση στο Σχ. 3.5.1, παρατηρούμε το εξής: είναι δυνατό να συσχετίσουμε με το βαγονάκι Δ μια μοναδική τιμή, την τιμή 2,00, από την οποία σε κάθε περίπτωση προκύπτει η τιμή της δύναμης, αν πολλαπλασιάσουμε την εν λόγω τιμή με την εκάστοτε



Σχ. 3.5.1 Η γραφική παράσταση της F ως προς τη γ για τα σώματα A , Δ και E . Το σώμα Δ έχει μεγαλύτερη αδράνεια από το A (για δεδομένη τιμή της δύναμης στο δυναμόμετρο το Δ αποκτά μικρότερη επιτάχυνση από το A). Το σώμα E εμφανίζει μικρότερη αδράνεια από το A .

επιτάχυνση. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν με άλλα σώματα, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.5.1. Ανακαλύπτουμε, λοιπόν, πειραματικά ένα νέο νόμο της Φύσης: η δύναμη είναι ευθέως ανάλογη της επιτάχυνσης που αποκτά ένα σώμα, ακόμα κι αν δεν πρόκειται για σώμα παρόμοιο με το πρότυπο, με το οποίο ορίστηκε αυθαίρετα η κλίμακα του δυναμομέτρου· ο συντελεστής αναλογίας έχει σαφώς μοναδική τιμή και αποτελεί *ιδιότητα* κάθε σώματος. (Σημειώστε πως η συγκεκριμένη θεώρηση μπορεί να συνδεθεί άμεσα με τις ιδέες που αναπτύξαμε στο εδάφιο 1.11, σχετικά με τη μελέτη γραφικών παραστάσεων που είναι ευθείες.)

Συνοψίζουμε το επιχείρημα: έχοντας ορίσει αυθαίρετα μια κλίμακα δύναμης, όπως στο εδάφιο 3.4, βρίσκουμε πειραματικά το φυσικό γεγονός ότι η F είναι ανάλογη της γ , όταν διαφορετικές δυνάμεις ασκούνται σε σώμα διαφορετικό από το πρότυπο· δηλαδή, η Φύση υπαγορεύει ότι υπάρχει μια *μοναδική* τιμή — *μια ιδιότητα του σώματος που εξετάζουμε* — που αποτελεί το συντελεστή αναλογίας μεταξύ της F και της γ . Αν συμβολίσουμε το συντελεστή με m , γράφουμε:

$$F = m\gamma \quad (3.5.1)$$

όπου m είναι ιδιότητα του επιταχυνόμενου σώματος και δίνεται από την κλίση της αντίστοιχης ευθείας στο Σχ. 3.5.1. Ονομάζουμε τη συγκεκριμένη ιδιότητα «αδρανειακή μάζα» ή για συντομία απλώς «μάζα». Η ύπαρξη της εν λόγω μίας και μοναδικής τιμής για κάθε σώμα δεν είναι απλώς ζήτημα ορισμού (όπως είναι η κλίμακα της δύναμης) ούτε προκύπτει από θεωρητικές αρχές· είναι πειραματικό, φυσικό γεγονός — νόμος της Φύσης — αν και αρχικά προέκυψε μάλλον από εικασία παρά από άμεσο πειραματικό έλεγχο.

Σ' αυτό το σημείο, μπορούμε πλέον να οδηγήσουμε τους μαθητές στη μελέτη μεγάλων και μικρών τιμών της m , συγκρίνοντας τη συμπεριφορά σωμάτων υπό την επίδραση της ίδιας δύναμης. Μπορούμε, επίσης, να ερμηνεύσουμε τη σημασία του γεγονότος ότι διαφορετικά σώματα (ως προς το μέγεθος, το σχήμα, το χρώμα, την πυκνότητα, την υφή και τη χημική σύσταση) είναι δυνατό να έχουν ταυτόσημες τιμές του m , συμπεριλαμβανομένης της ειδικής τιμής $m=1$ kg.

Μαθητές, καθηγητές και εγχειρίδια χρησιμοποιούν συχνά τον όρο «μάζα» αναφερόμενοι σε κάποιο σώμα, λέγοντας π.χ. «κρεμάμε μια μάζα 10 kg». Η έλλειψη προσοχής στη διατύπωση προκαλεί σύγχυση, ιδίως αργότερα, όταν λόγου χάρη προσπαθούμε να αντιδιαστέλλουμε τη βαρυτική μάζα από την αδρανειακή. Είναι προτιμότερο, λοιπόν, να αποφεύγουμε τη χρήση των όρων «σώμα» και «μάζα» ως συνωνύμων και να αντιδιαστέλλουμε προσεκτικά το ίδιο το σώμα από τις ιδιότητές του.

3.6 Πρόσθεση μαζών και σύνθεση δυνάμεων

Στο προηγούμενο εδάφιο είδαμε πώς μπορούμε μέσω του 2ου Νόμου να διατυπώσουμε μη κυκλικούς ορισμούς της δύναμης και της αδρανειακής μάζας χρησιμοποιώντας τη νευτώνεια αλληλουχία: εκκινούμε από τη δύναμη και την επιτάχυνση, χωρίς να χρησιμοποιούμε το πείραμα του Mach για τη συμπεριφορά του βαγονιού. Ωστόσο, το περιεχόμενο του 2ου Νόμου δεν εξαντλείται σ' αυτό. Παραμένει το ζήτημα της πρόσθεσης των δυνάμεων και των μαζών. Πρέπει, λοιπόν, να καταφύγουμε πάλι στο πείραμα για να επιβεβαιώσουμε τις εικασίες μας, όσο εύλογες κι αν φαίνονται.

Επαληθεύεται πειραματικά ότι οι μάζες προστίθενται (ή αφαιρούνται) αριθμητικά, όταν τα σώματα ενώνονται (ή διασπώνται). Επαληθεύεται, επίσης, πειραματικά (με τη χρήση δύο πανομοιότυπων δυναμομέτρων) ότι δύο ίσες δυνάμεις προς την ίδια κατεύθυνση προσδίδουν διπλάσια επιτάχυνση από την επιτάχυνση που προσδίδει μόνη της κάθε δύναμη. Τέλος, επαληθεύεται ότι ίσες δυνάμεις προς αντίθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις αφαιρούνται ή μία από την άλλη (αλληλοεξουδετερώνονται)³ και προσδίδουν μηδενική επιτάχυνση σε κάθε σώμα. Γενικά, οι συγγραμμικές δυνάμεις προστίθενται αλγεβρικά και οι δυνάμεις που σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους προστίθενται όπως οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις. Συμπέρασμα: οι δυνάμεις συμπεριφέρονται ως διανυσματικά μεγέθη. Η επιτάχυνση, λοιπόν, (και όχι η ταχύτητα) του σώματος έχει πάντοτε τη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. (Πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονται σαφώς το τελευταίο αποτέλεσμα και πρέπει να τους βοηθήσουμε με ερωτήσεις, με εργασία για το σπίτι και με τεστ. Οι σχετικές ερωτήσεις πρέπει να δοθούν από τον καθηγητή: σπάνια υπάρχουν στα "εγχειρίδια".)

Τέλος, προκύπτει εμπειρικά ότι στο πλαίσιο της νευτώνειας μηχανικής οι ορθογώνιες συνιστώσες της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και της δύναμης είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους· ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει όταν εκδηλώνονται σχετικιστικά φαινόμενα.

3.7 Η παρουσίαση του 2ου Νόμου στα εγχειρίδια

Πολλά εγχειρίδια, προσπαθώντας να είναι «εύκολα», «απλά» ή «σύντομα», αποφεύγουν, δυστυχώς, να διατυπώσουν προσεκτικούς λειτουργι-

3. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τη χρήση του όρου «αλληλοεξουδετέρωση» στο συγκεκριμένο πλαίσιο: πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται λανθασμένα το νόημά του και τον χρησιμοποιούν εξίσου λανθασμένα. Ορισμένοι θεωρούν πως, όταν δύο δυνάμεις «αλληλοεξουδετερώνονται», παύουν να υπάρχουν. Άλλοι συγχέουν την «εξουδετέρωση» με την απλοποίηση του αριθμητή και του παρονομαστή ενός αλγεβρικού κλάσματος.

κούς ορισμούς. Παραλείπουν, επίσης, να μελετήσουν ποια στοιχεία του 2ου Νόμου αποτελούν αυθαίρετους ορισμούς και ποια αντανakλούν την τάξη που υπάρχει στη Φύση. Παρουσιάσεις αυτού του είδους αφήνουν τους μαθητές με σχέσεις της μορφής:

$$\mathbf{F}_{ολ} = m\mathbf{y} \quad (3.7.1)$$

$$\eta \quad F_{ολ,x} = m\gamma_x \quad \text{και} \quad F_{ολ,y} = m\gamma_y \quad (3.7.2)$$

χωρίς σαφή κατανόηση του περιεχομένου και του νοήματος του 2ου Νόμου.

Οι μαθητές είναι σημαντικό να αντιληφθούν ότι οι αλγεβρικές σχέσεις δεν είναι αυτάρκειες· πρέπει να συνοδεύονται από σχετικά εκτενές κείμενο στο οποίο παρουσιάζονται οι αυθαίρετοι ορισμοί και τα δεδομένα του πειράματος με τρόπο παρόμοιο μ' αυτόν των προηγούμενων εδαφίων. Χωρίς όλη την «ιστορία», οι μαθηματικοί τύποι είναι στείροι και δυσνόητοι.

Αν παραγνωρίσουμε τα λογικά και εννοιολογικά χαρακτηριστικά των νόμων της κίνησης, με σκοπό να «απλοποιήσουμε» τα ζητήματα ή να καλύψουμε περισσότερη ύλη, σχεδόν περιφρονούμε το επίπεδο σκέψης των μαθητών. Υπάρχουν πολλοί μαθητές που *μπορούν* να κατανοήσουν τις συγκεκριμένες ιδέες. Αρκεί, βέβαια, να τους δοθεί χρόνος, ευκαιρίες, συγκεκριμένη εμπειρία και δυνατότητα σπειροειδούς επανάληψης, καθώς η ύλη θα προχωρά. Ελάχιστοι μαθητές μπορούν να αφομοιώσουν και να κατανοήσουν αυτές τις ιδέες με το ρυθμό και τις συντομεύσεις που κυριαρχούν στα περισσότερα εγχειρίδια και στις προφορικές παρουσιάσεις. Κι αυτό συμβαίνει είτε πρόκειται για μαθητές λυκείου είτε για σπουδαστές που παρακολουθούν μαθήματα φυσικής με χρήση ή μη απειροστικού λογισμού σε ανώτερο κύκλο σπουδών.

Στα περισσότερα εγχειρίδια που υιοθετούν την προσέγγιση του Mach, η παρουσίαση είναι δυσνόητη και αφηρημένη. Οι περισσότεροι μαθητές, λοιπόν, θεωρούν ότι η εν λόγω προσέγγιση δεν έχει νόημα, ακόμα κι αν η ανάπτυξη των εννοιών είναι προσεκτική και μη κυκλική. Το ζήτημα της πρόσθεσης των μεγεθών σπάνια διατυπώνεται ρητά, αν δεν παραλείπεται εντελώς. Η περιφραστική ανάπτυξη, η ποιοτική μελέτη και η ερμηνεία που συνοδεύουν τον 2ο Νόμο, παραλείπονται, επίσης. Όσο «στοιχειωδέστερο» είναι το επίπεδο του εγχειριδίου, τόσο πιο ασαφείς και δυσνόητες μοιάζουν οι παρουσιάσεις.

Τα περισσότερα από τα εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται εκτενώς υιοθετούν παραλλαγές της νευτώνειας προσέγγισης. Θεωρούν, ωστόσο, ότι η «δύναμη» είναι πρωταρχική έννοια που ο μαθητής την κατανοεί ποιοτικά και αριθμητικά και ότι είναι περιττό να την ορίσουν λειτουργικά. Εισάγουν, λοιπόν, τη «μάζα» σαν να πρόκειται απλώς για το συντελεστή αναλο-

γίας μεταξύ της δύναμης και της επιτάχυνσης. Στα εγχειρίδια αυτά η πρόσθεση των μεγεθών κατά κανόνα παραλείπεται.

Εξετάζοντας ενδεικτικά ορισμένα από τα σύγχρονα εγχειρίδια (χωρίς αξίωση πληρότητας) επισήμανα ότι στη Φυσική του PSSC (σε όλες τις εκδόσεις της) υπάρχει μια απλή, σωστή και συνεπής παρουσίαση, κατάλληλη σε εισαγωγικό επίπεδο. Η παρουσίαση είναι λιγότερο εκλεπτυσμένη από την παρουσίαση που περιγράψαμε στα προηγούμενα εδάφια· ωστόσο, είναι κατάλληλη για ένα εισαγωγικό μάθημα στο λύκειο και σε ανώτερο επίπεδο. Από τα εγχειρίδια που χρησιμοποιούν απειροστικό λογισμό, του Tipler (1982) και των Resnick και Haliday (1977, 1985) περιέχουν προσεκτικές, αλλά δυσνόητες παρουσιάσεις. Η «ιστορία» που περιγράψαμε στα εδάφια 3.3-3.7 παρουσιάζεται λεπτομερέστερα στο δικό μου εγχειρίδιο (δεν έχει εκδοθεί) [Arons (1965)]. Δεν έχω εντοπίσει ακόμα κάποιο εγχειρίδιο λυκείου που να μη στηρίζεται σε απειροστικό λογισμό και να παρουσιάζει προσεκτικά και με ευθύ τρόπο την προσέγγιση του Νεύτωνα.

3.8 Βάρος και μάζα

Στην προηγούμενη ανάπτυξη ο όρος «βάρος» δεν εμφανίζεται πουθενά. Αυτό πρέπει να το επισημαίνουμε επανειλημμένα στους μαθητές και να τους βοηθάμε, συζητώντας μαζί τους, να τον διατυπώσουν με δικά τους λόγια. Καταρχάς, όλες οι διαδικασίες και τα πειράματα που περιγράψαμε μπορούν να εκτελεστούν σε διαστημόπλοιο μακριά από σώματα που ασκούν βαρυτικές δυνάμεις ή σε δορυφόρο που εκτελεί ελεύθερη πτώση. Αποσαφηνίζοντας το συγκεκριμένο ζήτημα, βοηθάμε τους μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ του βάρους και της μάζας και να αναγνωρίσουν ότι ο όρος «βάρος ενός σώματος» είναι η ονομασία μιας ιδιαίτερης δύναμης, της *βαρυτικής*, που ασκείται από τη Γη στο σώμα και του προσδίδει επιτάχυνση $9,80 \text{ m/s}^2$.

Σε πρωταρχικό στάδιο (όταν οι μαθητές ακόμα προσπαθούν να διακρίνουν τις έννοιες μεταξύ τους) είναι φρόνιμο να διατηρήσουμε με συνέπεια την αντιδιαστολή μεταξύ των μονάδων, χρησιμοποιώντας χιλιόγραμμα για τη μάζα και μόνο νιούτον για το βάρος. Ωστόσο, μερικές φορές είναι αδύνατο να προστατεύσουμε τους μαθητές από τη χαλαρότερη χρήση των όρων που υπάρχει σε τμήμα της βιβλιογραφίας, αλλά και στην καθομιλουμένη: Ακούμε συχνά φράσεις, όπως «βάρος δέκα χιλιόγραμμα» ή «3 kg βάρους». Θα ήταν χρήσιμο ο καθηγητής να εκδώσει ένα «διάταγμα» που θα απαγορεύει ρητά παρόμοια χρήση· η απαγόρευση, ωστόσο, θα αποτύγγανε (παρά τις επίμονες προσπάθειες ορισμένων δογματικών). Είναι προτιμότερο, λοιπόν, να βοηθάμε τους μαθητές να ερμηνεύουν την αναπόφευκτη χρήση των όρων μ' αυτό τον τρόπο ως σύντομο τρόπο περιγραφής της δύναμης με την

οποία η Γη έλκει το δεδομένο σώμα: Η φράση «3 kg βάρος» αναφέρεται σε ένα σώμα στο οποίο η Γη ασκεί βαρυτική δύναμη $3 \times 9,80 = 29,4$, νιούτον.

Παρόμοιες διατυπώσεις χρησιμοποιούνται, επίσης, στο Βρετανικό Μηχανικό (ΒΕ) σύστημα μονάδων. Ευτυχώς, αν και η χώρα προχωρά αργά στη χρήση του μετρικού συστήματος, τα περισσότερα εγχειρίδια είναι πιο εξελιγμένα: Χρησιμοποιούν αποκλειστικά το σύστημα SI και αφήνουν τα συστήματα ΒΕ και CGS σε αχρηστία (ή τα παρουσιάζουν με τέτοιο τρόπο, ώστε ο καθηγητής να έχει την ευχέρεια να τα αφήσει στην αχρηστία). Πρόκειται για τον καλύτερο τρόπο από παιδαγωγική άποψη, όχι μόνο επειδή σήμερα το σύστημα SI κυριαρχεί στη φυσική, αλλά και επειδή, αν παρουσιάσουμε απότομα στους μαθητές όλα τα διαφορετικά συστήματα μονάδων, ενώ ακόμα προσπαθούν να ξεμπεξουν τις έννοιες, η προσπάθειά μας είναι καταδικασμένη. Αν, παρεμπιπτόντως, χρειαστούν κάποιο σύστημα, μπορούν να μάθουν να το χρησιμοποιούν αφού έχουν κατανοήσει τις βασικές έννοιες, οπότε το πρόβλημα των μονάδων απλοποιείται: οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν μόνοι τους να καλύψουν το συγκεκριμένο κενό. Το πρόβλημα των μονάδων εμφανίζεται ως σοβαρό εννοιολογικό ζήτημα μόνον αν δεν έχουν αφομοιώσει τις έννοιες.

3.9 Η διάκριση μεταξύ της βαρυτικής και της αδρανειακής μάζας

Στο παρόν εδάφιο μελετάμε δύο λειτουργικά διαφορετικές έννοιες. Πρόκειται για άλλη μια περίπτωση όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται δύσκολα τη διαφορά μεταξύ των εννοιών. Η δυσκολία οφείλεται αφ' ενός μεν στο ότι ο λειτουργικός ορισμός της δύναμης και της αδρανειακής μάζας σπάνια αναπτύσσεται με ικανοποιητική σαφήνεια σε πρωταρχικό στάδιο, αφ' ετέρου σε αμιγώς φραστική σύγχυση: χρησιμοποιούμε την ίδια ονομασία για δύο απολύτως διαφορετικές ιδέες.

Είναι αλήθεια ότι μπορούμε να υποστηρίξουμε πως η βαρυτική μάζα είναι αριθμητικά ίση με την αδρανειακή, επειδή όλα τα σώματα, πέφτοντας ελεύθερα, αποκτούν την ίδια επιτάχυνση (πρόκειται τελικά για τη σύλληψη του Νεύτωνα). Ωστόσο, αυτό δεν αποτελεί για τους μαθητές κατάλληλη λειτουργική διάκριση μεταξύ της βαρυτικής και της αδρανειακής μάζας. Συνήθως, με κόπο αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ του βάρους και της μάζας: επικαλούμενοι, λοιπόν, στην αρχή του επιχειρηματός τους την ελεύθερη πτώση, η σύγχυση επεκτείνεται. Έχω καταλήξει εμπειρικά ότι μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές με τα δύο επόμενα, απολύτως διαφορετικά, ιδεατά πειράματα.

1ο Πείραμα: Χρησιμοποιήστε το «δυναμόμετρο» που επινοήσαμε με λειτουργικό τρόπο στο εδάφιο 3.4 και στο Σχήμα 3.4.1, για να προσ-

διορίσετε την αδρανειακή μάζα δύο σωμάτων A και B , διαφορετικού σφαιρικού σχήματος, μέσω της επιτάχυνσης που αποκτούν. Υποθέστε ότι έχουμε επιλέξει το A και B έτσι ώστε ο λόγος των αδρανειακών μαζών τους να είναι ακριβώς δύο προς ένα, δηλαδή: $m_A/m_B = 2,00$.

2ο Πείραμα: Τοποθετούμε τα σώματα A και B (ένα κάθε φορά) πλησίον της σφαίρας (σώμα Γ) που βρίσκεται στο ένα άκρο του ζυγού του Cavendish. Το σώμα Γ επιταχύνεται λόγω της βαρυτικής έλξης και ο ζυγός του Cavendish αρχίζει να ταλαντώνεται⁴. Από την επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Γ στο ζυγό του Cavendish, προσδιορίζουμε τις δυνάμεις που τα σώματα A και B ασκούν ξεχωριστά στο Γ , όταν και στις δύο περιπτώσεις η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους είναι η ίδια. Βρίσκουμε, λοιπόν *πειραματικά* ότι η δύναμη που ασκεί το B στο Γ είναι δύο φορές μεγαλύτερη από τη δύναμη που ασκεί το A στο Γ .

Είναι, πλέον, δυνατό να επισημάνουμε την τεράστια διαφορά, από λειτουργική άποψη, μεταξύ των δύο πειραμάτων. Με το πρώτο πείραμα, μέσω της επιτάχυνσης που αποκτούν τα δύο σώματα (υπό την επίδραση της ίδιας δύναμης), συγκρίνουμε την ιδιότητα των σωμάτων που αποκαλέσαμε αδρανειακή μάζα. Το δεύτερο πείραμα δεν έχει καμιά *a priori* σχέση με το πρώτο: συγκρίνουμε μια απολύτως νέα ιδιότητα και δράση, τη δύναμη από απόσταση που ασκεί ξεχωριστά το A και το B σε κάποιο *τρίτο* σώμα. Είναι όντως εντυπωσιακό ότι η αριθμητική τιμή του λόγου είναι και στα δύο πειράματα η ίδια. Αυτή η ιδιαίτερη κανονικότητα επιβεβαιώνεται πειραματικά με τεράστια ακρίβεια σε κάθε περίπτωση για όλα τα σώματα (αν χρησιμοποιήσουμε βελτιωμένο, έμμεσο τρόπο μέτρησης).

4. Το φιλμ «Forces» του PSSC δείχνει την εκτέλεση ενός παρόμοιου πειράματος: Στο φιλμ ο ζυγός του Cavendish αποτελείται από μια βαθμολογημένη ράβδο που ισορροπεί οριζόντια, κρεμασμένη από το μέσο της με μια ταινία μαγνητοφώνου. Η ταινία είναι στερεωμένη σε ένα ψηλό ταβάνι και παίζει το ρόλο του νήματος στρέψης. Στα άκρα της ράβδου κρέμονται δύο μπουκάλια με νερό. Όταν ο ζυγός είναι απολύτως ακίνητος (η προϋπόθεση αυτή εκπληρώνεται μόνον αν προστατεύουμε τη συσκευή σε απομονωμένο χώρο ενός ακατοίκητου κτιρίου), ένα κουτί με άμμο τοποθετείται κοντά στα μπουκάλια. Μια δέσμη φωτός, που προέρχεται από έναν μικρό προβολέα, ανακλάται σε έναν μικρό καθρέφτη, που βρίσκεται στερεωμένος πάνω στην ταινία. Η δέσμη παίζει το ρόλο του δείκτη. Η απόκλιση της δέσμης απεικονίζεται στο φιλμ. Αυτό το σύντομο φιλμ (διάρκειας δέκα λεπτών) δείχνει με εντυπωσιακό τρόπο τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ συνηθισμένων σωμάτων και αξίζει να επιδεικνύεται στην τάξη, αν είναι διαθέσιμο. Το μοναδικό μειονέκτημά του είναι ότι το πείραμα αυτό είναι απολύτως ποιοτικό, και, επειδή τα σώματα δεν είναι σφαιρικά, δεν αλληλεπιδρούν ως σημειακές μάζες. Στο δικό μας ιδεατό πείραμα μπορούμε να δεχτούμε ότι τα σώματα αλληλεπιδρούν ως σημειακές μάζες· πρόκειται, ωστόσο, για εκτέλεση που είναι δυνατό να γίνει αργότερα.

Το ότι το συγκεκριμένο γεγονός είναι εντυπωσιακό αποδεικνύεται από το εξής: Αν οι δύο σφαίρες αλληλεπιδρούν με απολύτως διαφορετικό είδος δύναμης (λόγου χάρη, μέσω ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης, αν τις ηλεκτρίσουμε με τριβή ή μέσω μαγνητικής αλληλεπίδρασης, αν οι σφαίρες αποτελούνται από σιδηρομαγνητικό υλικό και τις μαγνητίσουμε), ο λόγος των δυνάμεων που ασκούνται στο Γ δεν έχει καμιά απολύτως σχέση με το λόγο των μαζών του A και του B . Μόνο στη βαρυτική αλληλεπίδραση οι δύο λόγοι ταυτίζονται.

Ονομάζουμε, λοιπόν, βαρυτική μάζα την ιδιότητα που προσδιορίσαμε με λειτουργικό τρόπο μέσω της αλληλεπίδρασης που παρατηρήσαμε στο δεύτερο πείραμα. Η χρησιμοποίηση του ουσιαστικού «μάζα» για δύο απολύτως διαφορετικές ιδιότητες είναι ατυχής επιλογή: είναι πρωτίστως υπεύθυνη για την εννοιολογική δυσκολία που συναντούν οι μαθητές. Δεν μπορούμε, ωστόσο, να την αλλάξουμε «με νόμο»: πρέπει να προσαρμοστούμε. Η καλύτερη τακτική είναι να διατηρούμε μαζί με το ουσιαστικό και το επίθετο και να επισημαίνουμε συνεχώς τη διαφορά μεταξύ των δύο εννοιών, δίνοντας στους μαθητές την ευκαιρία να την περιγράψουν με δικά τους λόγια.

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται σαφέστερα το πρόβλημα της ορολογίας, όταν παρατηρήσουν ότι, ανεξάρτητα από τη σύμβαση που υιοθετούμε, η γλώσσα είναι δυνατό να είναι απολύτως διαφορετική. Ο Coulomb, στο περίφημο άρθρο του για την ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση (πριν αποκρυσταλλωθεί ο όρος «ηλεκτρικό φορτίο»), αναφέρεται στις «ηλεκτρικές μάζες» των φορτισμένων σφαιρών του. Αντιστρέφοντας την αναλογία είναι δυνατό να μιλήσουμε για «βαρυτικό φορτίο». Μπορούμε, βεβαίως, να επιλέξουμε άλλους όρους αντί των όρων «μάζα» και «φορτίο». Δεν έχουμε, ωστόσο, άλλη επιλογή από το να προσπαθούμε να αποσαφηνίσουμε την κατάσταση όσο μπορούμε περισσότερο.

Από τη στιγμή που οι μαθητές αρχίζουν να κατανοούν την προηγούμενη λειτουργική ακολουθία και να αντιλαμβάνονται την απόλυτη ανεξαρτησία μεταξύ των δύο πειραμάτων, μπορούν να επιστρέψουν στην παρατήρηση ότι όλα τα σώματα αποκτούν την ίδια επιτάχυνση στην ελεύθερη πτώση. Αρχίζουν, έτσι, να διακρίνουν τη βαθύτερη σχέση μεταξύ των φαινομένων. Η μελέτη της ίδιας ιδέας με πολλούς τρόπους βοηθά σημαντικά στην κατανόηση όλου του σχήματος, συμπεριλαμβανομένης της διάκρισης μεταξύ του βάρους και της μάζας.

3.10 Η κατανόηση του Νόμου της Αδράνειας

Η σημασία του θέματος που πρόκειται να εξετάσουμε είναι προφανής. Οι πρωτογενείς αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές, όταν αρχίζουν να μελε-

τούν τη δυναμική, και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν με το Νόμο της Αδράνειας έχουν ερευνηθεί εκτενώς και υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία. Χρήσιμα άρθρα, με περισσότερες λεπτομέρειες από εκείνες που παρατίθενται στο παρόν εδάφιο, υπάρχουν στον κατάλογο της βιβλιογραφίας. [Champagne, Klopfer και Anderson (1980)· Clement (1982)· di Sessa (1982)· Gunstone, Champagne και Klopfer (1981)· Halloun και Hestenes (1985)· McCloskey, Camarazza και Green (1980)· McCloskey (1983)· McDermott (1984)· Minstrell (1982)· Viennot (1979)· White (1983), (1984)].

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μελέτη του Νόμου της Αδράνειας και της έννοιας της δύναμης οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στο πλήθος των πρωτογενών αντιλήψεων που υπαγορεύει η κοινή λογική. Οφείλονται, επίσης, στους εμπειρικούς «κανόνες» που οι περισσότεροι (πριν παρακολουθήσουμε κάποια εισαγωγή της νευτώνειας φυσικής) θεωρούμε ότι περιγράφουν την κίνηση των ογκωδών σωμάτων.

Ορισμένες από αυτές τις αντιλήψεις είναι αριστοτελικές (λόγου χάρη, όταν θεωρούμε ότι, για να διατηρείται η κίνηση ενός σώματος, πρέπει να ασκείται συνεχώς πάνω του δύναμη: είναι πολύ δύσκολο να σταματήσουμε να θεωρούμε την ηρεμία απολύτως διαφορετική κατάσταση από την κίνηση ή να δεχτούμε την άποψη ότι είναι σωστότερο να ρωτάμε τι αναγκάζει ένα σώμα να σταματά παρά τι το αναγκάζει να κινείται). Ωστόσο, πολλές απόψεις που υπαγορεύει η κοινή λογική σχετίζονται περισσότερο με την έννοια της κερκτημένης δύναμης, η οποία αναπτύχθηκε κατά το Μεσαίωνα και συνδέεται με τα ονόματα Buridan και Oresme.

Όλες οι έρευνες αποκαλύπτουν ότι οι εν λόγω «απλοϊκές» αντιλήψεις είναι βαθιά περιχαρακωμένες και ιδιαίτερα ανθεκτικές: είναι, λοιπόν, σημαντικό οι καθηγητές να κατανοήσουν ότι οι δυσκολίες των μαθητών δεν οφείλονται στην «ανοησία» και τη δυστροπία τους: έχουν τις ρίζες τους σε φαινομενικά ορθές ακολουθίες συλλογισμών και στην εμπειρία: ενισχύονται δε σθεναρά από το ότι επιμένουμε να χρησιμοποιούμε (λανθασμένα) τους όρους που προέρχονται από την καθομιλουμένη (αδράνεια, μάζα, δύναμη, ορμή, ενέργεια, ισχύς, αντίσταση) με τη σημασία που έχουν πριν τους αποδώσουμε ακριβές λειτουργικό νόημα στο πλαίσιο της φυσικής. Αν οι μαθητές χρησιμοποιούν λανθασμένα τους όρους είτε όταν σκέφτονται κατ' ιδίαν είτε όταν επικοινωνούν με άλλους, δυσκολεύονται σοβαρά να εγκαταλείψουν τις απλοϊκές πρωτογενείς αντιλήψεις τους.

Πρέπει λοιπόν να τους βοηθήσουμε να «σταθούν σε απόσταση» από το θέμα και να συνειδητοποιήσουν κάθε βήμα της διαδικασίας του λειτουργικού ορισμού. Ορισμένοι καθηγητές έχουν την τάση να υποτιμούν τα συγκεκριμένα προβλήματα, χαρακτηρίζοντάς τα απλώς ζητήματα της γλώσσας ή της σημαντικής. Δεν αντιλαμβάνονται, προφανώς, ότι οι γλωσσικές δυσκολίες προκαλούν σοβαρά προβλήματα.

Οι έρευνες στην κατανόηση του Νόμου της Αδράνειας αποκαλύπτουν,

επίσης, ότι δεν αρκεί να ενσταλάξουμε το νόμο στο νου των μαθητών, μέσω της προφορικής παρουσίασης, την οποία θα συμπληρώσουμε με λίγες επιδείξεις της συμπεριφοράς σωμάτων που κινούνται χωρίς τριβή ή μικρών βαγονιών που κινούνται πάνω σε στρώμα αέρα. Σε τούτη την περίπτωση, πολλοί μαθητές απομνημονεύουν και επαναλαμβάνουν προφορικά αρκετά σωστά τον 1ο Νόμο. Όταν, όμως, βρεθούν στην ανάγκη να προβλέψουν την εξέλιξη ενός φαινομένου και να περιγράψουν τι θα συμβεί σε πραγματικές φυσικές καταστάσεις (άμεσα προσπελάσιμες σ' αυτούς), επιστρέφουν στις απλοϊκές πρωτογενείς αντιλήψεις και προβλέψεις τους. Αποτέλεσμα: δημιουργείται στον απογοητευμένο καθηγητή το βαθύ συναίσθημα ότι δεν κατάφερε να διδάξει απολύτως τίποτε.

Αν θέλουμε να κατανοήσει η πλειονότητα, και όχι η μειονότητα, των μαθητών το Νόμο της Αδράνειας, πρέπει να αποδεχτούμε ότι είναι αναγκαίο να παρουσιάσουμε στους μαθητές ευρύ φάσμα πειραμάτων πραγματικών ή φανταστικών. Μέσα απ' αυτά τα πειράματα οι μαθητές θα υποπέσουν στα δικά τους λάθη, θα συναντήσουν τις ασυνέπειες που προκύπτουν απ' αυτά και θα αναγκαστούν να αναθεωρήσουν τις πρωτογενείς αντιλήψεις τους. Ωστόσο, η συγκεκριμένη εμπειρία δεν μπορεί να παρασχεθεί και να κατακτηθεί στη διάρκεια μιας σύντομης «θεραπευτικής» σειράς μαθημάτων. Πρέπει να παρουσιάζουμε τις ιδέες, και οι μαθητές να αποκτούν την αντίστοιχη εμπειρία, ενώ η ύλη του μαθήματος θα προχωρά. Οι μαθητές δεν αφομοιώνουν το θέμα στην πρώτη επαφή μαζί του. Βοηθάμε την καλλιέργεια της αντίστοιχης δεξιότητας και κατανόησης με σπειροειδείς επαναλήψεις της ποιοτικής εφαρμογής του Νόμου της Αδράνειας σε συνεχώς πλουσιότερες και συνθετότερες φυσικές καταστάσεις, ενόσω η μελέτη της επιστήμης συνεχίζεται.

Η αποτελεσματικότερη (αν και σχετικά ακριβή) φυσική κατάσταση που χρησιμοποίησα ποτέ γι' αυτό το σκοπό, ήταν η ακόλουθη: Πάνω σε μια μεγάλη γυάλινη πλάκα στο τραπέζι του εργαστηρίου τοποθετούμε έναν κύβο ξηρού πάγου 25 kg με λεία, σε ορισμένο βαθμό, βάση. Ζητάμε, κατόπιν, από τους μαθητές να εκτελέσουν άμεσα, με τα «ίδια τους τα χέρια» (χρησιμοποιώντας, βεβαίως, γάντια) πειράματα. Σ' αυτό το πλαίσιο, μπορούμε με τη σωκρατική μέθοδο να αναπτύξουμε πολλές θεμελιώδεις, ζωτικής σημασίας ιδέες⁵:

1. Πώς συμπεριφέρεται ο κύβος από τη στιγμή που αρχίζει να κινείται; Σε τι διαφέρει η κατάσταση αυτή από την κατάσταση κατά την

5. Μπορούμε να μελετήσουμε μια διαφορετική περίπτωση από την περίπτωση του ξηρού πάγου, χρησιμοποιώντας την ίδια σειρά ερωτήσεων για να καθοδηγήσουμε τους μαθητές. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις ίδιες δυσκολίες, ανεξάρτητα από τον τρόπο εισαγωγής της φυσικής που χρησιμοποιούμε.

οποία συνηθισμένα αντικείμενα γλιστρούν σε συνηθισμένες επιφάνειες; [Η «μεγαλοπρεπής», χωρίς σημαντική επιβράδυνση κίνηση του κύβου, μέσα στον αχνό, πάνω στην πλάκα (ιδιαίτερα αν η ταχύτητά του είναι μικρή) εντυπωσιάζει όσους προηγουμένως δεν έχουν παρατηρήσει παρόμοια φαινόμενα.]

2. Πώς μπορούμε να αναγκάσουμε το σώμα να κινείται όλο και γρηγορότερα, δηλαδή να επιταχύνεται συνεχώς; (Πολλοί μαθητές αισθάνονται μεγάλη έκπληξη από το ότι πρέπει να κινούνται όλο και γρηγορότερα για να προφταίνουν τον κύβο και για να ασκούν, συνεχώς, την επιταχύνουσα δύναμη. Προηγουμένως, παρατηρούσαν ότι ο κύβος κινείται με σταθερή ταχύτητα, χωρίς να ασκείται πάνω του εξωτερική δύναμη. Οι περισσότεροι, ωστόσο, δεν μπορούν να διαπισθανθούν τι θα συμβεί αν ασκηθεί σταθερή δύναμη σε ένα σώμα που επιταχύνεται.)

3. Σε τι διαφέρει η συμπεριφορά του κύβου όταν ασκούμε πάνω του σταθερή ώθηση προς την κατεύθυνση της κίνησης του κύβου, από τη συμπεριφορά του όταν τον ωθήσουμε απότομα; (Πολλοί μαθητές δεν έχουν την ευκαιρία να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ μιας σταθερής δύναμης και μιας στιγμιαία ώθησης. Πράγματι, όταν ένα σώμα τίθεται σε κίνηση, θεωρούν ότι «δύναμη» σημαίνει μάλλον απότομη ώθηση παρά σταθερή δράση· είναι σημαντικό, λοιπόν, να τους καθοδηγήσουμε ώστε να αντιληφθούν τη διαφορά.)

4. Πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η δύναμη για να επιταχυνθεί ο κύβος; Υπάρχει, δηλαδή, κάποιο φαινόμενο «κατωφλίου»; (Η καθημερινή εμπειρία υπαγορεύει ότι τα σώματα δεν τίθενται σε κίνηση, εκτός κι αν πάνω τους ασκηθεί μια ελάχιστη δύναμη. Ο συγκεκριμένος κανόνας είναι κατ' εξοχήν ευλογοφανής και απλοϊκός. Αρχικά, λοιπόν, οι μαθητές τον υιοθετούν.) Το φιλμ του PSSC «A Million to One», όπου ένα έντομο κολλάει πάνω σε ένα ογκώδες κομμάτι ξηρού πάγου και το επιταχύνει, είναι χρήσιμο να προβάλλεται, αν είναι διαθέσιμο.

5. Υποθέστε ότι ο κύβος του ξηρού πάγου κινείται ήδη: τι πρέπει να κάνουμε για να τον επιβραδύνουμε αργά, χωρίς να αλλάξουμε τη φορά της κίνησής του; Πολλοί μαθητές έχουν την τάση να εφαρμόζουν μια απότομη ώθηση παρά μια ήπια, συνεχή δύναμη. Πρέπει να τους καθοδηγήσουμε για να κάνουν κάτι τέτοιο, και, συνήθως, εκπλήσσονται όταν ανακαλύπτουν ότι για να συγκρατήσουν τον κύβο με τα χέρια τους, πρέπει να οπισθοχωρήσουν στην κίνησή του. Η συγκεκριμένη εμπειρία τους βοηθά να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ της απότομης ώθησης και της σταθερής δύναμης.

6. Υποθέστε ότι ο κύβος κινείται και ότι για να τον επιταχύνουμε ή για να τον επιβραδύνουμε ασκούμε πάνω του σταθερή δύναμη. Πώς

συμπεριφέρεται; Υποθέστε, επίσης, ότι ελαττώνουμε σιγά σιγά τη δύναμη. Πώς συμπεριφέρεται ο κύβος; Πώς συμπεριφέρεται όταν η ασκούμενη δύναμη προσεγγίζει το μηδέν; (Παρατηρήστε ότι αυτή η προμελετημένη διαδικασία είναι *αντίστροφη* από τη συνηθισμένη παρουσίαση των ιδεών: αντί να χρησιμοποιήσουμε την περίπτωση της μηδενικής δύναμης ως σημείο εκκίνησης, αρχίζουμε με μη μηδενική συνισταμένη δύναμη και προχωράμε στην περίπτωση της μηδενικής δύναμης. Πολλοί αρχάριοι μαθητές, σε κάθε επίπεδο, αντιμετωπίζουν πολύ μεγάλη δυσκολία με την περίπτωση της μηδενικής δύναμης, παρότι τις εκτενείς συζητήσεις και τις επιδείξεις που έχουν προηγηθεί. Αντιστρέφοντας την πορεία των συλλογισμών και του πειράματος και παρατηρώντας τη διαδικασία και με τους δύο τρόπους, βοηθούμε τους μαθητές να αποκτήσουν την αντίληψη που επιθυμούμε.)

7. Υποθέστε ότι ασκούμε με κάθε χέρι μας δύο σταθερές δυνάμεις πάνω στον κύβο προς αντίθετες κατευθύνσεις. Πώς συμπεριφέρεται ο κύβος, αν η μία δύναμη είναι μεγαλύτερη από την άλλη και πώς αν οι δύο δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα μεταξύ τους;

8. Υποθέστε ότι ο κύβος κινείται: με ποιο τρόπο μπορούμε να μεταβάλουμε τη *διεύθυνση* της κίνησής του; (Σ' αυτήν την περίπτωση, αν έχει αναπτυχθεί η διάκριση μεταξύ της συνεχούς και της απότομης ώθησης, είναι δυνατό να ερευνήσουμε ξεχωριστά το αποτέλεσμα τους.) Τι πρέπει να κάνουμε για να αναγκάσουμε τον κύβο να κινηθεί *κάθετα* προς την αρχική διεύθυνση της κίνησής του; Σε συγκεκριμένη κατεύθυνση; Σχεδόν σε κύκλο; (Η κυρίαρχη, μη νευτώνεια άποψη των μαθητών είναι ότι ένα κινούμενο σώμα θα στραφεί τελικά προς την κατεύθυνση της τελευταίας ώθησης που ασκείται πάνω του. Είναι σημαντικό, λοιπόν, να γίνονται αυτόπτες μάρτυρες του γεγονότος ότι το φαινόμενο αντιτίθεται τελικά στη διαίσθηση.)

9. Τι συμβαίνει αν στρέψουμε τον κύβο γύρω από κατακόρυφο άξονα; Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τεχνικούς όρους που δεν έχουμε ακόμα ορίσει, μπορούμε να προσδιορίσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της κίνησης;

Ορισμένες παρατηρήσεις και συμβουλές σχετικά με την εμπειρία των μαθητών στα πειράματα που περιγράψαμε:

(1) Ο ρόλος του ανθρώπινου παράγοντα, κατά την εκτέλεση των πειραμάτων από τους μαθητές με τα ίδια τους τα χέρια, τείνει να ενισχύσει μια ιδέα που είναι βαθιά ριζωμένη στο μυαλό τους: ότι, δηλαδή, οι δράσεις που προκαλούν επιταχύνσεις (δηλαδή οι δυνάμεις) ασκούνται *απαραίτητα* από *έμψυχα σώματα*. Πρέπει, λοιπόν, να τους επισημάνουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις εξ επαφής μεταξύ άψυχων αντικειμένων (λόγου χάρι κατά τη σύγκρουση μεταξύ τους, κατά την απελευθέρωση ενός συμπιεσμένου ελατηρίου

κτλ.) προσδίδουν, επίσης, επιταχύνσεις. Ο διδάσκων, κατά την κρίση του, είναι δυνατό να αναφέρει τις (ηλεκτρικές ή μαγνητικές) αλληλεπιδράσεις εξ αποστάσεως.

(2) Αν και ορισμένοι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν επιτυχώς τη φυσική κατάσταση, χωρίς τη βοήθεια της σωκρατικής μεθόδου, και να εξαγάγουν μόνοι τους τα περισσότερα συμπεράσματα που παραθέσαμε, οι περισσότεροι δεν εκτελούν αυτού του είδους την ιδιοφυή έρευνα ούτε εξαγάγουν σημαντικά συμπεράσματα σ' αυτές τις συνθήκες. Η καθοδήγηση του διδάσκοντος είναι, λοιπόν, απαραίτητη. Ο καλύτερος τρόπος καθοδήγησης, ωστόσο είναι, μάλλον, μέσω ερωτήσεων και εκμαιευτικών υποδείξεων παρά μέσω οδηγιών που πρέπει να ακολουθούν οι μαθητές.

(3) Η διαδικασία αποδίδει σε μέγιστο βαθμό, όταν, με ελάχιστη καθοδήγηση, οι μαθητές προτείνουν, δοκιμάζουν, επιχειρηματολογούν και ερμηνεύουν με δικά τους λόγια τα φαινόμενα, αποφεύγοντας προσεκτικά οποιονδήποτε τεχνικό όρο που δεν έχει οριστεί έως εκείνη τη στιγμή.

Υπάρχουν, βεβαίως, και άλλοι τρόποι για να αποκτήσουν οι μαθητές την εμπειρία που περιγράψαμε.

Ένα συμπαγές μικρό κομμάτι ξηρού πάγου πάνω στη γυάλινη επιφάνεια εξυπηρετεί αρκετά· ωστόσο, τα αποτελέσματα δεν είναι τόσο εντυπωσιακά όσο με τον κύβο των 25 kg. Αντί ολόκληρο κύβο ξηρού πάγου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια πλάκα απ' αυτό το υλικό και να τοποθετήσουμε πάνω της τούβλα (ή άλλα αντικείμενα). Η γυάλινη επιφάνεια δεν είναι απαραίτητη: οποιαδήποτε αρκετά λεία επιφάνεια εξυπηρετεί. Μεγάλο τμήμα της εργασίας είναι δυνατό να εκτελεστεί και με βαγονάκια πάνω σε στρώμα αέρα· ωστόσο, επειδή η μάζα τους είναι μικρή, είναι δύσκολο να εκτελέσουμε ορισμένα εκλεπτυσμένα πειράματα στα οποία πρέπει να ασκήσουμε με τα χέρια μας μικρή δύναμη. Σ' αυτήν την περίπτωση είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε άλλη συσκευή για να ασκήσουμε δύναμη στα βαγονάκια, λόγου χάρη λεπτό λάστιχο ή το ρεύμα του αέρα, από μια ηλεκτρική σκούπα, όταν δουλεύει αντίστροφα.

Μέσο ανάπτυξης της ατομικής εμπειρίας είναι, βεβαίως, και η προσομοίωση με υπολογιστή· πολλές ομάδες έχουν αναπτύξει παιδαγωγικό υλικό γι' αυτό το σκοπό [βλ. di Sessa (1982)· White (1984)]. Όταν η απτή κινητιστική εμπειρία με πραγματικά αντικείμενα είναι πρακτικά αδύνατο να παρασχεθεί, η προσομοίωση με υπολογιστή είναι αναμφίβολα το επόμενο καλύτερο μέσο. Επίσης, η προσομοίωση είναι χρήσιμη, επειδή παρέχει στους μαθητές πολλές ευκαιρίες εξάσκησης της σκέψης τους με ένα συνεχώς ανατροφοδοτούμενο σύστημα δοκιμής και λάθους. Παράλληλα ενισχύει τις παρατηρήσεις που προηγούμενως είχαν γίνει στο πείραμα. Λιγότερο αποτελεσματικός τρόπος είναι η επίδειξη κατά τη διάρκεια της παράδοσης: οι μαθητές συμμετέχουν παθητικά· περιορίζονται να παρακολουθούν τους ισχυρισμούς και να παρατηρούν τα φαινόμενα τα οποία τους παρουσιάζει

κάποιος τρίτος.

Οι ερωτήσεις και οι ασκήσεις στις οποίες οι μαθητές χρησιμοποιούν «χαρτί και μολύβι» είναι, επίσης, χρήσιμο συστατικό της διδασκαλίας. Τις σχεδιάζουμε για να βοηθήσουμε το μαθητή ή τη μαθήτριά να αντιμετωπίσει ασυνέπειες στον τρόπο σκέψης του/της· έτσι, επιτυγχάνεται η γνήσια σύλληψη και κατανόηση των εννοιών. Οι συγκεκριμένες ερωτήσεις παίζουν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο στις εργασίες για το σπίτι, στα τεστ και στα διαγωνίσματα· το παράρτημα του παρόντος Κεφαλαίου περιέχει ορισμένα επιλεγμένα παραδείγματα ερωτήσεων αυτού του είδους.

3.11 Οι λέξεις είναι δυνατό να μας βλάψουν – Προβλήματα στη διατύπωση

Στην καθημερινή ομιλία μας χρησιμοποιούμε ορισμένους όρους της φυσικής με μη επιστημονικό τρόπο. Η συνήθεια αυτή δυσχεραίνει την κατανόηση της έννοιας της δύναμης και του Νόμου της Αδράνειας. Οι καθηγητές λοιπόν πρέπει να ευαισθητοποιηθούν ιδιαίτερα στο πώς χρησιμοποιούνται οι όροι: οφείλουν να μάθουν να μην τους χρησιμοποιούν λανθασμένα και να αποτρέπουν τους μαθητές από τη λανθασμένη χρήση τους. Ιδού ορισμένα παραδείγματα:

Υπάρχει μια πολύ έντονη, σχεδόν καθολική τάση να λέμε ότι μια δύναμη (ή η συνισταμένη δύναμη) «κινεί» ένα σώμα. Πρέπει, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη λέξη «επιταχύνει» αντί «κινεί». Η λέξη «κινεί» περιπλέκει σοβαρά το θέμα και ο μαθητής τείνει να υιοθετήσει την αριστοτελική άποψη. Οι μαθητές που τη χρησιμοποιούν έχουν κατά νου την έννοια της «ταχύτητας» και δεν διακρίνουν τον κυρίαρχο ρόλο της «επιτάχυνσης». Αυτό το γεγονός ισχύει ιδιαίτερα στα πρώτα στάδια: ο μαθητής δεν έχει ακόμα εξοικειωθεί με την έννοια της επιτάχυνσης και αντιλαμβάνεται δύσκολα τη διαφορά μεταξύ της έννοιας αυτής και της ταχύτητας.

Συνηθισμένη διατύπωση είναι, επίσης, η εξής: «η δύναμη υπερνικά την αδράνεια του σώματος». Η συγκεκριμένη διατύπωση ενθαρρύνει το μαθητή να θεωρεί ότι η αδράνεια είναι δύναμη που την «υπερνικούν» άλλες δυνάμεις. (Ο ίδιος ο Νεύτων κατέταξε όντως τη «vis inertiae»* στις δυνάμεις της Φύσης· απέφευγε, ωστόσο, να την περιπλέξει με τις κινούσες δυνάμεις που προκαλούν μεταβολή της ορμής.) Στη διδασκαλία είναι προτιμότερο να αποφεύγουμε οποιοδήποτε

* vis inertiae: δύναμη αδράνειας. (Σ.τ.μ.)

υπονοούμενο για το ότι η αδράνεια είναι είδος δύναμης.

Πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται τη δύναμη ως κάτι που έχει δοθεί, ανήκει ή διαμένει σε ένα κινούμενο σώμα ή σε ένα σώμα που επιταχύνεται. (Πόσο ενισχύεται αυτή η αντίληψη από την τάση μας να μιλάμε για δυνάμεις που «προσδίδονται» σε ένα σώμα; Προσωπικά, δύσκολα αποφεύγω αυτή τη διατύπωση.) Σε κάθε περίπτωση ενδείκνυται να αντικρούσουμε αυτή την αντίληψη και να αντιδιαστέλλουμε τις εξωτερικές επιρροές και αλληλεπιδράσεις από τα χαρακτηριστικά που ανήκουν στο σώμα.

Η έννοια της «καθαρής», «συνισταμένης» ή «ολικής» δύναμης (όταν πολλές δυνάμεις ασκούνται ταυτόχρονα σε κάποιο σώμα) πρέπει να αναπτυχθεί πολύ προσεκτικά και με σαφήνεια. Συχνά, οι μαθητές θεωρούν ότι κατά τη σύνθεση των δυνάμεων ορισμένες έχουν εξαφανιστεί ή έχουν απαλειφθεί με κάποιο τρόπο. Αυτό το γεγονός συμβαίνει, κυρίως, αν ορισμένες δυνάμεις είναι αντίθετες μεταξύ τους και τελικά «αλληλοεξουδετερώνονται». Αν μια δύναμη «υπερνικήσει» μια αντίθετή της, ορισμένοι μαθητές θεωρούν ότι το φαινόμενο αυτό εκδηλώνεται όντως στη Φύση και όχι ότι είναι αποτέλεσμα του αλγεβρικού ή διανυσματικού αθροίσματος των δύο δυνάμεων.

Η σύγχυση μεταξύ της συνεχούς δράσης και της απότομης ώθησης μιας «ασκούμενης δύναμης» αναφέρθηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Και στην περίπτωση αυτή, πρέπει να χρησιμοποιούμε προσεκτικά τη γλώσσα.

Πολλοί μαθητές συνεχίζουν να αναφέρονται σε δυνάμεις που «επενεργούν» στα σώματα, όταν μελετούν τη δυναμική συμπεριφορά των σωμάτων. Ενδείκνυται να αποκρούσουμε αυτήν τη διατύπωση και να προσηλωθούμε στον όρο «δρουν». Η απρόσεκτη χρήση του όρου «επενεργούν» προκαλεί σύγχυση, όταν αργότερα οικοδομούμε την έννοια της ενέργειας.

3.12 Ο 3ος Νόμος και τα διαγράμματα των δυνάμεων

Ο 3ος Νόμος, βεβαίως, βοηθά να κατανοήσουμε πλήρως την έννοια της δύναμης. Χωρίς αυτόν δεν υπάρχει τρόπος να διακρίνουμε μεταξύ τους δύο ή περισσότερα αλληλεπιδρώντα σώματα και να εφαρμόσουμε τον 2ο Νόμο σε ένα μόνο σώμα κάθε φορά· χωρίς αυτόν, επίσης, οι μαθητές καθυστερούν να αντιληφθούν πώς ένα σώμα δρα σε κάποιο άλλο μέσω συνηθισμέ-

νων φυσικών αλληλεπιδράσεων. Οι συγγραφείς που αναπτύσσουν τον 2ο Νόμο και κατόπιν προχωρούν στο νόμο της διατήρησης της ορμής (θεωρώντας ότι έτσι καλύπτουν πλήρως τη φυσική της κίνησης των σωμάτων), αφήνουν τους μαθητές, οι οποίοι δεν έχουν κατανοήσει επαρκώς την έννοια της δύναμης, με ένα είδος αναπηρίας.

Από τη στιγμή που εξοικειωθούμε με τον 3ο Νόμο, η ιδέα που περιέχεται σ' αυτόν φαίνεται πολύ απλή. Οι καθηγητές, λοιπόν, έχουν την τάση να μη συναισθάνονται τις τεράστιες δυσκολίες που αντιμετωπίζει η πλειονότητα των μαθητών. Οι δυσκολίες αυτές, οι οποίες σε πολλούς μαθητές επαυξάνονται, έχουν ποικίλες πηγές προέλευσης.

1. *Δυνάμεις ασκούμενες από άψυχα ή «σκληρά» σώματα.* Όπως υπογραμμίσαμε στο εδάφιο 3.10, πολλοί μαθητές έχουν την πρωτογενή αντίληψη ότι οι δυνάμεις ασκούνται μόνον από έμψυχα σώματα. Διστάζουν να δεχτούν ότι το τραπέζι, το πάτωμα ή ένας κύβος ασκούν δύναμη σε κάποιο σώμα. Λόγου χάρη, ένας μαθητής λυκείου μου είχε πει κάποτε έξω φρενών: «Πώς είναι δυνατόν το τραπέζι να ασκεί δύναμη στο βιβλίο; Δεν έχει μέσα του αυτήν την ικανότητα!» Πολλοί μαθητές, λοιπόν, αν και αντιλαμβάνονται το τραπέζι ως «φράγμα» στην προς τα κάτω κίνηση του βιβλίου, δεν αντιλαμβάνονται ότι το τραπέζι ασκεί δύναμη προς τα πάνω. Ομοίως, δεν αντιλαμβάνονται ως δύναμη την «αντίσταση στην κίνηση» από το περιβάλλον ρευστό μέσο ή από τριβές μεταξύ επιφανειών.

Δεν πρόκειται για τετριμμένο εννοιολογικό πρόβλημα· επειδή, μάλιστα, ελάχιστα κείμενα παρέχουν άμεση βοήθεια στους μαθητές, επαφίεται στον καθηγητή να αναπτύξει την ορθή αντίληψη. Οι περισσότεροι μαθητές είναι πρόθυμοι να δεχτούν την άποψη ότι τα παραμορφώσιμα σώματα (λόγου χάρη τα ελατήρια) που επανακτούν την αρχική μορφή τους, είναι ικανά να ασκήσουν δύναμη· αυτό το γεγονός, λοιπόν, είναι αποτελεσματικό σημείο εκκίνησης. Επειδή αντιλαμβάνονται την παραμόρφωση που υφίστανται λόγω χάρη το κρεβάτι, ο καναπές, μια μαλακή καρέκλα κτλ., δέχονται ότι τα εν λόγω σώματα ασκούν δύναμη προς τα πάνω στον άνθρωπο που κάθεται πάνω τους. Παράλληλα, θεωρούν ότι τα «σκληρά» σώματα είναι ποιοτικώς διαφορετικά: δεν αντιλαμβάνονται πως όταν η σκληρότητα ενός σώματος αυξάνεται, η παραμορφωσιμότητά του, αν και ελαττώνεται, δεν μηδενίζεται.

Είναι πολύ δύσκολο να αντιληφθούν ότι το τραπέζι, το πάτωμα, ένας κύβος κτλ. επίσης παραμορφώνονται, αν τοποθετήσουμε πάνω τους έστω και ένα φύλλο χαρτί. Ο Minstrell (1982) περιγράφει πώς έπεισε τελικά μια ομάδα μαθητών ότι το τραπέζι του εργαστηρίου παραμορφώνεται όταν το φορτώνουμε: Η δέσμη ενός προβολέα ανακλόνταν από την επιφάνεια ενός τραπεζιού σε έναν τοίχο (οπτικός μοχλός). Οι μαθητές παρατηρώντας τη μετατόπιση της φωτεινής κηλίδας στον τοίχο, καθώς ένας μαθητής περπατούσε πάνω στο τραπέζι, άρχισαν να αποδέχονται ότι τα φαινομενικώς

άκαμπτα σώματα παραμορφώνονται.⁶

2. *Η διάκριση μεταξύ των «παθητικών» και των «ενεργητικών» δυνάμεων.* Για να ξεπεράσουν οι μαθητές τις δυσκολίες που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, αποδεικνύεται ότι τους βοηθά το να κατατάξουν τις δυνάμεις σε δύο κατηγορίες: στις «ενεργητικές» δυνάμεις και στις «παθητικές». Στις ενεργητικές δυνάμεις ανήκουν οι ωθήσεις και οι έλξεις των έμψυχων σωμάτων, η βαρυτική δύναμη, οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές δυνάμεις. Οι παθητικές προκαλούνται από τις ενεργητικές και προσαρμόζονται σ' αυτές. Λόγου χάρη, παθητικές δυνάμεις εκδηλώνονται κατά τη συμπίεση ενός ελατηρίου, κατά την παραμόρφωση του τραπέζιού ή του πατώματος, όταν τοποθετηθεί πάνω τους κάποιο σώμα, κατά την τριβή μεταξύ δύο επιφανειών κτλ. Μια παθητική δύναμη δεν αυξάνεται (δεν «προσαρμόζεται») επ' άπειρον, αλλά ως το σημείο όπου κάτι σπάει (το τραπέζι, το πάτωμα ή το νήμα) ή υποχωρεί (λόγου χάρη, στην περίπτωση της στατικής τριβής).

3. *Η διατύπωση του 3ου Νόμου.* Οι περισσότεροι μαθητές ανέκαθεν δυσκολεύονταν να κατανοήσουν την παλιά, συμβατική διατύπωση του 3ου Νόμου, ότι, δηλαδή, «σε κάθε δράση υπάρχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση»· ευτυχώς, όμως, πολλοί συγγραφείς την έχουν εγκαταλείψει. Είναι προτιμότερο να λέμε: «αν ένα σώμα ασκεί δύναμη σε κάποιο άλλο, το δεύτερο ασκεί ίση και αντίθετη δύναμη στο πρώτο» — ή να χρησιμοποιούμε μια άλλη, εξίσου απλή και σαφή διατύπωση. Ωστόσο, ακόμα και μια απλή διατύπωση δεν γίνεται κατανοητή από την πρώτη στιγμή. Οι μαθητές, ακόμα κι όταν την επαναλαμβάνουν σωστά δεν αντιλαμβάνονται σαφώς ότι αναφερόμαστε σε δύο διαφορετικές δυνάμεις που καθεμιά ασκείται σε διαφορετικό σώμα. Χρειάζονται συνεχή βοήθεια για να οικοδομήσουν αυτήν την αντίληψη και να την εκφράσουν είτε στα διαγράμματα των δυνάμεων είτε περιφραστικά.

6. Οι μαθητές χρειάζονται βοήθεια και καθοδήγηση, για να μάθουν να αντιλαμβάνονται φαινόμενα τα οποία δεν τα αντιλαμβάνονται μέσω των αισθήσεών τους. Σε μια σειρά μαθημάτων φυσικής, η παραμορφωσιμότητα φαινομενικώς άκαμπτων σωμάτων είναι, συνήθως, η πρώτη ευκαιρία για να ξεπεραστεί η δυσκολία. Δεν πρέπει, λοιπόν, να υποτιμάμε τη σημασία αυτού του φαινομένου. Η συγκεκριμένη αντίληψη είναι ουσιώδης για να κατανοήσουν οι μαθητές τι συμβαίνει όταν δύο σώματα συγκρούονται μεταξύ τους ελαστικά ή μη ελαστικά, όταν τεντώνουμε ή συμπιέζουμε ένα σώμα, όταν ένα νήμα σπάει, όταν ένα δοχείο με νερό σπάει (αν το νερό παγώσει), πώς διαδίδονται τα διαμήκη και τα εγκάρσια κύματα στα στερεά. Η εν λόγω αντίληψη είναι επίσης ουσιώδης για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι, αν σπρώξουμε το ένα άκρο μιας μακριάς μεταλλικής ράβδου, δεν ωθείται ταυτόχρονα και το άλλο άκρο της. Προετοιμάζονται έτσι να αποδεχθούν ότι μεσολαβεί ορισμένο χρονικό διάστημα για να διαδοθούν οι ηλεκτρομαγνητικές αλλαγές με το μηχανισμό της πεδίακης θεωρίας. Η διαμόρφωση της απαραίτητης αντίληψης και η οικοδόμηση των αντίστοιχων εννοιών είναι, λοιπόν, προτιμότερο να εκκινούν από τη μελέτη του φαινομενικώς τετραμμένου φαινομένου που περιγράψαμε.

4. *Δυνάμεις από απόσταση.* Η σύγκυση σχετικά με την ταυτόχρονη παρουσία δύο διαφορετικών δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά σώματα, επιτείνεται από το ότι στο πρωταρχικό στάδιο ανάπτυξης των εννοιών περιοριζόμαστε σχεδόν αποκλειστικά στη μελέτη δυνάμεων *από επαφή*. Οι μαθητές, λοιπόν, δυσκολεύονται να διακρίνουν τις δύο δράσεις μεταξύ τους. Επίσης, στη μοναδική περίπτωση δύναμης από απόσταση που αναφέρουμε συνήθως (δηλαδή, στην περίπτωση της βαρυτικής δύναμης) θεμελιώνουμε την αλληλεπίδραση στη βάση της παρατηρούμενης επιτάχυνσης κατά την ελεύθερη πτώση. Δεν μπορούμε, λοιπόν, να προσδιορίσουμε τη δύναμη που είναι ίση και αντίθετη στο βάρος του σώματος και την οποία ασκεί το σώμα στη Γη. Οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν τη δεύτερη δύναμη μυστηριώδη και πηγή σύγκυσης· αντιμετωπίζουν δε σε μεγάλο βαθμό με δυσπιστία την ύπαρξή της.

Χωρίς να μελετήσουμε λεπτομερώς τον στατικό ηλεκτρισμό ή το μαγνητισμό, στο παρόν στάδιο του «παιχνιδιού» βοηθά να επικαλεστούμε τις αντίστοιχες δυνάμεις, επιδεικνύοντας απλώς την αλληλεπίδραση από απόσταση που εκδηλώνεται μέσω των παρατηρούμενων επιταχύνσεων: Επειδή δύο φορτισμένες σφαίρες από ψίχα έλκονται ή απωθούνται εμφανώς μεταξύ τους, χωρίς να έρχονται σε επαφή, αναγκάζομαστε να δεχτούμε ότι ασκείται πάνω τους δύναμη. Αυτό συμβαίνει, επίσης, όταν δύο μαγνητισμένες ράβδοι έλκονται ή απωθούνται μεταξύ τους, χωρίς να έρχονται σε επαφή, και όταν δύο βαγονάκια, στα οποία έχουμε προσαρμόσει κατάλληλα μαγνήτες και κινούνται πάνω σε στρώμα αέρα, συγκρούονται χωρίς να έρχονται σε επαφή (το φαινόμενο αυτό ξαφνιάζει πολλούς μαθητές).

Μια φορτισμένη ράβδος που κρατάμε στα χέρια μας έλκει ή απωθεί μια κρεμασμένη σφαίρα από ψίχα ή επιταχύνει εμφανώς κομματάκια χαρτί που βρίσκονται στο τραπέζι. Συζητώντας τις προηγούμενες επιδείξεις, φαίνεται εύλογο στους μαθητές ότι δύναμη ασκείται όχι μόνο στη σφαίρα από ψίχα και στα χαρτάκια, αλλά και στην ίδια τη ράβδο, αν και δεν αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τη δύναμη αυτή. Το ίδιο ισχύει όταν κρατάμε έναν μαγνήτη που έλκει μικρά καρφιά. Με αρκετά ισχυρούς μαγνήτες και ογκωδέστερα σώματα, ωστόσο, αισθανόμαστε άμεσα την αλληλεπίδραση από απόσταση.

Παρουσιάζοντας τα προηγούμενα, ο 3ος Νόμος γίνεται πιο εύλογος και καταληπτός για πολλούς μαθητές. Τα διαγράμματα των δυνάμεων βελτιώνονται και οι μαθητές αποδέχονται ως λογική και συνεπή την ύπαρξη της βαρυτικής δύναμης που ασκεί το βιβλίο στη Γη, όσο κι αν είναι αδύνατο να ανιχνευθεί.

5. *Η σχεδίαση ενός διαγράμματος δυνάμεων.* Είναι ευρέως γνωστό πως όταν για πρώτη φορά οι μαθητές σχεδιάζουν δυνάμεις, οι εικόνες τους μοιάζουν με «συνεχείς άτακτες βολές Ινδιάνων κυνηγών»! Σχεδιάζουν γραμμές προς τυχαίες κατευθύνσεις. Η εξάσκηση στην ανάλυση οικείων,

καθημερινών καταστάσεων είναι, λοιπόν, ουσιώδης. Καθώς η τυχαιότητα περιορίζεται, πολλοί μαθητές επιμένουν να παριστάνουν τις δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις του 3ου Νόμου ασκούμενες στο ίδιο σώμα. Σε ορισμένο βαθμό, η συγκεκριμένη τάση υποθάλπεται από πολλά εγχειρίδια: παριστάνουν έναν κύβο ακίνητο στο πάτωμα και, για οικονομία χώρου, το περίγραμμα του κύβου δεν διακρίνεται σαφώς από το περίγραμμα του πατώματος. Η δύναμη, λοιπόν, που ασκεί το πάτωμα στον κύβο και η δύναμη που ασκεί ο κύβος στο πάτωμα εμφανίζονται στο ίδιο σχήμα, αντί σε δύο ξεχωριστά σχήματα. Αποτέλεσμα: το μήνυμα ότι δύο διαφορετικές δυνάμεις ενεργούν σε διαφορετικά σώματα συσκοτίζεται απολύτως. Επιπλέον, σπάνια υπάρχει περιφραστική περιγραφή των δυνάμεων ακριβώς κάτω από το σχήμα.

Αν ο καθηγητής, αναπτύσσοντας τα συγκεκριμένα ζητήματα, περιγράφει απλώς στους μαθητές τι πρέπει να κάνουν και σχεδιάζει τα διαγράμματα των δυνάμεων αντί να το κάνουν οι ίδιοι οι μαθητές, το αποτέλεσμα της προσπάθειάς του είναι περιορισμένο. Αντίθετα, βοηθά αποτελεσματικότερα τους μαθητές, αν τους ζητήσει να σχεδιάσουν μόνοι τους τα σχήματα (συμπεριλαμβανομένης της επανασχεδίασης των λανθασμένων σχημάτων του βιβλίου) με τους επόμενους κανόνες:

(α) Σε κάθε αλληλεπίδραση πρέπει να εμφανίζονται *και τα δύο* σώματα: στην περίπτωση που ένα βιβλίο είναι ακίνητο σε κάποιο τραπέζι, και τα δύο σώματα (το βιβλίο και το τραπέζι) πρέπει να σχεδιάζονται με σαφές περίγραμμα, ακόμα κι αν η προσοχή μας είναι πρωτίστως εστιασμένη στο βιβλίο. Κάθε δύναμη του ζεύγους που προκύπτει από την εφαρμογή του 3ου Νόμου πρέπει να εμφανίζεται στο κατάλληλο σχήμα. Στο πρώτο στάδιο αυτής της άσκησης πρέπει να εμφανίζεται και η Γη, επειδή πρόκειται για το σώμα που ασκεί τη βαρυτική δύναμη στο βιβλίο. (Καθώς περνά ο χρόνος, οι περισσότεροι μαθητές απομοιώνουν την ιδέα ότι στην περίπτωση του βάρους ενός σώματος, το άλλο μέλος του ζεύγους των δυνάμεων του 3ου Νόμου ασκείται στο κέντρο της Γης. Μπορούμε, λοιπόν, σταδιακά να εγκαταλείψουμε την απαίτηση να συμπεριλαμβάνουμε τη Γη). Όταν εμφανίζονται σώματα συνδεδεμένα με νήματα, πρέπει πάντα να σχεδιάζουμε απολύτως ξεχωριστό σχήμα για τα νήματα και για τα σώματα, ακόμα κι αν τα νήματα θεωρούνται «άμαξα».

(β) Κάθε δύναμη που εμφανίζεται στο σχήμα πρέπει να περιγράφεται με λέξεις ακριβώς κάτω από το διάγραμμα. Φραστική περιγραφή σημαίνει ότι προσδιορίζουμε τη φύση της δύναμης και ότι αναφέρουμε το σώμα που ασκεί τη δύναμη και το σώμα στο οποίο ασκείται. Λόγου χάρη, η Γη ασκεί βαρυτική δύναμη στο βιβλίο, αλλά και το βιβλίο ασκεί βαρυτική δύναμη στη Γη· το βιβλίο ασκεί κάθετη δύναμη επαφής στο τραπέζι· δύναμη τριβής ασκείται από το τραπέζι στο βιβλίο· δύναμη επαφής ασκείται από ένα νήμα στο σώμα Α· δύναμη επαφής ασκείται από ένα σώμα Β στο νήμα· κτλ.

(γ) Αφού σχεδιάσουμε τα διανύσματα και τα περιγράψουμε με λόγια, πρέπει να προσδιορίσουμε σαφώς κάθε ζεύγος δυνάμεων του 3ου Νόμου.

Η *συνδυνασμένη* κατανόηση των ενεργητικών και παθητικών δυνάμεων και των δυνάμεων από επαφή και από απόσταση, η σχεδίαση των διανυσμάτων σε απολύτως ξεχωριστά σχήματα, η περιγραφή με λόγια των δυνάμεων, ο προσδιορισμός των ζευγών του 3ου Νόμου και η διόρθωση των λαθών οδηγούν βαθμιαία τους μαθητές στην αφομοίωση του 3ου Νόμου. Συντελούν ακόμη στην απόκτηση της ικανότητας να οργανώνουν τα προβλήματα τους και να εφαρμόζουν τον 2ο Νόμο, χωρίς να μαντεύουν και να απομνημονεύουν. Όπως συμβαίνει και σε κάθε άλλη περίπτωση, όταν προσπαθούμε να οικοδομήσουμε μια λεπτή έννοια, η εξάσκηση πρέπει να διαρκεί όλη τη σχολική χρονιά· οι προσπάθειες γρήγορης θεραπείας αποτυγχάνουν μονίμως.

3.13 Η λογική δομή του 3ου Νόμου

Ο Νεύτων αισθάνθηκε την ανάγκη να δικαιολογήσει το Νόμο III στα «Principia», στο εκτενές Scholium που ακολουθεί την εξαγγελία των τριών Νόμων της Μηχανικής. Αρχικά παραθέτει την εργασία του Wallis, του Wren και του Huygens, τις οποίες είχαν υποβάλει (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο) το 1669 στη Βασιλική Ακαδημία. Οι εν λόγω ερευνητές θεωρούσαν ότι η διατήρηση της «ποσότητας της κίνησης» (δηλαδή της ορμής) κατά τη «σύγκρουση» (δηλαδή κατά τις κρούσεις) είναι θεμελιώδης νόμος της κίνησης [βλ. Arons και Bork (1964)]. Ο Νεύτων υποστηρίζει ότι η συγκεκριμένη διατήρηση προκύπτει από τον 3ο Νόμο. Υπαινίσσεται, επίσης, ότι ο Wallis, ο Wren και ο Huygens κατέληξαν στην άποψή τους χρησιμοποιώντας τον 3ο Νόμο (κάτι που είναι απολύτως απίθανο: η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις είχε προσδιοριστεί εμπειρικά πριν επινοηθεί σαφώς η έννοια της δύναμης).

Ο Νεύτων παραθέτει επίσης πειράματα με συγκρουόμενα εκκρεμή για να ενισχύσει την άποψη ότι η ορμή διατηρείται. Τέλος, παρουσιάζει το επίχειρημα που παραθέτουμε στη συνέχεια, επικαλούμενος τις «έλξεις», οι οποίες εκείνη την εποχή χρησιμοποιούνταν ως τεχνικός όρος των (από απόσταση) ηλεκτροστατικών και μαγνητικών αλληλεπιδράσεων:

Στις έλξεις παρουσιάζω εν συντομία το ζήτημα με τον ακόλουθο τρόπο: Υποθέστε ότι μεταξύ δύο σωμάτων Α και Β που έλκονται μεταξύ τους, παρεμβάλλουμε ένα εμπόδιο, για να αποτρέψουμε τη συνάντησή τους. Αν, λοιπόν, κάποιο σώμα, λόγω χάρη το Α, ελκόταν περισσότερο προς το Β απ' όσο το Β έλκεται προς το Α, τότε το εμπόδιο θα πιεζόταν περισσότερο από το Α απ' όσο πιέζεται από το Β και δεν θα παρέμενε σε ισορροπία: η μεγαλύτερη πίεση θα επικρατούσε και θα ανά-

γκαζε το σύστημα των δύο σωμάτων μαζί με το εμπόδιο να κινηθεί κατευθείαν προς το μέρος του Β. Στον κενό χώρο, μάλιστα, θα κινείται προς το άπειρο με συνεχώς επιταχυνόμενη κίνηση. Το εν λόγω συμπέρασμα είναι παράλογο και αντίθετο προς τον 1ο Νόμο... Έκανα το πείραμα με ένα μαγνήτη και ένα κομμάτι σίδηρο. Αν, αφού τα τοποθετήσουμε σε κατάλληλα σκάφη, τα αφήσουμε να επιπλεύσουν το ένα προς το άλλο, κανένα δεν θα σπρώξει το άλλο· ελκόμενα εξίσου μεταξύ τους, το καθένα υφίσταται την πίεση του άλλου και παραμένουν τελικά σε ισορροπία. [Παρατηρήστε ότι ο Νεύτων αναφέρει ότι χρησιμοποίησε «ένα μαγνήτη και ένα κομμάτι σίδηρο» και όχι δύο μαγνήτες· δηλαδή, στο πείραμά του το ένα από τα δύο σώματα είναι παθητικό.]

Το παράδειγμα που περιγράφει ο Νεύτων είναι πολύ χρήσιμο για τους μαθητές, επειδή επεκτείνει και εμπλουτίζει σε μεγάλο βαθμό το αρχικό πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζουμε συνήθως τον 3ο Νόμο. Ανάλογο πείραμα εκτελείται εύκολα με βαγονάκια σε στρώμα αέρα.

Η νευτώνεια θεωρία αναφέρεται συχνά ως θεωρία «δράσης από απόσταση». Ο 3ος Νόμος βρίσκεται «στην καρδιά» αυτής της περιγραφής: τη στιγμή που ένα σώμα ασκεί δύναμη σε κάποιο άλλο, δέχεται ίση και αντίθετη δύναμη από το δεύτερο σώμα. Αυτή η ιδέα εφαρμόζεται τόσο στα βαρυτικά σώματα, όταν βρίσκονται πολύ απομακρυσμένα μεταξύ τους, όσο και στα σώματα που βρίσκονται σε επαφή: μεταξύ της μεταβολής σε ένα σώμα και της επίδρασής της σε κάποιο άλλο μεσολαβεί μηδενικό χρονικό διάστημα.

Αν σπρώξουμε το ένα άκρο μιας μακριάς ράβδου, της οποίας το άλλο άκρο εφάπτεται σε έναν κύβο, ο κύβος δεν ασκεί ίση και αντίθετη δύναμη στη ράβδο τη στιγμή που τη σπρώχνουμε. Μεταξύ της ώθησής μας και της επίδρασής της στον κύβο μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα που εξαρτάται από την ταχύτητα του κύματος ελαστικότητας που διαπερνά τη ράβδο. Ο 3ος Νόμος του Νεύτωνα, λοιπόν, δεν ισχύει *την ίδια στιγμή* και για τα δύο άκρα της ράβδου· ισχύει απλώς από στρώμα σε στρώμα του υλικού κατά μήκος της ράβδου. Ομοίως, η ορμή και η ενέργεια διατηρούνται μόνο μέσω της διάδοσης του ελαστικού κύματος.

Τα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Faraday ασχολήθηκε σοβαρά με το ερώτημα: Υπάρχει ανάλογη κατάσταση στον ηλεκτρισμό και στο μαγνητισμό; Δύο ηλεκτρικώς φορτισμένα σωματίδια ηρεμούν, ασκώντας δυνάμεις ίσες και αντίθετες μεταξύ τους. Αν το ένα σωματίδιο μετακινηθεί απότομα, τότε η δύναμη την οποία δέχεται, μεταβάλλεται. Μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα ώπου να μεταβληθεί και η δύναμη στο άλλο σωματίδιο; Ο Faraday κατασκεύασε ευαίσθητες μηχανικές συσκευές για να μετρήσει τέτοια χρονικά διαστήματα, χωρίς, βεβαίως, επιτυχία.

Ο Maxwell, εκτιμώντας τη σημασία των συγκεκριμένων ερωτημάτων,

επινόησε την πρώτη θεωρία πεδίου. Η θεωρία απάντησε στα ερωτήματα και ταυτόχρονα έγινε το πρότυπο για κάθε θεωρία πεδίου.

Το κρίσιμο σημείο είναι ότι ο 3ος Νόμος δεν ισχύει πάντοτε· στη σύγχρονη φυσική, λοιπόν, ιεραρχώντας τους φυσικούς νόμους, δίνουμε προτεραιότητα στη Διατήρηση της Ορμής. Αν και κατά την εισαγωγή του 3ου Νόμου δεν διδάσκουμε όλες τις πλευρές του νόμου, είναι χρήσιμο να δημιουργούμε το υπόβαθρο, για να αντιληφθεί τελικά ο μαθητής σε ποιες περιπτώσεις δεν ισχύει ο νόμος. Η ράβδος που ωθεί τον κύβο αποτελεί κατάλληλη αφετηρία. Αρχικά, οι μαθητές δυσπιστούν για το αν μεσολαβεί όντως κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Μπορούμε, ωστόσο, να κλονίσουμε τη δυσπιστία τους, σπρώχνοντας τον κύβο με ένα μακρύ ελατήριο. Κατόπιν, επανερχόμενοι σπειροειδώς στα συγκεκριμένα ζητήματα, μπορούμε να καλύψουμε τα κενά, όταν φτάσουμε στη μελέτη των μηχανικών κυμάτων και στα αντίστοιχα θέματα του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού.

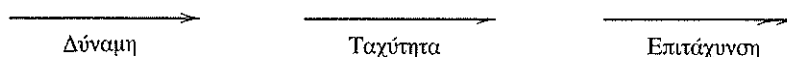
3.14 Διεσπαρμένες δυνάμεις

Ελάχιστα εγχειρίδια καθοδηγούν τους μαθητές να αντιληφθούν ότι το απλό διάνυσμα που παριστάνει το βάρος ενός σώματος ή τη δύναμη σε ένα σώμα η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής, ή την τριβή στην επιφάνεια επαφής, είναι η «βραχυγραφία» ενός αθροίσματος διεσπαρμένων δυνάμεων που τις έχουμε προσθέσει «κομμάτι-κομμάτι». Συνήθως, επειδή η ιδέα υπονοείται, ελάχιστοι μαθητές αντιλαμβάνονται την ύπαρξή της. Οι αρχάριοι τείνουν να υιοθετήσουν ανεξέλεγκτα την άποψη (αν και δεν την εκφράζουν με σαφήνεια) ότι το διάνυσμα παριστάνει «συμπυκνωμένη» δράση, παρόμοια με την ώθηση του δακτύλου ή με την έλξη ενός νήματος. Αργότερα, επειδή δεν έχουν κατανοήσει ότι οι δυνάμεις κατανέμονται σε ολόκληρο το σώμα, δυσκολεύονται σημαντικά να κατανοήσουν την προέλευση της δύναμης της άνωσης, που ασκείται σε ένα σώμα βυθισμένο σε υγρό, και γενικά την προέλευση της υδροστατικής πίεσης.

Η σύνθεση των διεσπαρμένων δυνάμεων δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη ιδέα για να την αφομοιώσουν οι μαθητές, αρκεί να τους υποδείξουμε να την προσέξουν. Πρέπει, ωστόσο, να τους επιστήσουμε την προσοχή. Αν αυτό δεν συμβεί, το εννοιολογικό κενό παραμένει και δεν καλύπτεται αυτομάτως παρά μόνο πολύ αργότερα, αφού αναπτυχθεί η αντίληψή τους.

3.15 Διανυσματική απεικόνιση της δύναμης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

Αν περιοριστούμε σε ένα μόνο διανυσματικό μέγεθος (μόνο στις δυνάμεις ή μόνο στις ταχύτητες κτλ.), η χρήση του διανύσματος ως συμβόλου για



Σχήμα 3.15.1 Διαφορετικά βέλη για διαφορετικά διανυσματικά μεγέθη.

την αναπαράσταση του μεγέθους δεν προκαλεί σύγχυση. Προβλήματα εμφανίζονται όταν οι δυνάμεις προσδίδουν επιτάχυνση σε σώμα μη μηδενικής ταχύτητας. Τότε, αν χρησιμοποιήσουμε έναν τύπο διανύσματος για να απεικονίσουμε και τα τρία μεγέθη, προκαλείται όντως σύγχυση σε πολλούς μαθητές. Οι μαθητές ερμηνεύουν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ως δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, και, κατά τη σχεδίαση των δυνάμεων, τα κατατάσσουν, χωρίς λόγο, στις δυνάμεις. (Λόγου χάρη, αυτού του είδους η σύγχυση προκαλείται όταν εξετάζουμε όλες τις επιδράσεις που ασκούνται σε ένα βλήμα, σε ένα σώμα που βρίσκεται μέσα σε αυτοκίνητο που επιταχύνεται ή όταν μελετάμε, παράλληλα με τη δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα βαρίδι που κινείται κυκλικά, την ταχύτητά του και την επιτάχυνσή του.)

Είναι δυνατό, ως ένα βαθμό, να διαλύσουμε τη σύγχυση, τροποποιώντας λίγο το συμβολισμό. Προσωπικά, εφαρμόζω την εξής μέθοδο: χρησιμοποιώ το συνηθισμένο σύμβολο του διανύσματος για την απεικόνιση της δύναμης, ένα διάνυσμα με μισή κεφαλή για την ταχύτητα και ένα διάνυσμα με δύο μισές κεφαλές για την επιτάχυνση (Σχ. 3.15.1).

Ζητώ από τους μαθητές να χρησιμοποιούν αυτό το συμβολισμό στα τεστ και στα προβλήματα για το σπίτι. Τον χρησιμοποιώ, επίσης, στις παραδόσεις. Ο συγκεκριμένος συμβολισμός δεν είναι δύσκολος και βοηθά να μειωθεί η τάση να συμπεριλαμβάνουμε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις στις δυνάμεις.

Βεβαίως, ο συγκεκριμένος συμβολισμός δεν είναι «ιερός»: οποιοσδήποτε άλλος τρόπος με τον οποίο διακρίνονται τα μεγέθη μεταξύ τους εξυπηρετεί εξίσου.

3.16 Η κατανόηση της γήινης βαρυτικής επίδρασης

Οι συνεντεύξεις με μαθητές αποκαλύπτουν ότι υπάρχουν παρανοήσεις και συγχύσεις σχετικά με τη βαρύτητα και τις βαρυτικές επιδράσεις. Επειδή οι μαθητές σπάνια εκφράζουν αυθόρμητα τις συγκεκριμένες παρανοήσεις, οι καθηγητές τις προσπερνούν χωρίς να τις επισημαίνουν. Αποτέλεσμα: οι εν λόγω παρανοήσεις εμποδίζουν σοβαρά την κατανόηση της διδασκόμενης ύλης.

1. Το νόημα της λέξης «βαρύτητα»: ένα σημασιολογικό πρόβλημα, που έχει τις ρίζες του στην παιδική ηλικία και σε πολλούς μαθητές παραμένει και στο επίπεδο του λυκείου, προέρχεται από την απάντηση πολλών καθη-

γιτών και γονέων στην ερώτηση του παιδιού: «Γιατί πέφτουν τα σώματα;» Συνήθης απάντηση είναι: «Τα σώματα πέφτουν *εξαιτίας* της βαρύτητας». (Αν θέσετε την ερώτηση σε μια τάξη μαθητών λυκείου, οι περισσότεροι θα δώσουν την ίδια απάντηση. Ελάχιστοι μαθητές δυσαρεστούνται με αυτήν τη βολική απάντηση· ακόμα λιγότεροι έχουν το σθένος να την αμφισβητήσουν, όπως πρέπει.)

Τα παιδιά, όπως επίσης πολλοί ενήλικοι, δέχονται την απάντηση κατά γράμμα: επειδή χρησιμοποιείται η λέξη «εξαιτίας», οδηγούνται άκριτα στο συμπέρασμα ότι η *αιτία* έχει ανευρεθεί — το «γιατί» της ερώτησης απαντήθηκε. Πιστεύουν, αφελώς, ότι για να προσδιορίσουν την αιτία, αρκεί να χρησιμοποιήσουν έναν επιστημονικό όρο. Η τάση των μαθητών να αποδέχονται αυτές τις απόψεις ενισχύεται σε μεγάλο βαθμό από την εμπειρία τους στις θετικές επιστήμες.

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν την ιστορική εξέλιξη του όρου: οι Έλληνες προίκιζαν τα σώματα με τις τελεολογικές ιδιότητες «βαρύτητα» και «ελαφρότητα». Οι δύο όροι περιγράφουν, αντίστοιχα, την ενδόμυχη θέληση ή τάση των σωμάτων να αναζητούν το κέντρο της Γης και να ανυψώνονται προς τις ουράνιες περιοχές. Η επιστήμη του 17ου αιώνα κατήργησε και τις τελεολογικές απόψεις και τον όρο «ελαφρότητα», χρησιμοποίησε δε τον όρο «βαρύτητα» στην παρατηρούμενη αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων και της Γης. Με τη νευτώνεια σύνθεση το νόημά της επεκτάθηκε: αναγνωρίστηκε ότι η ίδια αιτία κάνει το μήλο να πέφτει, συγκρατεί τη Σελήνη γύρω από τη Γη και τη Γη και τους πλανήτες γύρω από τον Ήλιο.

Ωστόσο, οι μαθητές πρέπει, τελικά, να αντιληφθούν σαφώς ότι με τις λέξεις δεν κάνουμε τίποτε άλλο παρά να καλύπτουμε την άγνοιά μας: παρά την ισχύ της νευτώνειας σύνθεσης και την ομορφιά της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, μέχρι σήμερα δεν γνωρίζουμε το «μηχανισμό» της βαρυτικής αλληλεπίδρασης και δεν έχουμε ιδέα για το πώς «δουλεύει».⁷

Είναι ενδιαφέρον να υπογραμμίσουμε τι έχει να πει ο Γαλιλαίος για το εν λόγω ζήτημα. Στο έργο του «Διάλογοι για τα Δύο Μεγάλα Συστήματα του Κόσμου» βρίσκουμε την ακόλουθη ανταλλαγή απόψεων:

7. Η λέξη «μηχανισμός» και η φράση «πώς δουλεύει» χρησιμοποιούνται για διαδικασίες που τις αντιλαμβάνομαστε με τις αισθήσεις μας. Περιγράφουμε την πίεση και τη διάχυση των αερίων, την εξάτμιση και τη συμπύκνωση των υγρών, την κρυσταλλοποίηση και τη δομή των στερεών με τη βοήθεια της γνώσης που έχουμε αποκτήσει για τη συμπεριφορά μακροσκοπικών σωματιδίων. Περιγράφουμε τα αόρατα κύματα ελαστικότητας στα στερεά με τη βοήθεια της γνώσης που έχουμε αποκτήσει για τη συμπεριφορά μαλακών ελατηρίων. Περιγράφουμε τη διάδοση των κλασικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, μέσω της αναλογίας των εγκάρσιων μηχανικών κυμάτων. Δεν διαθέτουμε, ωστόσο, αντίστοιχους τρόπους περιγραφής των «βαντομηχανικών φαινομένων και της βαρυτικής αλληλεπίδρασης, αν και είναι επίσης «υπαρκτές» οντότητες.

SIMPLICIO: Η αιτία του φαινομένου [τι κινεί τα γήινα σώματα προς τα κάτω] είναι καλά γνωστή: καθένας γνωρίζει ότι είναι η βαρύτητα.

SALVIATI: Κάνεις λάθος Simplicio· έπρεπε να πεις ότι καθένας γνωρίζει ότι ονομάζεται «βαρύτητα». Δεν σου ζήτησα το όνομα του πράγματος, αλλά τη φύση του, για την οποία δεν γνωρίζουμε τίποτα περισσότερο από τη φύση του πράγματος που περιστρέφει τα αστέρια. Δέχομαι την ονομασία που του έχει αποδοθεί: με τη συνεχή χρήση έχει γίνει κοινότατη λέξη και τη χρησιμοποιούμε καθημερινά. Ωστόσο, στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουμε την αρχή ή τη δύναμη που κινεί τις πέτρες προς τα κάτω...

Φαίνεται ότι η μορφή του διαλόγου δεν έχει αλλάξει σημαντικά για περισσότερο από τετρακόσια χρόνια.

Αν βοηθήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι οι ίδιες οι λέξεις δεν συνιστούν γνώση ή κατανόηση και, παράλληλα, αν δώσουμε έμφαση στον λειτουργικό ορισμό των εννοιών (όπως υποστηρίζεται σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου), οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τότε ένας τεχνικός όρος διαθέτει όντως νόημα ή απλώς δεν γνωρίζουμε το νόημά του. Σε αυτή την περίπτωση έχω παρατηρήσει ότι οι μαθητές σταματούν να «εκτοξεύουν» τεχνικούς όρους που τους έχουν «αρπάξει» χωρίς να κατανοούν το περιεχόμενό τους. Πολλοί αναζητούν πλέον το νόημα αυτών των όρων σε άλλες επιστήμες (όχι απαραίτητα θετικές).

2. Το νόημα της «κατακόρυφης» και της «οριζόντιας διεύθυνσης». Ελάχιστοι μαθητές κατέχουν έναν σαφή λειτουργικό ορισμό των εννοιών «οριζόντιος» και «κατακόρυφος». Αν τους ρωτήσουμε πώς μπορούμε με απλό τρόπο να προσδιορίσουμε ακριβώς την κατακόρυφη διεύθυνση στον τόπο όπου βρισκόμαστε, απαντούν «κάθετα στο έδαφος». Αν, κατόπιν, τους προτείνουμε να ανέβουν στην επικλινή πλαγιά ενός παρακείμενου λόφου και να προσδιορίσουν την κάθετη διεύθυνση προς το έδαφος, υποχωρούν από την αρχική άποψή τους· λίγοι, ωστόσο, διαθέτουν περισσότερες γνώσεις, ώστε να την αντικαταστήσουν. Τελικά, ελάχιστοι μαθητές αντιλαμβάνονται σαφώς πώς συνδέεται (είτε με τη βοήθεια του νήματος της στάθμης είτε με το αλφάδι του επιπλοποιού) η κατεύθυνση της βαρυτικής δύναμης με την «οριζόντια» και την «κατακόρυφη» διεύθυνση.

3. Ο αέρας και η βαρύτητα. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι ο αέρας «πιέζει τα σώματα προς τα κάτω». Πολλοί, λοιπόν (ιδιαίτερος όσοι δεν προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί), συνδέουν το γεγονός αυτό με τη βαρύτητα. Θεωρούν, δηλαδή, ότι η βαρύτητα δεν ασκεί έλξη αλλά ώθηση προς τα κάτω. Πιστεύουν ότι επειδή ο αέρας πιέζει το βιβλίο πάνω στο τραπέζι, αν

αφαιρέσουμε τον αέρα, η βαρύτητα εξαφανίζεται. Θεωρούν ότι μέσα σε έναν γυάλινο κώδωνα που δεν περιέχει αέρα, τα σώματα αιωρούνται, επειδή δεν υπάρχει αέρας να τα πιέζει προς τα κάτω. Θεωρούν, επίσης, ότι ένα μπαλόνι το οποίο δεν αιωρείται στον αέρα, μέσα σε έναν κώδωνα που δεν περιέχει αέρα, αιωρείται. Αρχικά, πρέπει να επιτρέψουμε να εκφραστούν ανοιχτά οι συγκεκριμένες απόψεις και να βγουν στην επιφάνεια. Κατόπιν, πρέπει να τις αντικρούσουμε με κατάλληλα πειράματα επίδειξης.

4. *Το νόημα του «κενού».* Επακόλουθη δυσκολία εμφανίζεται με τη λέξη «κενό». Κάποτε, διευθύνοντας μια συζήτηση σχετικά με αστρονομικές παρατηρήσεις (που εκτελούνται διά γυμνού οφθαλμού) σε μια τάξη αδιόριστων δασκάλων δημοτικού, αναφέρθηκα, παρεμπιπτόντως, στο «διαστημικό κενό». Προσέχοντας το παράξενο βλέμμα και τις λοξές ματιές των ακροατών μου, ερευνήσα το ζήτημα: τελικά, ανακάλυψα ότι ενώ αναφερόμουν στο διαστημικό κενό, τα περισσότερα μέλη της τάξης φαντάζονταν ότι τους μιλούσα για την ηλεκτρική σκούπα! Απορούσαν για το τι με παρακίνησε να αναφερθώ σε κάποια μυστηριώδη ηλεκτρική σκούπα κενού! Αμέσως τους έφερα μια αντλία, ένα σωλήνα και έναν γυάλινο κώδωνα.

5. *Η χρήση του σωλήνα «με το φτερό και το νόμισμα».* Η κλασική επίδειξη του σωλήνα με το «φτερό και το νόμισμα» (όπου σώματα τα οποία φανερά δεν πέφτουν μαζί στον αέρα, πέφτουν ταυτόχρονα στο κενό) είναι πολύτιμη για όλες τις τάξεις. (Οι μόνοι μαθητές που, ενδεχομένως, την έχουν παρακολουθήσει είναι εκείνοι οι οποίοι έχουν παρακολουθήσει ένα μη συμβατικό μάθημα φυσικής υψηλού επιπέδου.) Με τη συσκευή όχι μόνο επιδεικνύουμε το νόμο του Γαλιλαίου για την πτώση των σωμάτων, αλλά δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εξαγάγουν συμπεράσματα για την «κατακόρυφη» και «οριζόντια» διεύθυνση, να συζητήσουν το νόημα της λέξης «κενό» και να αποσαφηνίσουν ότι η βαρύτητα δεν εξαφανίζεται μαζί με τον αέρα.

6. *Το νόημα του g .* Πολλοί μαθητές (ακόμα και όσοι παρακολουθούν μαθήματα φυσικής στα οποία χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός), όταν ερωτώνται τι συμβολίζει το g στην κινηματική και τη δυναμική, απαντούν ότι συμβολίζει τη «βαρύτητα». Δεν χρησιμοποιούν καθόλου τη λέξη «επιτάχυνση». Όταν οι ερωτήσεις συνεχιστούν, σχεδόν πάντα προκύπτει ότι οι μαθητές που απαντούν μ' αυτόν τον τρόπο, δεν έχουν καταλάβει καθόλου πώς χρησιμοποιούν το εν λόγω σύμβολο: έχουν απλώς απομνημονεύσει τρόπους επίλυσης των προβλημάτων. Δεν μπορούν να προσδιορίσουν σαφώς το είδος του μεγέθους που αναπαριστά το συγκεκριμένο σύμβολο, αν και πολλοί φαίνεται ότι το θεωρούν μάλλον ως δύναμη παρά ως στιγιαστικό άλλο. Είναι απαραίτητο, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να

ερμηνεύσουν σωστά και με δικά τους λόγια το g , χρησιμοποιώντας παραδείγματα από την καθημερινή εμπειρία.

7. «Αισθανόμενοι» το βάρος ενός αντικειμένου. Οι καθηγητές και τα εγχειρίδια συχνά αναφέρουν πως όταν κρατάμε ένα σώμα, «αισθανόμαστε» το βάρος του. Υπονοούν, επίσης, ότι το βάρος ενός σώματος ασκείται στο τραπέζι το οποίο στηρίζει το σώμα. Αν και στην καθημερινή ομιλία η συγκεκριμένη διατύπωση είναι βολική, σε ένα μάθημα φυσικής είναι καταστροφική: εκεί προσπαθούμε να εξασφαλίσουμε ακρίβεια στην κατανόηση των επιστημονικών εννοιών και της γλώσσας που δημιουργούμε.

Ο όρος «βάρος του σώματος» πρέπει να εισαχθεί για τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη στο σώμα και κατόπιν να χρησιμοποιείται αποκλειστικά μ' αυτόν τον τρόπο. Έτσι, η δύναμη που αισθανόμαστε όταν κρατάμε ένα αντικείμενο, δεν είναι το βάρος του αντικειμένου, αλλά η δύναμη από επαφή που ασκεί το αντικείμενο σε μας. Είναι αληθές ότι ορισμένες φορές η δύναμη από επαφή είναι αριθμητικά ίση με το βάρος του αντικειμένου από την ισότητα, ωστόσο, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι πρόκειται για την ίδια δύναμη. Πράγματι, αν πιέζουμε το αντικείμενο προς τα κάτω ή το τραβάμε προς τα πάνω ή το επιταχύνουμε προς τα πάνω ή προς τα κάτω, οι δύο δυνάμεις δεν είναι ούτε καν αριθμητικά ίσες. Η διάκριση μεταξύ των δύο δυνάμεων δεν είναι τετριμμένη και αν δεν εντυπωθεί στο μυαλό των μαθητών, μεγάλο τμήμα της κατανόησης του επιστημονικού λεξιλογίου χάνεται. Επίσης, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται σαφώς το ζεύγος των δυνάμεων που αποτελείται από τη δύναμη που ασκεί το αντικείμενο στο τραπέζι και από τη δύναμη που ασκεί το τραπέζι στο αντικείμενο, οι οποίες αναπτύσσονται στις επιφάνειες επαφής, σύμφωνα με τον 3ο Νόμο.

8. *Βάρος και έλλειψη βάρους*. Οι περισσότεροι καθηγητές είναι ενήμεροι για την ατυχή (ή λανθασμένη) χρήση της έκφρασης «έλλειψη βάρους» στην περίπτωση των δορυφόρων και των διαστημικών οχημάτων. Δεν μπορούμε να κάνουμε πολλά πράγματα για να διορθώσουμε την κατάσταση (όπως δεν μπορούμε να αναγκάσουμε τους ανθρώπους να χρησιμοποιούν τη λέξη «μάζα» αντί «βάρος», όταν αναφέρονται σε ορισμένα χιλιόγραμμα πατάτες στο μπακάλικο!). Μπορούμε, ωστόσο, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές, ώστε να κατανοήσουν κάπως τι περιγράφουν οι συγκεκριμένοι όροι και γιατί η συγκεκριμένη ορολογία είναι ατυχής.

Ορισμένοι συγγραφείς και καθηγητές προσπαθούν να παρακάμψουν το ζήτημα, αλλάζοντας απότομα το νόημα του όρου «βάρος» (συχνά χωρίς να το ομολογούν): ορίζουν αρχικά το «βάρος» ως τη βαρυτική δύναμη που η Γη ασκεί στα σώματα· στη συνέχεια, αλλάζουν το νόημά του περιγράφοντας το «βάρος» ως την ένδειξη της ζυγαριάς πάνω στην οποία έχει τοποθετηθεί το σώμα· ταυτίζουν, δηλαδή, το «βάρος» με την κάθετη δύναμη που

ασκεί η ζυγαριά στο σώμα. Όπως επισημάναμε προηγουμένως, η εν λόγω δύναμη όχι μόνο δεν είναι η βαρυτική δύναμη της Γης πάνω στα σώματα, αλλά και σε πολλές περιπτώσεις ούτε καν ισούται αριθμητικά με τη βαρυτική δύναμη. Αν και η συγκεκριμένη χρήση φαίνεται ότι διευκολύνει τον εκπαιδευόμενο, είναι αναμφισβήτητα καταστροφική και προκαλεί πολύ περισσότερα προβλήματα και συγχύσεις από όσα επιλύει. Λόγου χάρη, ενισχύει τη λανθασμένη αντίληψη ότι η δύναμη της βαρύτητας εξαφανίζεται όταν ένα σώμα πέφτει ελεύθερα ή όταν το απομακρύνουμε αρκετά από τη Γη.

Η καλύτερη τακτική είναι να συνεχίσουμε απαρέγκλιτα να θεωρούμε ότι το «βάρος» είναι η βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα. Πρέπει, επίσης, να βοηθήσουμε το μαθητή να αναλύσει την εμπειρία που έχει αποκτήσει με τις αισθήσεις του σε διάφορες περιπτώσεις.

Πρώτον, ο μαθητής πρέπει να αντιληφθεί ότι δεν αισθανόμαστε ούτε νιώθουμε τη βαρυτική δύναμη. Δεχόμαστε την ύπαρξή της, επειδή απ' ενός έχουμε παρατηρήσει ότι τα σώματα, όταν πέφτουν ελεύθερα, επιταχύνονται, απ' ετέρου έχουμε ορίσει τη «δύναμη» ως τη δράση που προσδίδει επιτάχυνση. Όταν πηδάμε από ψηλά, ωστόσο, δεν αισθανόμαστε κάτι να μας πιέζει, καθώς πέφτουμε.

Κατόπιν, πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι στην πραγματικότητα αισθανόμαστε ή νιώθουμε την κάθετη δύναμη που ασκείται σε μας από το σώμα πάνω στο οποίο στεκόμαστε ή καθόμαστε. Η εν λόγω δύναμη είναι αριθμητικά ίση με το βάρος μας μόνο αν δεν είμαστε φορτωμένοι με κάποιο αντικείμενο και δεν επιταχυνόμαστε προς τα πάνω ή προς τα κάτω. (Έτσι, μπορούμε να καθοδηγήσουμε το μαθητή να προσδιορίσει τις εξαιρετικά ιδιαίτερες συνθήκες υπό τις οποίες ζυγίζομαστε.)

Στη συνέχεια διερευνούμε τι συμβαίνει στις ενδείξεις της ζυγαριάς, καθώς επιταχυνόμαστε, προς τα πάνω ή προς τα κάτω, λόγου χάρη μέσα σε ασανσέρ. Πολλοί μαθητές έχουν προσέξει τι αισθάνονται σ' αυτές τις περιπτώσεις και είναι προετοιμασμένοι για τον προσδιορισμό των δυνάμεων που δέχονται: όταν επιταχυνόμαστε προς τα πάνω αισθανόμαστε μια δύναμη μεγαλύτερη από τη συνηθισμένη· όταν επιταχυνόμαστε προς τα κάτω αισθανόμαστε μια δύναμη μικρότερη από τη συνηθισμένη.

Τέλος, είναι δυνατό να εξετάσουμε την εξής οριακή περίπτωση: όταν το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα κάτω και η τιμή της επιτάχυνσής του πλησιάζει όλο και περισσότερο την τιμή της επιτάχυνσης κατά την ελεύθερη πτώση, πώς μεταβάλλεται η δύναμη που ασκεί η ζυγαριά προς τα πάνω σε μας; Οι περισσότεροι μαθητές συμφωνούν ότι η προς τα πάνω δύναμη που ασκείται σε μας και η ένδειξη της ζυγαριάς πλησιάζουν το μηδέν.

Είναι πλέον δυνατό να ασχοληθούμε με την επόμενη διατύπωση: Όταν πέφτουμε ελεύθερα, η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μας δεν έχει μηδενιστεί· έχει μηδενιστεί απλώς η κάθετη δύναμη που ασκείται στα πόδια μας

—η δύναμη που αισθανόμαστε άμεσα. Στις εν λόγω συνθήκες νιώθουμε ένα παράξενο αίσθημα, «το αίσθημα της έλλειψης βάρους». Χρησιμοποιούμε, λοιπόν, την ασαφή έκφραση «έλλειψη βάρους» για να περιγράψουμε την κατάσταση της ελεύθερης πτώσης του ασανσέρ ή του δορυφόρου. Πρέπει, ωστόσο, να αντιλαμβανόμαστε τη σύγχυση που υπάρχει στη χρήση της συγκεκριμένης έκφρασης και να μην την ερμηνεύουμε κατά γράμμα, ότι, δηλαδή, η βαρυτική δύναμη έχει όντως μηδενιστεί.

9. *Οι δυνάμεις στην ελεύθερη πτώση και στη βολή.* Πολλοί συγγραφείς και καθηγητές είναι τόσο εξοικειωμένοι με το νόμο του Γαλιλαίου για την ελεύθερη πτώση και με τις συνηθισμένες εξιδανικεύσεις (δεν λαμβάνουν υπόψη τους τις δυνάμεις τριβής που, ωστόσο, υπάρχουν παντού), ώστε έχουν την τάση να προσπερνούν το συγκεκριμένο θέμα όσο το δυνατό γρηγορότερα για να καλύπτουν εκτενέστερα πιο «ενδιαφέροντα» ζητήματα. Η πρωτογενής αντίληψη που προκύπτει από την κοινή λογική και διαποτίζει αυτό το θέμα είναι, ωστόσο, πολύ ανθεκτική. Πολλοί μαθητές, αν δεν τους βοηθήσουμε κατάλληλα, «ξεμένουν», καταφεύγουν στην απομνημόνευση και στην πραγματικότητα ουδέποτε επανακάμπτουν.

(α) Πολλοί μαθητές, όταν τελικά «ξανοίγονται», μου εξομολογούνται το εξής: αν και τους έχουν «πει» (και είναι σε θέση να επαναλάβουν ακριβώς τη διατύπωση) ότι όλα τα σώματα, όταν αφεθούν, πέφτουν μαζί, «στην πραγματικότητα ουδέποτε το πίστεψαν».

Χρειάζεται να παρατηρήσουν οι ίδιοι και να περιγράψουν με δικά τους λόγια απλές επιδείξεις, λόγου χάρη την πτώση δίπλα δίπλα ενός φύλλου χαρτί και ενός τσαλακωμένου φύλλου σε σχήμα μπάλας, την πτώση ενός φύλλου χαρτί τοποθετημένο πάνω σε κάποιο βιβλίο που πέφτει, τις στροβοσκοπικές φωτογραφίες μεγάλων και μικρών αντικειμένων που πέφτουν δίπλα δίπλα, το φτερό και το νόμισμα που προαναφέραμε κτλ.

(β) Πολλοί μαθητές, αφού πειστούν πως όταν απουσιάζουν φαινόμενα τριβής, όλα τα σώματα πέφτουν όντως μαζί, υιοθετούν την άποψη ότι, για να συμβαίνει αυτό, οι δυνάμεις που ασκούνται σε διαφορετικά σώματα πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα, χρειάζεται συζήτηση και παρατήρηση: η απλή διαβεβαίωση από τον καθηγητή έχει μικρό αποτέλεσμα.

(γ) Οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία (σε προβλήματα για το σπίτι και σε τεστ) να σχεδιάζουν μόνοι τους τις δυνάμεις (και στο σώμα και στη Γη), όταν αφήνουμε ένα σώμα να πέσει ή όταν το πετάμε κατακόρυφα προς τα πάνω (καθώς ανεβαίνει, καθώς κατεβαίνει και όταν βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της διαδρομής του). Πρέπει, επίσης, να σχεδιάσουν τις δυνάμεις όταν ένα βαγονάκι κινείται χωρίς τριβές πάνω σε στρώμα του αέρα που παρεμβάλλεται μεταξύ του βαγονιού και του τραπέζιου, όταν το βαγόνι φτάνει στην άκρη του τραπέζιου και όταν πέφτει ελεύθερα. Πρέπει, επίσης,

να σχεδιάσουν τις δυνάμεις όταν ένα βλήμα βρίσκεται σε διάφορα σημεία της τροχιάς του.

(δ) Το διάγραμμα των δυνάμεων της παραγράφου (γ) πρέπει κάθε φορά να συνοδεύεται από ένα ξεχωριστό διάγραμμα των διανυσμάτων της στιγμιαίας ταχύτητας και από ένα διάγραμμα των διανυσμάτων της στιγμιαίας επιτάχυνσης. Η αντιπαράβολή των διαγραμμάτων βοηθά στην εμπέδωση: ο μαθητής αναγκάζεται να αναλύσει την ίδια κατάσταση με απολύτως διαφορετικούς τρόπους.

10. Οι Gunstone και White (1981) παρουσιάζουν ένα σύνολο ιδιαίτερα αποκαλυπτικών απαντήσεων που αφορούν την επόμενη κατάσταση: Στήνουμε μια ρόδα ποδηλάτου σαν τροχαλία με τον άξονά της, δύο μέτρα πάνω από τον πάγκο του εργαστηρίου. Ένα σχοινί περασμένο στην τροχαλία συνδέει ένα δοχείο με άμμο με ένα κομμάτι ξύλο ίσης μάζας· δηλαδή, οι μαθητές παρατηρούν μια μηχανή Atwood με ένα δοχείο με άμμο στη μια άκρη κι ένα κομμάτι ξύλο στην άλλη. (Οι σπουδαστές που πήραν μέρος στην έρευνα ήταν πρωτοετείς φοιτητές του Πανεπιστημίου Monach της Μελβούρνης της Αυστραλίας· επρόκειτο, λοιπόν, για σπουδαστές που δεν είχαν ακόμη διδαχθεί πανεπιστημιακή φυσική.) Κατόπιν, οι σπουδαστές απαντούσαν σε διάφορες ερωτήσεις. Σε ορισμένες έπρεπε να προβλέψουν τη συμπεριφορά της μηχανής, αν γίνονταν ορισμένες αλλαγές· έπρεπε, επίσης, να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

(α) Αρχικά, οι σπουδαστές παρατηρούσαν ότι η τροχαλία περιστρεφόταν ελεύθερα· κατόπιν, το σχοινί τοποθετούνταν πάνω της, έτσι ώστε το δοχείο να βρίσκεται εμφανώς ψηλότερα από το ξύλο. Το σύστημα ηρεμούσε. Οι σπουδαστές έπρεπε να απαντήσουν στο ερώτημα: «Ποιο σώμα είναι βαρύτερο, το δοχείο ή το ξύλο;» Το 27% των σπουδαστών απαντούσε ότι το ξύλο είναι βαρύτερο, οι περισσότεροι μάλιστα δικαιολογούσαν το συμπέρασμα τους ως εξής: επειδή το ξύλο βρίσκεται πλησιέστερα στο πάτωμα, είναι βαρύτερο. Μια άλλη εξήγηση που έδιναν ορισμένοι ήταν η εξής: «Τάση υπάρχει και στα δύο άκρα του σχοινιού· ωστόσο, η τάση στο άκρο όπου βρίσκεται το δοχείο είναι μικρότερη από την τάση στο άκρο όπου βρίσκεται το ξύλο· αποτέλεσμα: το ξύλο έλκεται προς τα κάτω και ανασηκώνει το δοχείο».

(β) Κατόπιν, οι σπουδαστές έπρεπε να προβλέψουν τι συμβαίνει αν προσθέσουμε στο δοχείο μια μεγάλη φτυαριά άμμο. Το 30% προέβλεπε ότι το σύστημα μετατοπίζεται σε νέα θέση ισορροπίας με το δοχείο πλησιέστερα στο τραπέζι και το ξύλο ψηλότερα.

(γ) Αφού οι σπουδαστές παρατηρούσαν ότι τελικά το σύστημα κινείται συνεχώς όταν προσθέσουμε τη φτυαριά με την άμμο στο δοχείο, έπρεπε να προβλέψουν σε ποιο από τα δύο σημεία, ένα σε υψηλή θέση και ένα σε χαμηλή (κοντά στο τραπέζι), η ταχύτητα του δοχείου είναι μεγαλύτερη. Το

90% προέβλεπε σωστά ότι η ταχύτητα θα είναι μεγαλύτερη στο κατώτερο σημείο· ωστόσο, ορισμένοι δήλωναν πως η πρόβλεψή τους στηριζόταν στο ότι γνώριζαν ότι η βαρυτική δύναμη που δρα στο δοχείο αυξανόταν καθώς το δοχείο κατέβαινε (ή πως η δύναμη που δρα στο ξύλο μειωνόταν καθώς το ξύλο ανέβαινε). Άλλοι δήλωναν ότι η επιτάχυνση του δοχείου ισούται με g . Μετά την εκτέλεση της επίδειξης, το 7% των σπουδαστών ανέφεραν ότι παρατήρησαν πως οι ταχύτητες στα δύο σημεία ήταν ίσες μεταξύ τους. Οι συγκεκριμένοι σπουδαστές απέδιδαν την ασυμφωνία μεταξύ της πρόβλεψης και του πειράματος στο ότι «η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική» ή στο ότι «τα σώματα επιταχύνονται μόνον όταν πέφτουν ελεύθερα» ή στο ότι «υπάρχουν τριβές» και, τέλος, στο ότι «οι παρατηρήσεις τους δεν είναι ακριβείς».

(δ) Το ξύλο και το δοχείο (που είχαν ίσες μάζες μεταξύ τους) τοποθετούνταν στην τροχαλία, έτσι ώστε να κρέμονται στο ίδιο ύψος χωρίς να κινούνται. Κατόπιν, ο πειραματιστής μετακινούσε το ξύλο προς τα κάτω κατά 0,7 m και το κρατούσε. Οι σπουδαστές έπρεπε να προβλέψουν τι θα συμβεί όταν το ξύλο αφηθεί ελεύθερο. Μόνο το 54% προέβλεπε ότι το σύστημα θα παραμείνει ακίνητο. Το 35% προέβλεπε ότι θα επιστρέψει στην αρχική θέση του, το 9% ότι το δοχείο θα πέσει και το 2% ότι θα πέσει το ξύλο.

Οι Gunstone και White παραθέτουν περισσότερες και λεπτομερέστερες πληροφορίες στο άρθρο τους. Τα προηγούμενα σημεία επιλέχθηκαν απλώς ως παράδειγμα. Δίδαγμα: επειδή οι καθηγητές είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με τις βασικές έννοιες και τα φαινόμενα, θεωρούν περιττό να ελέγξουν αν παρόμοια κατάσταση επικρατεί και στην τάξη τους. Ωστόσο, μόνον αν συμπεριλάβουμε ερωτήσεις αυτού του είδους στα προβλήματα για το σπίτι και στα τεστ, βοηθάμε την πλειονότητα των μαθητών που δυσκολεύονται να κατανοήσουν το θέμα.

3.17 Νήματα και τάσεις

Πολλά εγχειρίδια εισάγουν τον όρο «τάση» και αρχίζουν να τον χρησιμοποιούν χωρίς να διατυπώνουν κάποιο λειτουργικό ορισμό. Θεωρούν, δηλαδή, ότι ο καθένας γνωρίζει το νόημα του όρου. Οι μαθητές, ωστόσο, αν τους θέσουμε το γνωστό πρόβλημα με τα δύο σχοινιά, αντιμετωπίζουν δυσκολίες: Σε κάθε άκρο ενός σχοινιού εφαρμόζεται δύναμη 50 N· στο ένα άκρο ενός άλλου σχοινιού, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στον τοίχο, εφαρμόζεται επίσης δύναμη 50 N. Οι μαθητές απορούν πώς είναι δυνατόν η τάση να είναι ίδια και στα δύο σχοινιά και δεν καταλαβαίνουν γιατί στο πρώτο σχοινί δεν είναι 100 N.

Υπάρχουν εδώ δύο βαθύτερες δυσκολίες. Πρώτον, όταν οι μαθητές συ-

ναντούν για πρώτη φορά αυτήν την κατάσταση δεν έχουν αφομοιώσει απολύτως τον 3ο Νόμο: επειδή σχεδιάζουν λανθασμένα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σχοινί, δεν αντιλαμβάνονται ότι οι δύο περιπτώσεις είναι ταυτόσημες ως προς τις δυνάμεις που ασκούνται στα σχοινιά. Η επόμενη δυσκολία οφείλεται στο ότι η έννοια της «τάσης» δεν έχει οριστεί προηγουμένως.

Μια απλή προσέγγιση είναι η εξής: καθοδηγούμε τους μαθητές να φανταστούν μια «τομή» ενός τεντωμένου νήματος και να σχεδιάσουν τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο τμήματα του σχοινοῦ εκατέρωθεν της τομής. (Η συγκεκριμένη σχεδίαση δεν είναι απλώς καλή άσκηση εφαρμογής του 3ου Νόμου· ταυτόχρονα, εισάγει τους μαθητές στην εξέταση των δυνάμεων που δρουν στο εσωτερικό των αντικειμένων. Έως αυτό το στάδιο οι μαθητές μελετούν και σχεδιάζουν δυνάμεις που οφείλονται μόνο σε εξωτερικές επιδράσεις. Δεν μπορούν ακόμα να φανταστούν πώς ασκούνται οι δυνάμεις στο εσωτερικό ενός σώματος εκατέρωθεν μιας τομής του.) Αφού σχεδιάσουμε τις ίσες και αντίθετες δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε τμήμα εκατέρωθεν της τομής, μπορούμε να ονομάσουμε τη δύναμη που ασκείται σε κάθε πλευρά της τομής «τάση που ασκείται στην τομή».

Έχοντας ορίσει την τάση μ' αυτόν τον τρόπο, είναι απλούστερο, επικαλούμενοι φαινομενολογικούς όρους και τη φαντασία των μαθητών, να εξετάσουμε την τάση σε ένα ογκώδες σχοινί (μια αλυσίδα ή μια ράβδο), καθώς αυτό επιταχύνεται υπό την επίδραση κάποιας δύναμης που ασκείται στο ένα άκρο του. Δεν είναι απαραίτητο να λύσουμε ποσοτικά προβλήματα. Καθώς εξετάζουμε την τάση πάνω σε κάθε «φέτα» κατά μήκος του σχοινοῦ, προκύπτει, με την εφαρμογή του 2ου Νόμου, ότι η τάση μειώνεται συνεχώς από την τιμή της δύναμης που ασκείται στο ένα άκρο ως τη μηδενική τιμή στο άλλο άκρο. Είναι επίσης δυνατό να παρακάμψουμε το πρόβλημα του τρόπου μεταβολής της τάσης στην περίπτωση που το σχοινί επιταχύνεται υπό την επίδραση δύο άνισων και αντίθετων δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στα άκρα του.

3.18 Νήματα «χωρίς μάζα»

Είναι αρκετά γνωστό ότι τα νήματα «χωρίς μάζα» είναι πηγή σημαντικών εννοιολογικών προβλημάτων για πολλούς μαθητές. Και τούτο, επειδή οι μαθητές δεν διαθέτουν έναν καταληπτό λειτουργικό ορισμό της έννοιας «σώμα χωρίς μάζα». Δεν κατανοούν, επίσης, γιατί οι δυνάμεις της τάσης έχουν ίσο μέτρο και στα δύο άκρα του νήματος. Αποτέλεσμα: απομνημονεύουν διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων χωρίς να κατανοούν τι κάνουν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το σημαντικότερο πρόβλημα είναι το εξής: όταν στο κείμενο εισάγονται νήματα «χωρίς μάζα», πολλοί μαθητές δεν

έχουν ακόμη αφομοιώσει απολύτως την ιδέα ότι η *διαφορά* μεταξύ του μέτρου δύο αντίθετων δυνάμεων που ασκούνται σε ένα επιταχυνόμενο σώμα εξαρτάται από τη μάζα του σώματος (όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή). Η προσεκτική και σαφής ανάπτυξη της έννοιας του νήματος «χωρίς μάζα» βοηθά τους μαθητές όχι μόνο να επιλύσουν τα αντίστοιχα προβλήματα αλλά και να συλλάβουν μια σημαντική πλευρά του 2ου Νόμου, που μέχρι τότε τους διέφευγε.

Οι μαθητές διευκολύνονται σημαντικά να κατανοήσουν την έννοια της έλλειψης μάζας, αν τους παρουσιάσουμε τον λειτουργικό ορισμό της τάσης (όπως τον περιγράψαμε στο προηγούμενο εδάφιο) και, κατόπιν, χρησιμοποιήσουμε το επόμενο παράδειγμα: Δένουμε το ένα άκρο ενός σχοινιού που έχει μάζα $m_{\sigma\chi}$ σε ένα ογκώδες σώμα. Κατόπιν, τραβώντας το άλλο άκρο του σχοινιού με δύναμη T_1 , επιταχύνουμε το σύστημα οριζοντίως με επιτάχυνση $\gamma_{\sigma\chi}$. Αν σχεδιάσουμε ξεχωριστά τα διαγράμματα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και στο σχοινί, μπορούμε να κατευθύνουμε τους μαθητές να αναγνωρίσουν ότι το σώμα ασκεί δύναμη T_2 στο άλλο άκρο του σχοινιού. Συνήθως απαιτείται λεπτομερέστερη εξέταση για να βεβαιωθούμε ότι οι μαθητές κατανοούν, όντως, ότι η T_2 πρέπει να έχει μικρότερο μέτρο από την T_1 και ότι οι δύο δυνάμεις είναι, αντίστοιχα, ίσες με τις (διαφορετικές) τάσεις που ασκούνται στα άκρα του σχοινιού.

Αν εφαρμόσουμε στο σχοινί τον 2ο Νόμο, προκύπτει η έκφραση:

$$T_1 - T_2 = m_{\sigma\chi} \gamma_{\sigma\chi} \quad (3.18.1)$$

Πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να *ερμηνεύσουν* την εν λόγω σχέση. Στο συγκεκριμένο στάδιο ανάπτυξης, ελάχιστοι μαθητές αντιλαμβάνονται τι σημαίνει «ερμηνεύω μια αλγεβρική έκφραση» και προβάλλουν σθεναρή αντίσταση στο να κάνουν κάτι τέτοιο. Πρέπει να τους καθοδηγήσουμε να αναφέρουν ότι η εξίσωση υπονοεί πως, όταν η επιτάχυνση είναι μηδενική, οι δύο δυνάμεις είναι ίσες μεταξύ τους κατά μέτρο. Πρέπει να αναφέρουν επίσης ότι από την εξίσωση επιβεβαιώνεται το προηγούμενο ποιοτικό συμπέρασμα: όταν η επιτάχυνση είναι μη μηδενική, η T_1 είναι μεγαλύτερη από την T_2 .

Μπορούμε, πλέον, να μελετήσουμε το ουσιαστικό σημείο της συζήτησής μας: Πώς μεταβάλλεται η T_2 όταν η μάζα $m_{\sigma\chi}$ του σχοινιού ελαττώνεται συνεχώς, ενώ η επιτάχυνση $\gamma_{\sigma\chi}$ παραμένει σταθερή; Στο συγκεκριμένο στάδιο, οι περισσότεροι μαθητές είναι δυνατό να διακρίνουν ότι η τιμή της T_2 πλησιάζει συνεχώς την τιμή της T_1 . Δηλαδή, οι δύο δυνάμεις εξισώνονται οριακά και αυτό ακριβώς είναι το πραγματικό νόημα της έννοιας νήμα «χωρίς μάζα» που συναντάμε στα προβλήματα των εγχειριδίων.

Μια κάπως αυστηρότερη ανάλυση, που την επιζητούν ιδιαίτερα μαθητές με πιο εκλεπτυσμένο τρόπο σκέψης, περιλαμβάνει την αλγεβρα ολόκλη-

ρου του συστήματος (συμπεριλαμβανομένου του σώματος μάζας $m_{\sigma\omega\mu}$). Η ανάλυση καταλήγει στην έκφραση:

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{m_{\sigma\chi}}{m_{\sigma\omega\mu}} \quad (3.18.2)$$

Ερμηνεύοντας την έκφραση, παρατηρούμε ότι η τιμή της T_2 πλησιάζει την τιμή της T_1 , όταν η $m_{\sigma\chi}$ είναι πολύ μικρότερη από την $m_{\sigma\omega\mu}$. Έτσι, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι, σε τελευταία ανάλυση, η «έλλειψη μάζας» δεν είναι απόλυτη έννοια αλλά σχετική.

Παρόμοιες αναλύσεις αποτελούν ευκαιρία για μια στοιχειώδη επίδειξη θεωρητικής ανάλυσης, που είναι απαραίτητη στους μαθητές που προορίζονται για φυσικοί ή μηχανικοί. Ωστόσο, αν και τις περισσότερες φορές οι καθηγητές αρνούνται, δυστυχώς, να τους παράσχουν αυτή την ευκαιρία, κατόπιν απορούν γιατί στις επόμενες τάξεις οι μαθητές εμφανίζονται τόσο καθυστερημένοι.

3.19 Η δύναμη που είναι κάθετη στην επιφάνεια διαχωρισμού

Για πρώτη φορά οι μαθητές συναντούν την κάθετη δύναμη N , συνήθως στην περίπτωση όπου ένα αντικείμενο μάζας m ηρεμεί πάνω σε οριζόντια επιφάνεια: λόγου χάρη, ένα βιβλίο ηρεμεί πάνω στο τραπέζι, το ίδιο το σώμα του μαθητή πάνω στο έδαφος κτλ. Πολλοί, ωστόσο, επειδή δεν έχουν σχηματίσει ακόμη σαφή αντίληψη της έννοιας της δύναμης και του 3ου Νόμου, απομνημονεύουν απλώς την έκφραση $N = mg$ και παραμένουν προσηλωμένοι σ' αυτήν, ακόμα και σε περιπτώσεις όπου δεν εφαρμόζεται. [Διατυπώσεις όπως «όταν σηκώνουμε ένα αντικείμενο, νιώθουμε το βάρος του», που μελετήσαμε στο εδάφιο 3.16(7), συμβάλλουν σ' αυτήν την παρανόηση.]

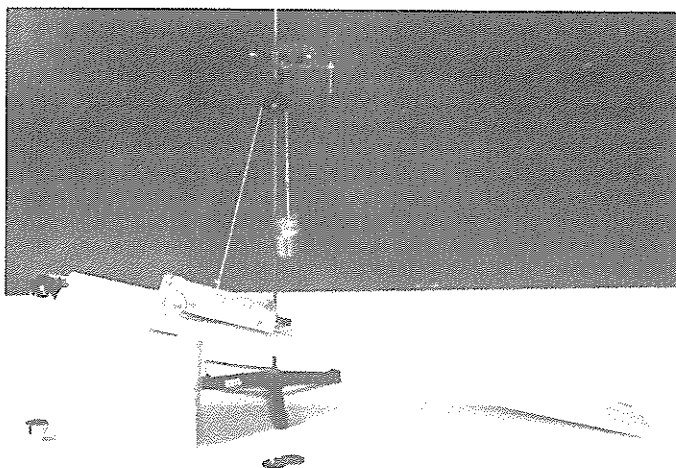
Για να προλάβουμε την παρανόηση, πρέπει να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να αντιληφθούν πώς μεταβάλλεται η κάθετη δύναμη όταν τραβάμε το βιβλίο κατακόρυφα προς τα πάνω ή όταν το πιέζουμε κατακόρυφα προς τα κάτω. Αυτό πρέπει να γίνει όσο είναι δυνατόν αμέσως μετά, αφότου οι μαθητές έχουν αρχίσει να αποδέχονται την ιδέα ότι το άψυχο τραπέζι ασκεί, όντως, δύναμη. Πρέπει να τους καθοδηγήσουμε να αντιληφθούν ότι στην πραγματικότητα η N σχεδόν ποτέ δεν ισούται με mg και πως η ισότητα ισχύει μόνο στην ειδική περίπτωση όπου δεν ασκούνται άλλες κατακόρυφες δυνάμεις, εκτός από την έλξη της Γης.

Στο συγκεκριμένο στάδιο, άλλη πολύ χρήσιμη άσκηση, στο πλαίσιο της οποίας αν και επαναλαμβάνονται ορισμένες ιδέες, ταυτόχρονα μεταλλάσ-

σεται και εμπλουτίζεται το περιεχόμενό τους, είναι το να πιέσουμε το βιβλίο στον τοίχο. Σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει να παραδεχτούμε ότι ο τοίχος — που είναι, επίσης, άψυχο αντικείμενο — ασκεί κάθετη δύναμη, η οποία, ωστόσο, δεν έχει καμιά σχέση με την ποσότητα mg : το μέγεθός της προσδιορίζεται αποκλειστικά από την οριζόντια δύναμη που ασκούμε με το χέρι μας. (Η συγκεκριμένη κατάσταση είναι, επίσης, χρήσιμη, επειδή οι μαθητές παρατηρούν ότι οι δυνάμεις τριβής δεν εξαρτώνται απαραίτητως από την ποσότητα mg — παρανόηση που δημιουργήθηκε κατά την πρώτη επαφή τους με την έννοια της τριβής πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Στο εδάφιο 3.21 μελετάμε εκτενέστερα αυτό το θέμα.) Στο παρόν στάδιο, η διερεύνηση της συμπεριφοράς της κάθετης δύναμης όταν πιέζουμε ένα βιβλίο στο ταβάνι, αποδεικνύεται πολύτιμη άσκηση για το σπίτι.

Επειδή, αρχικά, μελετάμε τις περιπτώσεις όπου η κάθετη δύναμη ασκείται σε οριζόντια επιφάνεια, ορισμένες πρόσθετες παρανοήσεις περνούν απαρατήρητες. Πολλοί μαθητές ερμηνεύουν τον όρο «κάθετος» ως «συνήθης» ή «κανονικός» και όχι με τη γεωμετρική σημασία του.* Δεν αντιλαμβάνονται το πλήρες νόημα του όρου, παρά μόνον όταν αντιμετωπίσουν την περίπτωση του κεκλιμένου επιπέδου. Μέχρι τότε, συχνά οι καθηγητές δεν αντιλαμβάνονται ότι η έννοια δεν έχει διερευνηθεί πειστικά. Τα εγχειρίδια, επίσης, επειδή τη θεωρούν αρκετά προφανή, δεν τη μελετούν.

Από την πείρα μου έχω συμπεράνει ότι η φυσική διάταξη του Σχ. 3.19.1 είναι πολύ χρήσιμη: προβάλλει και τακτοποιεί αρκετά από τα ζητήματα που προαναφέραμε. Η συσκευή χρησιμοποιείται ευρέως στην επίδειξη της σύν-



Σχήμα 3.19.1 Επίδειξη μιας κατάστασης όπου η «κάθετη» δύναμη στην επιφάνεια επαφής είναι όντως κάθετη στην επιφάνεια.

* Στην αγγλική γλώσσα η λέξη *normal* σημαίνει κανονικός, αλλά και κάθετος. (Σ.τ.μ.).

θεσης και της ανάλυσης των δυνάμεων (οπότε εκτελούμε ποσοτικές μετρήσεις) και υπάρχει στα περισσότερα εργαστήρια. Ωστόσο, σπάνια έχω δει να χρησιμοποιείται για να αποσαφηνιστεί η έννοια της «κάθετης δύναμης» μέσω της παρατήρησης ότι το κεκλιμένο επίπεδο ασκεί δύναμη κάθετα στην επιφάνειά του μόνον όταν δεν υπάρχει τριβή.

Αφού διευθετήσουμε το βαγονάκι παράλληλα προς τη σανίδα, προσπαθούμε να «αντικαταστήσουμε» τη δύναμη που ασκεί η σανίδα πάνω του, κρεμώντας σταθμά στο δεύτερο νήμα. Πολλοί μαθητές δεν προσέχουν την κατεύθυνση του νήματος, εκτός κι αν τους το υποδειξουμε. Πρέπει επίσης να τους καθοδηγήσουμε να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ της δύναμης που τώρα ασκεί το νήμα και εκείνης που ασκούσε προηγουμένως η σανίδα.

Στη συγκεκριμένη επίδειξη προκαλεί ιδιαιτέρως εντύπωση το ότι μετακινώντας το βαγονάκι πάνω (ή κάτω) κατά μήκος της σανίδας, ώστε η κατεύθυνση του νήματος να διαφέρει φανερά από την κατακόρυφο, το βαγονάκι ταλαντεύεται, μέχρι να βρεθεί πάλι στη θέση όπου το νήμα είναι κάθετο στη σανίδα. Κατά τη διάρκεια της επίδειξης συχνά ακούγονται επιφωνήματα που υποδηλώνουν ότι το παρατηρούμενο φαινόμενο είναι απροσδόκητο. Στις περισσότερες περιπτώσεις, για να αναδειχθούν σαφώς οι σχετικές ιδέες είναι απαραίτητο να προχωρήσει η μελέτη στην εξέταση των συνιστωσών της δύναμης και στον τρόπο που επιταχύνεται το βαγόνι, όταν απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του.

Η συγκεκριμένη επίδειξη είναι επίσης πολύτιμη επειδή βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις *ορθογώνιες συνιστώσες* μιας δύναμης. Αυτό το θέμα θα το μελετήσουμε λεπτομερέστερα στο εδάφιο 4.3.

3.20 Τα αντικείμενα δεν «τινάζονται προς τα πίσω» όταν επιταχύνονται

Θεωρήστε τις επόμενες περιπτώσεις: (1) τοποθετούμε μια μπάλα πάνω σε κάποιο βαγονάκι το οποίο, ενώ αρχικά ηρεμεί, το επιταχύνουμε· (2) από την οροφή ενός αυτοκινήτου που επιταχύνεται, κρεμάμε ένα βαρίδι το οποίο αιωρείται· (3) ένας άνθρωπος κάθεται μέσα σε κάποιο αυτοκίνητο το οποίο αρχίζει να επιταχύνεται.

Αν ζητήσετε την άποψη των μαθητών για οποιαδήποτε από τις προηγούμενες περιπτώσεις, οι περισσότεροι διατείνονται πως όταν το όχημα επιταχύνεται, ο άνθρωπος, το βαρίδι και η μπάλα «τινάζονται προς τα πίσω». Αν, μάλιστα, τους ζητήσετε να σχεδιάσουν τις δυνάμεις, σχεδιάζουν, επίσης, μια δύναμη που δρα προς τα πίσω. Η προέλευση της συγκεκριμένης παρανόησης είναι, βεβαίως, φυσιολογική και στηρίζεται στην κοινή αντίληψη: στη συγκεκριμένη κατάσταση έχουμε την τάση να παρατηρούμε τα φαινόμενα από το επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς. Η περίπτωση αυτή δεν είναι καθόλου τετριμμένη, και είναι λάθος να εμπιστευόμαστε απολύτως τη

θεραπεία της σε ασκήσεις για το σπίτι. Μέσα στην τάξη πρέπει να μελετάμε, τουλάχιστον, μια τέτοια περίπτωση. Η μελέτη πρέπει να συνοδεύεται από τη σχετική επίδειξη.

Καμιά μελέτη και κανείς ορισμός αδρανειακού συστήματος αναφοράς δεν προκαλεί μεγαλύτερη εντύπωση στους μαθητές μέχρι να συναντήσουν ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς και να αρχίσουν να εμφανίζονται μπροστά τους παράδοξα αποτελέσματα. Για να κατανοήσουμε τι *είναι* το αδρανειακό σύστημα, πρέπει να αρχίσουμε να αντιλαμβανόμαστε τι *δεν* είναι. Καταστάσεις, λοιπόν, όπως οι προηγούμενες, είναι μια πρώτη ευκαιρία για να μελετήσουμε το θέμα στο πλαίσιο της ευθύγραμμης κίνησης.

Οι μαθητές μπορούν εύκολα να εκτελέσουν στο σπίτι το πείραμα της μπάλας με το βαγονάκι. Οι περισσότεροι, λοιπόν, εκπλήσσονται παρατηρώντας ότι η μπάλα, αν και κυλά προς τα πίσω ως προς το βαγονάκι, κινείται προς τα εμπρός ως προς το έδαφος.

Στην περίπτωση του αιωρούμενου βαριδιού, άριστη και πολύ απλή επίδειξη είναι δυνατό να εκτελεστεί αν επιταχύνουμε με το χέρι μας την πάνω άκρη του νήματος από το οποίο κρέμεται το βαρίδι. Οι μαθητές παρατηρούν ότι το σημείο από το οποίο κρατάμε το σχοινί κινείται προς τα μπρος, ενώ η θέση του βαριδιού ως προς το πάτωμα παραμένει η ίδια. Αρχίζουν λοιπόν να αντιλαμβάνονται τα εξής: το βαρίδι δεν τινάζεται προς τα πίσω ως προς το πάτωμα· αρχίζει να επιταχύνεται μόνον όταν η δύναμη που ασκεί πάνω του το νήμα αποκτά μη μηδενική οριζόντια συνιστώσα. (Στο συγκεκριμένο στάδιο οι μαθητές έχουν ακόμη ασαφή εικόνα για τις συνιστώσες μιας δύναμης και την επιτάχυνση που προσδίδουν. Η εν λόγω επίδειξη, λοιπόν, είναι ιδιαίτερα πολύτιμη: εκτός από την έννοια του συστήματος αναφοράς, υπεισέρχεται η έννοια της συνιστώσας μιας δύναμης.)

Αφού οι μαθητές εξετάσουν τις δύο πρώτες περιπτώσεις από την άποψη του παρατηρητή που παραμένει ακίνητος ως προς το έδαφος, μπορούν να προχωρήσουν στη μελέτη της τρίτης περίπτωσης, συμμετέχοντας στην κίνηση του αυτοκινήτου ως επιβάτες του. Πρέπει, ωστόσο, να τους καθοδηγήσουμε να αναγνωρίσουν σαφώς ότι δεν τινάζονται προς τα πίσω· αισθάνονται, απλώς, τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στην πλάτη τους, καθώς αυτό επιταχύνεται· όπως ακριβώς στο αιωρούμενο βαρίδι δεν ασκείται ούτε οριζόντια δύναμη ούτε επιτάχυνση, μέχρις ότου το νήμα, λόγω της απόκλισής του από την κατακόρυφη διεύθυνση, αρχίσει να το ωθεί οριζοντίως.

Η ποιοτική διερεύνηση των προηγούμενων περιπτώσεων όχι μόνο δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εκτελέσουν ποιοτικούς φαινομενολογικούς συλλογισμούς (βοηθώντας τους να αφομοιώσουν την έννοια του συστήματος αναφοράς), αλλά, επίσης, προλειαίνει το έδαφος για την αποτελεσματικότερη κατανόηση της έννοιας της κεντρομόλου δύναμης και της κυκλικής κίνησης. Το ότι μεταξύ των δύο αναλύσεων μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα έχει ζωτική σημασία και οδηγεί στη μάθηση.

Στο παρόν κρίσιμο στάδιο, οι καθηγητές μπορούν (αν το επιθυμούν και αν τους το επιτρέπει το επίπεδο των μαθητών τους) να εισαγάγουν την έννοια της «φανταστικής» δύναμης.

3.21 Τριβή

Αν λάβουμε υπόψη μας όσα αναφέραμε στη δεύτερη παράγραφο του εδαφίου 3.12, η τριβή είναι «παθητική» δύναμη: προσαρμόζεται αποκρινόμενη σε ορισμένη ενεργητική δράση. Στα ρευστά η αντίσταση λόγω τριβών μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η ταχύτητα του κινητού. Στην επιφάνεια επαφής μεταξύ δύο σωμάτων, αρχικά, η δύναμη της τριβής είναι μηδενική· ωστόσο, καθώς η δύναμη που τείνει να προκαλέσει την ολίσθηση αυξάνεται, η δύναμη της τριβής αυξάνεται επίσης, μέχρι η επιφάνεια επαφής να «σπάσει» και να αρχίσει η ολίσθηση. Δεν χρησιμοποιώ τη λέξη «σπάω» με την άμεση σημασία της· τη χρησιμοποιώ για να επισημάνω την αναλογία μεταξύ της συγκεκριμένης κατάστασης και του ότι τα σώματα σπάζουν, όντως, αν φορτωθούν κι αν η κάθετη δύναμη, αυξανόμενη, λάβει μια κρίσιμη τιμή (λόγου χάρι, στην περίπτωση που στοιβάζουμε «βάρη» πάνω σε ένα τραπέζι, μέχρι αυτό να σπάσει). Οι μαθητές, ωστόσο, δεν αντιλαμβάνονται την αναλογία αν δεν την αναπτύξουμε με σαφήνεια· μόνον τότε κατανοούν βαθύτερα τη φύση του φαινομένου.

Αν παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίον αντιμετωπίζουν τα προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος του αντίστοιχου κεφαλαίου των εγχειριδίων, προκύπτει σαφώς ότι, αρχικά, πολλοί μαθητές δεν κατανοούν απολύτως τα σχετικά ζητήματα. Συνήθως, προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο:

$$T = nN \quad (3.21.1)$$

για οποιαδήποτε δύναμη τριβής, ανεξάρτητα από το αν η ολίσθηση πρόκειται να αρχίσει ή όχι. Με άλλα λόγια, δεν αντιλαμβάνονται σαφώς ότι η δύναμη της τριβής είναι δυνατό να λάβει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ του μηδενός και της τιμής που προκύπτει από τον προηγούμενο τύπο. Αυτή η αδυναμία των μαθητών δεν οφείλεται στο ότι τα εγχειρίδια δεν παρουσιάζουν ορθώς τον εν λόγω τύπο: τα περισσότερα τον χρησιμοποιούν ικανοποιητικά. Το πρόβλημα προέρχεται από το ότι, επειδή ο μαθητής δεν έχει οδηγηθεί να αντιμετωπίσει περιπτώσεις όπου η δύναμη της τριβής λαμβάνει τιμές μεταξύ του μηδενός και της μέγιστης (που προκύπτει από τον τύπο), προσκολλάται αποκλειστικά στον τύπο. Όπως συμβαίνει και σε άλλες περιπτώσεις (λόγου χάρι, στις κινηματικές εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης), πρέπει να βοηθήσουμε το μαθητή να αντιληφθεί τότε μια εξίσωση

ισχύει *όντως* και τότε δεν ισχύει, μελετώντας άμεσα περιπτώσεις όπου δεν ισχύει.

Άλλη περίπτωση κατά την οποία η στατική τριβή λαμβάνει τιμές από το μηδέν έως τη μέγιστη είναι εκείνη όπου δύναμη τριβής ασκείται σε ένα επιταχυνόμενο σώμα, λόγου χάρη στην περίπτωση ενός σώματος που βρίσκεται πάνω σε επιταχυνόμενο βαγονάκι. Η δύναμη της τριβής, που ασκείται από το δάπεδο του βαγονιού στο σώμα, αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η επιτάχυνση του βαγονιού. Επειδή δεν υπάρχουν άλλες οριζόντιες δυνάμεις πάνω στο σώμα, η κατάσταση είναι απολύτως διαφορετική από εκείνη κατά την οποία, ενώ το σώμα ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, ασκείται πάνω του μια εξωτερική οριζόντια δύναμη. Οι μαθητές, λοιπόν, αντιμετωπίζουν σοβαρή δυσκολία στο να σχεδιάσουν σωστά τις δυνάμεις. Συχνά συναντούν παρόμοιες περιπτώσεις στα προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος του σχετικού κεφαλαίου. Ωστόσο, οι περισσότεροι δεν αντιλαμβάνονται το φυσικό περιεχόμενο των προβλημάτων: ή ουδέποτε λύνουν σωστά τα προβλήματα ή απομνημονεύουν διαδικασίες επίλυσης «περιφέροντας» την ποσότητα nN , χωρίς να κατανοούν τι κάνουν. Είναι αποτελεσματικότερο να παρουσιάσουμε κατ' αντιπαράσταση τις δύο περιπτώσεις (του σώματος πάνω στο δάπεδο και πάνω στο επιταχυνόμενο βαγόνι), όταν για πρώτη φορά παρουσιάζεται η έννοια του συντελεστή τριβής. Η διεύρυνση του περιεχομένου μιας έννοιας συμβάλλει στη μάθηση και την κατανόηση.

Όπως επισημάναμε στο εδάφιο 3.19, πολλοί μαθητές σχηματίζουν τη λανθασμένη αντίληψη ότι η κάθετη δύναμη N είναι πάντοτε ίση με mg . Η αντίληψη αυτή δημιουργείται επειδή για πρώτη φορά συναντούν την κάθετη δύναμη σε περιπτώσεις όπου ένα σώμα ηρεμεί πάνω στο τραπέζι ή στο δάπεδο, οπότε πάνω του δεν ασκείται άλλη κατακόρυφη δύναμη εκτός από το βάρος του, mg . Θεωρούν, λοιπόν, ότι κάθε δύναμη τριβής ισούται με nmg , ανεξάρτητα από την πραγματική τιμή της κάθετης δύναμης.

Η διερεύνηση της κατάστασης κατά την οποία, όταν πιέζουμε ένα βιβλίο στον τοίχο, η κάθετη δύναμη είναι ανεξάρτητη από το βάρος του βιβλίου (βλ. εδάφιο 3.19), είναι αποτελεσματικός τρόπος εξάλειψης της παρανόησης. Πρέπει, ωστόσο, να διερευνούμε τι συμβαίνει αν μεταβάλλουμε τα δεδομένα του προβλήματος και όχι απλώς να επεξεργαζόμαστε τις αριθμητικές τιμές του:

(1) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο βιβλίο και στον τοίχο. (2) Υποθέτουμε ότι η οριζόντια δύναμη που ασκούμε στο βιβλίο είναι πολύ μεγάλη: Πόσο είναι το μέτρο της τριβής και της κατακόρυφης δύναμης; Πώς σχετίζεται η τριβή με την κάθετη δύναμη σ' αυτές τις συνθήκες; Πώς σχετίζεται με το βάρος του βιβλίου; (3) Αρχίζουμε να μειώνουμε την οριζόντια δύναμη που ασκούμε: Καθώς συνεχίζεται η μείωση, πώς μεταβάλλεται η τριβή και η κάθετη δύναμη; Σε ποιες συνθήκες το βιβλίο αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω κατά μήκος του τοίχου; Μόλις αρχίσει η ολίσθηση,

πώς σχετίζεται η δύναμη της τριβής με την κάθετη δύναμη; Πώς σχετίζεται με το βάρος του βιβλίου;

Συχνά, τα εγχειρίδια και οι καθηγητές αναφέρουν ότι «πάντοτε οι δυνάμεις τριβής αντιτίθενται στην κίνηση», χωρίς να εξετάζουν με κριτικό τρόπο τη χρησιμοποιούμενη φρασεολογία. Οι μαθητές θεωρούν ότι η λέξη «κίνηση» αναφέρεται στην κίνηση του σώματος πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη της τριβής· ωστόσο, με αυτή την έννοια η εν λόγω αντίληψη δεν είναι πάντοτε σωστή. Είναι αληθές ότι πάντοτε οι δυνάμεις τριβής στις επιφάνειες επαφής μεταξύ δύο στερεών σωμάτων αντιτίθενται στην *ολίσθηση των επιφανειών*· σε πολλές περιπτώσεις της καθημερινής εμπειρίας, όμως, η δύναμη της τριβής επιταχύνει το θεωρούμενο σώμα. Λόγου χάρι, η δύναμη της τριβής που ασκείται από το έδαφος στα παπούτσια μας, καθώς βαδίζουμε, μας επιταχύνει· η δύναμη της τριβής που ασκείται από το οδόστρωμα στα λάστιχα επιταχύνει το αυτοκίνητο· η δύναμη τριβής που ασκείται από το δάπεδο του επιταχυνόμενου βαγονιού πάνω στο σώμα (στο παράδειγμα που μελετήσαμε προηγουμένως) επιταχύνει το σώμα.

Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται, καταρχάς, να αντιληφθούν την κατεύθυνση της δύναμης της τριβής πάνω στα δύο σώματα που έρχονται σε επαφή. Νομίζω, λοιπόν, ότι η επόμενη προσέγγιση βοηθά: υποθέστε ότι φέρνετε σε επαφή τις δύο παλάμες σας και φανταστείτε ότι το ένα χέρι είναι το ένα αντικείμενο και το άλλο χέρι το άλλο. Κατόπιν, επικεντρώνοντας κάθε φορά την προσοχή σας μόνο στο ένα χέρι, υποθέστε ότι το τρίβετε πάνω στο άλλο προς την κατεύθυνση που τείνουν να ολισθήσουν τα σώματα. Αισθανόμενοι τη δύναμη πάνω σε κάθε χέρι, σχεδιάστε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο αντίστοιχο σώμα. Ο βαθμός που το συγκεκριμένο τέχνασμα βοηθά τους μαθητές φαίνεται από το πόσοι τρίβουν τα χέρια τους κατά τη διάρκεια ενός τεστ.

3.22 Αδράνεια: δύο ευρέως επιδεικνυόμενα πειράματα

Δύο άριστες επιδείξεις χρησιμοποιούνται ευρέως για την περιγραφή της ιδιότητας που αποκαλούμε —τόσο επιπόλαια— «αδράνεια»:

1) Αν τραβήξουμε απότομα το τραπεζομάντιλο ενός τραπέζιου πάνω στο οποίο βρίσκονται λίγα πιάτα, τα πιάτα παραμένουν στο τραπέζι.

2) Ένα ογκώδες σώμα κρέμεται μέσω ενός νήματος από ένα σταθερό σημείο· από το κάτω μέρος του σώματος κρέμεται ένα δεύτερο νήμα. Αν τραβήξουμε αργά προς τα κάτω το δεύτερο νήμα, τότε το πρώτο νήμα σπάει· αν το τραβήξουμε απότομα, τότε σπάει το δεύτερο νήμα.

Οι δύο επιδείξεις είναι πλούσιες σε φυσικά φαινόμενα: υπεισέρχονται

περισσότερα στοιχεία εκτός από την «αδράνεια». Πρέπει, λοιπόν, να καθοδηγήσουμε τους μαθητές να τις μελετήσουν προσεκτικά για να κατανοήσουν τα στοιχεία που υπεισέρχονται. Ο καλύτερος τρόπος για να προκαλέσουμε τον απαραίτητο προβληματισμό, είναι ο εξής: αφού εκτελέσουμε τις επιδείξεις, θέτουμε αρκετές καθοδηγητικές ερωτήσεις (με τη μορφή εργασίας για το σπίτι), ώστε οι περισσότεροι μαθητές να καλύψουν τα κενά τους, χωρίς να «βαλτώσουν».

Στην πρώτη επίδειξη, αν τα πιάτα είναι κολλημένα στο τραπεζομάντιλο, παρασύρονται μαζί μ' αυτό. Η επίδειξη, λοιπόν, εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή τριβής. Επειδή ο συντελεστής είναι μικρός, η μέγιστη τιμή της τριβής είναι μικρή. Αποτέλεσμα: όταν η τριβή αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της [οπότε η επιφάνεια διαχωρισμού σπάει (με την έννοια του εδαφίου 3.21)], τα πιάτα αποκτούν σχετικώς μικρή επιτάχυνση.

Ωστόσο, ακόμα και με μικρή δύναμη τριβής, τα πιάτα είναι δυνατό να παρασυρθούν, αν το τραπεζομάντιλο είναι πολύ μακριά και κρέμεται γύρω από το τραπέζι, πολύ πιο πίσω από τα πιάτα. Με άλλα λόγια, μεσολαβεί ορισμένο χρονικό διάστημα μέχρι να περάσει το τραπεζομάντιλο κάτω από τα πιάτα. Η επίδειξη, λοιπόν, είναι πραγματοποιήσιμη, επειδή το χρονικό διάστημα κατά το οποίο επιταχύνονται τα πιάτα είναι σύντομο, οπότε και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι αμελητέα.

Οι παράγοντες που υπεισέρχονται είναι εξίσου σημαντικοί με την αδράνεια. Σπάνια οι θεατές της επίδειξης έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν την κατάσταση και να την κατανοήσουν απολύτως. Μέρος της κατανόησης εξαρτάται από τη μελέτη του τι θα *έπρεπε* να συμβαίνει και του τι *δεν* συμβαίνει, ταυτόχρονα με τη μελέτη του ποια είναι *όντως* η κατάσταση και του τι συμβαίνει *πραγματικά*.

Στη δεύτερη επίδειξη, το κρίσιμο φυσικό ζήτημα είναι η *επιμήκυνση* του νήματος έως το όριο θραύσης. Επειδή δεν αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας την επιμήκυνση, πρέπει να καταφύγουμε στη φαντασία μας. Σ' αυτήν την περίπτωση, λίγοι μαθητές θέτουν αυθόρμητα σε λειτουργία τη φαντασία τους: ωστόσο, δεν είναι δύσκολο να τους καθοδηγήσουμε. Το κλειδί της κατανόησης είναι και πάλι ο χρόνος (όπως στην πρώτη επίδειξη, αλλά από λίγο διαφορετική άποψη): όταν τραβάμε απότομα το κάτω νήμα, επειδή το σώμα αποκτά μικρή επιτάχυνση, το νήμα επιμηκύνεται έως το όριο θραύσης, πριν η μετατόπιση του σώματος προκαλέσει παρόμοια επιμήκυνση στο πάνω νήμα: όταν τραβάμε αργά το κάτω νήμα, επειδή και τα δύο νήματα επιμηκύνονται σχεδόν ταυτόχρονα, το πάνω νήμα φτάνει πρώτο στο όριο θραύσης, επειδή είναι περισσότερο φορτωμένο. [Σε υψηλότερο επίπεδο ανάλυσης, πρέπει να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι ελαστικά κύματα διαδίδονται πάνω και κάτω κατά μήκος των τμημάτων του συστήματος: τα κύματα προηγούνται της μετατόπισης που οδηγεί στη θραύση. Βλ. την πρώτη περίπτωση του εδαφίου 3.12 και τη σχετική υποση-

μείωση.]

Αν οι μαθητές δεν αντιληφθούν ότι τα νήματα επιμηκύνονται, δεν κατανοούν την επίδειξη: απομνημονεύουν απλώς και επαναλαμβάνουν αόριστα ότι η επίδειξη σχετίζεται με την «αδράνεια».

3.23 Διαφορετικά είδη «ισότητας»

Κρυφή πηγή σύγχυσης για πολλούς μαθητές, που σπάνια εντοπίζεται και εξαλείφεται κατά τη διάρκεια του μαθήματος, είναι το σύμβολο της ισότητας (=): έχει διαφορετική σημασία σε διαφορετικό πλαίσιο. Ιδού ορισμέ-

να παραδείγματα: Εκφράσεις όπως $\rho = M/V$ και $v = \Delta s / \Delta t$ στην πραγματικότητα είναι ορισμοί (ταυτότητες) και όχι κανονικές ισότητες. Πρέπει, λοιπόν, να χρησιμοποιούμε το σύμβολο με τις τρεις γραμμές ($\equiv$) και όχι το συνηθισμένο σύμβολο της ισότητας όταν αναφερόμαστε στις εκφράσεις: «ορίζεται ως» ή «είναι ταυτόσημο με». (Ήδη, ορισμένα εγχειρίδια ακολουθούν αυτόν τον κανόνα· πρέπει, όμως, να συζητάμε το λόγο με τους μαθητές.)

Οι κινηματικές εξισώσεις, ωστόσο, είναι ισότητες μεταξύ συναρτήσεων (που ισχύουν μόνον όταν η κίνηση είναι ευθύγραμμη και η επιτάχυνση σταθερή) και προκύπτουν από τον ορισμό του s , του t , του v και του a . Οι μαθητές έχουν συναντήσει εξισώσεις αυτής της μορφής στο μάθημα της στοιχειώδους άλγεβρας. Έτσι, το συνηθισμένο σύμβολο (=) της ισότητας είναι κατάλληλο.

Στην εξίσωση $F_{ολ} = m\gamma$, το σύμβολο της ισότητας δεν περιγράφει μια συνηθισμένη ισότητα μεταξύ συναρτήσεων. Αποκρύπτει το συνδυασμό ενός αυθαίρετου ορισμού και ορισμένων νόμων της Φύσης που περιγράφονται με τον τρόπο που ο Mach ή ο Νεύτων προσεγγίζουν τον 2ο Νόμο (βλ. εδάφια 3.2.-3.6).

Οι εκφράσεις $T_{max} = nN$ και $F = kx$ (νόμος του Hooke) έχουν περιορισμένη ισχύ και εφαρμοσιμότητα. Στις περιπτώσεις αυτές, το σύμβολο της ισότητας ισχύει με ορισμένους περιορισμούς. Πρέπει, λοιπόν, να συνοδεύεται από την αναφορά των αντίστοιχων περιορισμών.

Τα θεωρήματα ώθησης-ορμής και έργου-κινητικής ενέργειας προκύπτουν από τη σχέση $F_{ολ} = m\gamma$. Περιγράφουν μιαν αξιοσημείωτη και απροσδόκητη ισότητα μεταξύ αριθμητικών τιμών που υπολογίζονται με απολύτως διαφορετικό τρόπο μεταξύ τους: στο ένα μέλος της ισότητας υπεισέρχεται η «ιστορική» εξέλιξη της $F_{ολ}$ ως προς τις ενδείξεις του χρονομέτρου ή ως προς τη θέση του κινητού στο χρονικό διάστημα που μελετάμε, καθώς και ο υπολογισμός του εμβαδού της επιφάνειας που περικλείει η αντίστοιχη καμπύλη· στο άλλο μέλος υπεισέρχεται απλώς η αρχική και η τελική ταχύτητα του σώματος στο δεδομένο χρονικό ή χωρικό διάστημα. Οι αντίστοιχες εξισώσεις, λοιπόν, δεν είναι απλώς σχέσεις μεταξύ συναρτήσεων: έχουν φυσι-

κό περιεχόμενο που δεν εκφράζεται απολύτως με το σύμβολο της ισότητας⁸.

Συνηθισμένη χρήση του συμβόλου της ισότητας, που προκαλεί παρόμοια σύγχυση, εμφανίζεται στις εκφράσεις: $2\text{ m} = 6,56\text{ ft}$ ή $1\text{ kg} = 1.000\text{ g}$ ή ακόμα χειρότερα $1\text{ kg} = 2,20\text{ lb}$ κτλ.

Δεν πρόκειται, βεβαίως, καθόλου για ισότητες: είναι *ισοδυναμίες* και πρέπει απαραιτήτως να συνοδεύονται από ερμηνευτικό κείμενο. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι οι αριθμοί που εμφανίζονται στις εκφράσεις δεν είναι ίσοι μεταξύ τους· διστάζουν, ωστόσο, να ρωτήσουν για τη συγκεκριμένη ασυνέπεια αισθανόμενοι ότι, πιθανώς, η ερώτησή τους θα θεωρηθεί «ανόητη». Δυσκολεύει τους μαθητές και τους προκαλεί σύγχυση το ότι η έκφραση $6K = \Phi$, όπου K και Φ είναι *μεταβλητές*, είναι απολύτως διαφορετική από την έκφραση $2\text{ m} = 6,56\text{ ft}$, όπου το m και το ft δεν είναι μεταβλητές. Έχοντας αφομοιώσει το νόημα εκφράσεων, όπως λόγου χάρη $6K = \Phi$, παρασύρονται εύκολα να θεωρήσουν ότι η άλλη έκφραση υποδηλώνει ότι 2 φορές ο αριθμός των μέτρων ισούται με 6, 56 φορές τον αριθμό των ποδιών. (Στο εδάφιο 1.15 υπάρχουν περισσότερες λεπτομέρειες γι' αυτό το θέμα.) Στην περίπτωση αυτή, ένα σύμβολο ισοδυναμίας, σαφώς διαφορετικό από το σύμβολο της ισότητας, είναι καταλληλότερο.

Επειδή το ίδιο σύμβολο (=) χρησιμοποιείται με ποικίλους τρόπους, οι μαθητές δεν παρακινούνται να διακρίνουν τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ του νοήματος των ισοτήτων, εκτός κι αν μελετήσουν προσεκτικά κάθε ισότητα. Αν οι μαθητές δεν εκτελέσουν αυτή τη μελέτη, σχηματίζουν την εντύπωση ότι, λόγου χάρη, «επειδή $F = mg$, η ποσότητα mg εκφράζει δύναμη». Αποτέλεσμα: στο διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ένα αυτοκίνητο που επιταχύνεται ή σε έναν άνθρωπο που κάζεται μέσα στο αυτοκίνητο, οι μαθητές σχεδιάζουν τη δύναμη mg . Άλλη συνέπεια είναι η σύγχυση στη μετάφραση των λέξεων σε σύμβολα (βλ. εδάφιο 1.15).

Βεβαίως, οι διαφορές στο νόημα του συμβόλου της ισότητας δεν περιορίζονται στη φυσική: διαποτίζουν, επίσης, την αριθμητική και γενικότερα τα μαθηματικά. Αν γίνουν οι απαραίτητες αποσαφηνίσεις σ' αυτές τις δύο περιοχές, οι μαθητές βοηθούνται να κατανοήσουν τα σχετικά ζητήματα πολύ γρηγορότερα.

8. Από πιο προχωρημένη άποψη τα συγκεκριμένα θεωρήματα χρησιμεύουν ως παράδειγμα της διάκρισης μεταξύ ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος (μη ακριβές διαφορικό) και μιας συνάρτησης της κατάστασης (ακριβές διαφορικό). Προετοιμάζουν, λοιπόν, το έδαφος για πιο εκλεπτυσμένη χρήση αυτής της ιδέας, λόγου χάρη στη θερμοδυναμική. Δεν είναι σωστό να ταλαιπωρήσουμε με τα σχετικά μαθηματικά ζητήματα τους μαθητές οι οποίοι δεν είναι έτοιμοι να το υποστούν και δεν πρόκειται να παρακολουθήσουν πιο προχωρημένα μαθήματα φυσικής. Ωστόσο, με την προοπτική ενός προχωρημένου μαθήματος, είναι χρήσιμο να επανέλθουμε στα συγκεκριμένα ζητήματα: αν η θεμελίωση αρχίσει με στοιχειώδη τρόπο στο πλαίσιο ενός εισαγωγικού μαθήματος, η κατανόηση πιο προχωρημένων ιδεών ενισχύεται.

3.24 Επιλύοντας προβλήματα

Στο εδάφιο 2.13 εξετάσαμε τη σημασία του να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν τη συνήθεια να προσεγγίζουν *συστηματικά* τη λύση των προβλημάτων που υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Αν, λοιπόν, καλλιεργήσουμε αυτήν τη συνήθεια στην κινηματική, δημιουργούμε σοβαρές προϋποθέσεις για να προχωρήσουν οι μαθητές στην περιοχή της δυναμικής που είναι πιο δύσβατη. Σε πολλά εγχειρίδια υπάρχουν ειδικά παραδείγματα συστηματικής προσέγγισης: πολλοί μαθητές, ωστόσο, αρνούνται να χρησιμοποιήσουν τις οδηγίες, εκτός κι αν βαθμολογούνται απ' αυτό.

Οι οδηγίες βοηθούν τους μαθητές να εφαρμόσουν τη θεωρία που περιγράφεται στο κείμενο. Λόγου χάρη, ασκήσεις αυτού του είδους υπάρχουν στο πρόγραμμα «Plato», που βασίζεται στη χρήση υπολογιστή (βλ. Plato Physics I (1983)): οι μαθητές οδηγούνται να σχεδιάσουν διαγράμματα δυνάμεων, να κατασκευάσουν ένα σύστημα συντεταγμένων, να εφαρμόσουν τον 2ο Νόμο και να λύσουν το πρόβλημα. Η συστηματική προσέγγιση όχι μόνο διευκολύνει τη λύση του προβλήματος, αλλά βοηθά και να καμφθεί η αντίσταση των μαθητών στο να «θέσουν το μολύβι τους πάνω στο χαρτί» και να αναλύσουν το πρόβλημα, πριν αντιληφθούν πλήρως τη λύση του.

Σε πολλά εγχειρίδια και προγράμματα, κατά τη συστηματική επίλυση των προβλημάτων παραλείπεται η σαφής καταγραφή της εξίσωσης της συνέχειας της επιτάχυνσης, όταν το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο ή περισσότερα σώματα που συνδέονται μεταξύ τους. Λόγου χάρη, στην περίπτωση της μηχανής του Atwood, με το σύμβολο γ αναφερόμαστε επιτόλαια και στα δύο σώματα, χωρίς να αναγνωρίζουμε ρητά ότι η ισότητα μεταξύ των επιταχύνσεων των δύο σωμάτων είναι ουσιώδης μαθηματική συνθήκη, που προσδιορίζεται από το φυσικό σύστημα (δηλαδή από το ότι το νήμα δεν επιμηκύνεται).

Η παράλειψη δυσκολεύει σοβαρά τους μαθητές, όταν αντιμετωπίζουν πολυπλοκότερα προβλήματα (λόγου χάρη, όταν μια μηχανή Atwood κρέμεται από μια άλλη) στα οποία η εξίσωση που συνδέει τις επιταχύνσεις μεταξύ τους είναι ουσιώδες τμήμα της λύσης. Επίσης, εξαιτίας της παράλειψης της ισότητας των επιταχύνσεων, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι, λόγου χάρη, στη μηχανή του Atwood, όταν το νήμα επιμηκύνεται, οι δύο επιταχύνσεις δεν είναι ίσες μεταξύ τους. Δεν γνωρίζουν, ακόμη, ότι τα αποτελέσματα δεν ισχύουν για το σύντομο αλλά μη μηδενικό χρονικό διάστημα κατά το οποίο τα κύματα «ορμούν» προς τα μπρος και προς τα πίσω κατά μήκος του νήματος, μόλις απελευθερώσουμε το σύστημα. Οι μαθητές, γράφοντας με σαφήνεια και μεγαλύτερη προσοχή τη συνθήκη της επιτάχυνσης, προετοιμάζονται να συνεχίσουν σε πιο προχωρημένη φυσική. Στο πλαίσιο πιο εκλεπτυσμένης θεωρητικής ανάλυσης, πρέπει να γράφουν επίσης πολύ προσεκτικά την εξίσωση της συνέχειας.

Πολλά εγχειρίδια παραλείπουν να συμπεριλάβουν ορισμένα πολύτιμα χαρακτηριστικά της επίλυσης ενός προβλήματος. Οι καθηγητές μπορούν, ωστόσο, να τα συμπληρώσουν:

1. Ορισμένες φορές τα προβλήματα περιέχουν πληροφορίες άσχετες με τη λύση. Στοιχείο, λοιπόν, της κατανόησης της φυσικής κατάστασης και της επίλυσης του προβλήματος είναι το να διακρίνουμε τι είναι σχετικό και τι άσχετο. Χρειάζεται, ωστόσο, εξάσκηση: η αντίστοιχη ικανότητα δεν προκύπτει αυθόρμητα. Σπάνια, όμως, οι μαθητές ασκούνται σ' αυτό. Οι περισσότεροι εισάγουν την άσχετη πληροφορία στη λύση του προβλήματος, για να είναι ασφαλείς ότι «χρησιμοποίησαν όλα τα δεδομένα». Αν, ωστόσο, τους κατευθύνουμε να αναγνωρίσουν τα άσχετα δεδομένα, διαμαρτύρονται ότι τα εν λόγω προβλήματα είναι «δύσκολα» και ότι δεν είναι «τίμιο» να υπάρχουν άσχετα δεδομένα. Δεν αντιλαμβάνονται ότι στα προβλήματα που συνδέονται με πραγματικές καταστάσεις, πρέπει να «λιχνίσουν» μόνοι τους τα άσχετα δεδομένα από τα σχετικά. Το ζήτημα και ο σκοπός παρεμβολής άσχετων δεδομένων στα προβλήματα πρέπει να συζητηθούν αναλυτικά. Οι μαθητές είναι απόλυτα έτοιμοι να δεχτούν αυτήν την άσκηση από τη στιγμή που θα κατανοήσουν ότι αφορά την ανάπτυξη της αντίληψής τους.

2. Όπου είναι απαραίτητο, πρέπει να διατυπώνουμε την *πλήρη* αλγεβρική λύση και να προσδιορίζουμε το άγνωστο μέγεθος πριν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα. Αρχικά, πολλοί μαθητές δεν κατανοούν τι σημαίνει «πλήρης αλγεβρική λύση», ακόμα κι αν τους έχει επιδειχθεί στην παράδοση ή στο εγχειρίδιο. Αν τους ζητήσουμε να διατυπώσουν μια τέτοια λύση, πιστεύουν ότι η αλγεβρική σχέση από την οποία αρχίζουν ικανοποιεί την απαίτησή μας. Αντιστέκονται σθεναρά στο να συνδυάσουν τις αλγεβρικές εξισώσεις και να τις λύσουν ως προς τα άγνωστα μεγέθη πριν αντικαταστήσουν τις αριθμητικές τιμές. Η αντίσταση μειώνεται αν ενθαρρύνουμε την εξάσκηση κι αν απαγορεύουμε, τουλάχιστον σε ορισμένες περιπτώσεις, την αντικατάσταση των αλγεβρικών τιμών στα ενδιάμεσα στάδια της λύσης.

3. Η περιφραστική ερμηνεία της λύσης, τόσο των αριθμητικών όσο και των αλγεβρικών προβλημάτων, είναι μια δεξιότητα που αναπτύσσεται επίσης με την εξάσκηση. Ωστόσο, καλλιεργείται ανεπαρκώς στα εγχειρίδια. Για να αποκτήσουν οι μαθητές αυτήν την ικανότητα, ο καθηγητής πρέπει να την εκμαιεύσει τόσο από τα τεστ όσο και από την εργασία για το σπίτι με κανέναν άλλον τρόπο δεν ενισχύεται. Επειδή απαιτείται σύνθετος τρόπος σκέψης, ελάχιστοι μαθητές τον ακολουθούν αυθόρμητα. Αισθάνονται, λοιπόν, ικανοποίηση όταν

προοδεύουν μέσω της εξάσκησης· ανάλογη ικανοποίηση αισθάνεται και ο καθηγητής τους.

Σε αρχικό στάδιο και χωρίς την απαραίτητη εξάσκηση, ένα σωστό αλγεβρικό ή αριθμητικό αποτέλεσμα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει το αντίστοιχο θέμα. Αν τους ζητήσουμε να ερμηνεύσουν τη λύση που βρήκαν και ελέγξουμε τις ερμηνείες τους, ανακαλύπτουμε σοβαρά λάθη, παρανοήσεις, κενά στην κατανόηση και αδυναμία να αντιληφθούν ορισμένες πλευρές του περιοχόμενου και του νοήματος της λύσης.

Η ερμηνεία του αριθμητικού αποτελέσματος πρέπει να περιλαμβάνει και τον έλεγχο (με κατάλληλα επιχειρήματα) της τάξης της αριθμητικής τιμής του μεγέθους. Πρέπει, επίσης, να περιλαμβάνει και τον έλεγχο της συμπεριφοράς της λύσης σε ακραίες, οριακές ή ασυμπτωτικές καταστάσεις. Έτσι, ελέγχουμε την ορθότητα της λύσης.

Η επίλυση των προβλημάτων, ως στοιχείο της ανάπτυξης της αντίληψης του μαθητή και του τρόπου εκτέλεσης λογικών πράξεων, αποτελεί αντικείμενο εντατικής έρευνας σε πολλά πεδία και σε διάφορα μέτωπα. Υπάρχει μεγάλη βιβλιογραφία που αναπτύσσεται γρήγορα. Στο παρόν βιβλίο, επειδή επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο σχηματισμό των θεμελιωδών εννοιών οι οποίες *προηγούνται* των εφαρμογών που εμφανίζονται στα προβλήματα, δεν προσπαθούμε να αναλύσουμε όλα τα ζητήματα που αφορούν την εν λόγω περιοχή. Ωστόσο, ο ενδιαφερόμενος μπορεί να εισχωρήσει στη βιβλιογραφία που αναφέρεται στον τρόπο επίλυσης προβλημάτων φυσικής, και να συμβουλευτεί τις σχετικές εργασίες, λόγου χάρη του Lapp (1940), του Larkin (1981) και (1983) και του Reif κ.ά. (1981), (1976), (1982) και (1984).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3Α

Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ

1. α) Υποθέστε ότι κάθεστε σε μια καρέκλα που βρίσκεται ακίνητη πάνω στο έδαφος. Σχεδιάστε σε ξεχωριστά διαγράμματα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σας, στην καρέκλα και σε ολόκληρη τη Γη. Περιγράψτε με λόγια κάθε δύναμη [προσδιορίστε το είδος της δύναμης (βαρυτική, επαφής, τριβής) και ποιο σώμα ασκεί τη συγκεκριμένη δύναμη σε ποιο]. Αναδείξτε το σχετικό μέγεθος των δυνάμεων, χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο διάνυσμα για τις ισχυρότερες δυνάμεις και ισομήκη διανύσματα για ίσες δυνάμεις. Προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου.

β) Υποθέστε ότι στέκεστε στο έδαφος κάτω από ένα υπόστεγο. Ένα σώμα κρέμεται μέσω ενός σχοινιού από το υπόστεγο. Από το σώμα κρέμεται ένα δεύτερο σχοινί. Τραβάτε το δεύτερο σχοινί κατακόρυφα προς τα κάτω. Σχεδιάστε σε ξεχωριστά διαγράμματα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σας, στο νήμα, στο σώμα, στο σχοινί, στο υπόστεγο και σε ολόκληρη τη Γη. Κατόπιν, εκτελέστε ό,τι ζητείται στην προηγούμενη περίπτωση. Τέλος, επαναλάβετε την άσκηση για την περίπτωση που τραβάτε το νήμα υπό γωνία σχεδόν 45° ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση.

2. α) Υποθέστε ότι είστε έτοιμος να πηδήσετε κατακόρυφα προς τα πάνω: λυγίζοντας τα πόδια σας, σπρώχνετε το πάτωμα και το σώμα σας επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Σχεδιάστε σε ξεχωριστό διάγραμμα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σας και στη Γη. Αναδείξτε το σχετικό μέγεθος των δυνάμεων· περιγράψτε με λόγια κάθε δύναμη· προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου.

β) Σχεδιάστε τις δυνάμεις τη στιγμή που το σώμα σας έχει πάψει να βρίσκεται σε επαφή με το πάτωμα, καθώς πηδάτε προς τα πάνω· κατόπιν, εκτελέστε ό,τι ζητείται στην προηγούμενη περίπτωση.

γ) Επαναλάβετε τα ερωτήματα της προηγούμενης περίπτωσης στο υψηλότερο σημείο του άλματος, σε κάποιο σημείο κατά την κάθοδό σας και στην περίπτωση που μόλις χτυπάτε το πάτωμα και τα λυγισμένα πόδια σας επιβραδύνουν το σώμα σας.

3. Υποθέστε ότι πετάτε κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα και την

πιάνετε μόλις επιστρέψει. Σχεδιάστε τις δυνάμεις για το σώμα σας, για την μπάλα και για τη Γη στις επόμενες περιπτώσεις: α) ενώ επιταχύνετε την μπάλα προς τα πάνω· β) καθώς η μπάλα ανέρχεται, αφού εγκαταλείψει το χέρι σας· γ) καθώς η μπάλα πέφτει· δ) τη στιγμή που την πιάνετε. Περιγράψτε με λόγια τις δυνάμεις· αναδείξτε το σχετικό μέγεθός τους· προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου.

4. α) Υποθέστε ότι αρχίζετε να περπατάτε ή να τρέχετε. Και στις δύο περιπτώσεις αρχίζετε με μηδενική αρχική ταχύτητα και επιταχύνετε σε οριζόντια κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια της επιτάχυνσης, ασκείται πάνω σας οριζόντια δύναμη, που δεν εξουδετερώνεται από άλλη. Αναλύστε τι αισθάνεστε, όταν εκτελείτε ακριβώς τις απαραίτητες ενέργειες. «Αισθανθείτε» τη διεύθυνση της οριζόντιας δύναμης που ασκείται πάνω σας. Προσποιηθείτε ότι εσείς είστε το έδαφος και φανταστείτε τη διεύθυνση της δύναμης που θα αισθανόσαστε. Τέλος, σχεδιάστε σε ξεχωριστά διαγράμματα τις δυνάμεις που ασκούνται σε σας και στη Γη. Περιγράψτε με λόγια κάθε δύναμη και προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου.

β) Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ των διαγραμμάτων των δυνάμεων της προηγούμενης περίπτωσης και των διαγραμμάτων που αντιστοιχούν στην περίπτωση κατά την οποία παραμένετε ακίνητος; Σε κατάλληλο διάγραμμα αναδείξτε τη δύναμη που προσδίδει επιτάχυνση στο σώμα σας. Σ' αυτήν την περίπτωση, ποιος είναι ο ρόλος της τριβής; Θα μπορούσατε να περπατήσετε ή να τρέξετε αν απουσίαζε η δύναμη της τριβής μεταξύ της σόλας των παπουτσιών σας και του εδάφους; Γιατί; Γιατί όχι; Μελετήστε, μέσω του διαγράμματος των δυνάμεων, τι συμβαίνει όταν προσπαθείτε να περπατήσετε πάνω σε πάγο.

γ) Μελετήστε τον επόμενο ισχυρισμό (είναι σωστός και ακριβής ή λανθασμένος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Αν πιστεύετε ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος, τροποποιήστε τον, ώστε να διορθωθεί): «Όταν περπατάμε ή τρέχουμε προς τα μπροστά, σπρώχνουμε το έδαφος με μια οριζόντια δύναμη τριβής προς τα πίσω. Το έδαφος με τη σειρά του μας σπρώχνει με μια οριζόντια δύναμη τριβής προς τα εμπρός. Μας επιταχύνει η δύναμη που ασκεί το έδαφος πάνω μας και όχι η δύναμη που ασκούμε εμείς».

5. Ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης άσκησης, αναλύστε τις δυνάμεις που δρουν όταν ένα αυτοκίνητο επιταχύνεται κατά μήκος του δρόμου. (Αν έχετε ένα κουρδιστό ή ηλεκτρικό παιδικό αυτοκινητάκι, τοποθετήστε το στην παλάμη σας και αισθανθείτε την κατεύθυνση της δύναμης που ασκούν οι ρόδες του πάνω σας, καθώς το αυτοκινητάκι, ενώ αρχικά είναι ακίνητο, επιταχύνεται πάνω στην παλάμη σας.) Περιγράψτε με ακρίβεια τη δύναμη που επιταχύνει το αυτοκίνητο: από πού προέρχεται η συγκεκριμένη δύναμη και ποιο σώμα την ασκεί σε ποιο; Είναι σωστό να πούμε

ότι «το αυτοκίνητο επιταχύνεται από τη δύναμη που ασκεί η μηχανή πάνω του»; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6. Μια αμαξοστοιχία εκτελεί ευθύγραμμη *ομαλή* κίνηση πάνω στις γραμμές. Ο παρατηρητής A εκτελεί πειράματα μέσα σ' αυτήν. Ο παρατηρητής B βρίσκεται έξω, ακίνητος ως προς τις γραμμές. Ο B παρατηρεί τα πειράματα, καθώς ο A περνά από μπροστά του. Κατά την εκτέλεση των επόμενων πειραμάτων, περιγράψτε τι βλέπει κάθε παρατηρητής να συμβαίνει ως προς το δικό του σύστημα αναφοράς (δηλαδή, πώς ο A βλέπει να συμπεριφέρονται τα αντικείμενα ως προς το εσωτερικό της αμαξοστοιχίας; Πώς ο B βλέπει να συμπεριφέρονται ως προς το έδαφος;). Στο πλαίσιο της περιγραφής σας, σχεδιάστε την τροχιά του κινούμενου αντικειμένου, όπως την αντιλαμβάνεται κάθε παρατηρητής.

α) Ο παρατηρητής A τοποθετεί μια μπάλα στο απολύτως οριζόντιο δάπεδο του βαγονιού. (Η μπάλα θα παραμείνει στο ίδιο σημείο, οπουδήποτε κι αν την τοποθετήσει;)

β) Ο παρατηρητής A θέτει σε κίνηση την μπάλα πάνω στο δάπεδο σε ευθεία γραμμή και με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτόν: (i) με κατεύθυνση προς το μπροστινό μέρος του βαγονιού, (ii) προς το πίσω μέρος, (iii) εγκάρσια ως προς το βαγόνι.

γ) Ο παρατηρητής A αφήνει την μπάλα να πέσει από το χέρι του από ύψος μερικών δεκάδων εκατοστών πάνω από το δάπεδο του βαγονιού.

δ) Ο παρατηρητής A πετά την μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω και την πιάνει καθώς επιστρέφει.

ε) Ο παρατηρητής A κρεμά με ένα νήμα κάποιο βαρίδι από την οροφή του βαγονιού. Πώς αιωρείται το εκκρεμές;

στ) Ο παρατηρητής A ρίχνει την μπάλα με οριζόντια αρχική ταχύτητα προς το μπροστινό μέρος του βαγονιού.

ζ) Ο παρατηρητής A ρίχνει την μπάλα με οριζόντια αρχική ταχύτητα προς το πίσω μέρος του βαγονιού. (Στο πλαίσιο αυτού του ερωτήματος, θεωρήστε την ειδική σημαντική περίπτωση κατά την οποία το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας ισούται με την οριζόντια ταχύτητα της αμαξοστοιχίας ως προς το έδαφος.)

η) Ο παρατηρητής A έχει τοποθετήσει πάνω στο πάτωμα του βαγονιού ένα ενυδρείο. (Η επιφάνεια του νερού είναι οριζόντια ή κεκλιμένη;)

7. Μελετήστε πάλι τις περιπτώσεις της προηγούμενης άσκησης, θεωρώντας αυτήν τη φορά ότι το βαγόνι έχει σταθερή *επιτάχυνση* προς τα εμπρός. Περιγράψτε με κατάλληλα διαγράμματα τι παρατηρεί κάθε παρατηρητής ως προς το δικό του σύστημα αναφοράς. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της αίσθησης του A και της αίσθησης του B ;

8. Υποθέστε ότι κάθεστε πάνω σε μια πλατφόρμα η οποία είναι δυνατό να κινείται σχεδόν χωρίς τριβές, λόγου χάρη πάνω σε ένα βαγόνι που κινείται σε στρώμα αέρα ή πάνω σε μια βάρκα που επιπλέει στο νερό. Αρχικά, είστε ακίνητοι και δεν έχετε κουπιά ή άλλον τρόπο για να κινηθείτε οριζόντια· θέλετε, ωστόσο, να επιταχυνθείτε μαζί με την πλατφόρμα, μέχρι να αποκτήσετε συγκεκριμένη ταχύτητα προς ορισμένη κατεύθυνση. Διαθέτετε ένα καλάθι με μπάλες ή πέτρες.

α) Τι πρέπει να κάνετε για να επιταχυνθείτε προς την κατεύθυνση που θέλετε; Αναλύστε ακριβώς την κατάσταση, σχεδιάζοντας ξεχωριστά διαγράμματα των δυνάμεων που ασκούνται στην μπάλα, σε σας και στην πλατφόρμα. Στο πλαίσιο των Νόμων του Νεύτωνα, εξηγήστε τι πρέπει να συμβεί, για να μπορέσετε να κινηθείτε.

β) Στο πλαίσιο της προηγούμενης διερεύνησης, αναλύστε με τη βοήθεια κατάλληλων διαγραμμάτων δυνάμεων τι συμβαίνει: (i) όταν κωπηλατείτε, και (ii) όταν η έλικα επιταχύνει ένα πλοίο ή ένα αεροπλάνο. Γιατί η έλικα είναι απαραίτητο να συνεχίζει να λειτουργεί, ακόμα κι όταν το πλοίο ή το αεροσκάφος, αφού επιταχυνθούν, αποκτήσουν την επιθυμητή ταχύτητα; Γιατί η έλικα είναι άχρηστη στα διαστημόπλοια;

γ) Στο πλαίσιο της προηγούμενης ανάλυσης, περιγράψτε τι συμβαίνει κατά την προώθηση των διαστημοπλοίων με πυραύλους. Τι συμβαίνει στο καύσιμο που καίγεται στον κινητήρα του πυραύλου; Σχεδιάστε, σε ξεχωριστά διαγράμματα, τις δυνάμεις που ασκούνται στο διαστημόπλοιο και σε ένα «πακέτο» καυσαερίων που αποβάλλονται από το διαστημόπλοιο. Τι πρέπει να συμβεί για να επιβραδυνθεί το διαστημόπλοιο; Τι σημαίνει ο τεχνικός όρος «πύραυλος ανάσχεσης»;

9. Ονομάσαμε «βάρος» τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη πάνω σε όλα τα αντικείμενα, συμπεριλαμβανομένου του σώματός μας. Πρέπει, ωστόσο, να επισημάνουμε ότι δεν αισθανόμαστε ούτε νιώθουμε άμεσα τη δύναμη της βαρύτητας, δηλαδή την έλξη της Γης πάνω σε μας. Όταν στεκόμαστε στο έδαφος ή καθόμαστε στην καρέκλα, δεν αισθανόμαστε την έλξη της Γης· αισθανόμαστε τη δύναμη που το έδαφος ή η καρέκλα ασκεί σε μας προς τα πάνω. Όταν πηδάμε από κάποιο ύψος και πέφτουμε ελεύθερα, αισθανόμαστε (αν εξαιρέσουμε το ρεύμα του αέρα) ότι *απουσιάζει* η δύναμη που κατευθύνεται προς τα πάνω (με την οποία είμαστε τόσο εξοικειωμένοι)· δεν αισθανόμαστε, επίσης, κάποια ώθηση προς τα κάτω.

α) Επιβεβαιώστε τους προηγούμενους ισχυρισμούς, διερευνώντας άμεσα τη δική σας αίσθηση στις επόμενες περιπτώσεις: όταν στέκεστε, όταν κάθεστε, όταν πηδάτε κατακόρυφα προς τα πάνω ή όταν πηδάτε από μια καρέκλα. (Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο δεν βρίσκεστε σε επαφή με κάποιο στήριγμα είναι πολύ σύντομο, ωστόσο, μπορείτε να ελέγξετε το ότι δεν αισθάνεστε κάτι να σας ωθεί.)

β) Κατόπιν, υποθέστε ότι στέκεστε πάνω σε μια ζυγαριά μπάνιου μέσα σε ένα ακίνητο ασανσέρ. Σχεδιάστε το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σας, στη ζυγαριά και στο τμήμα του πατώματος του ασανσέρ που αλληλεπιδρά με τη ζυγαριά. Συγκρίνετε το μέγεθος της δύναμης που ασκεί η ζυγαριά πάνω σας με το βάρος σας. Πώς ερμηνεύετε την ένδειξη της ζυγαριάς; (Δικαιολογήστε με δικά σας λόγια την απάντησή σας.)

γ) Υποθέστε ότι το ασανσέρ δεν είναι ακίνητο, αλλά κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Σχεδιάστε τα διαγράμματα που ζητήθηκαν στο (β) και απαντήστε στις ίδιες ερωτήσεις. Όταν το ασανσέρ κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω ή προς τα κάτω, συγκρίνετε το μέτρο της δύναμης που το σύρμα (το οποίο συγκρατεί το ασανσέρ) ασκεί στο ασανσέρ προς τα πάνω με το ολικό βάρος του ασανσέρ μαζί με το περιεχόμενό του. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

δ) Υποθέστε ότι μένετε ακίνητος πάνω στη ζυγαριά μέσα στο ασανσέρ το οποίο επιταχύνεται προς τα πάνω. Προς στιγμήν σταματήστε την ανάλυση και θυμηθείτε τι αισθάνεστε κατά το σύντομο χρονικό διάστημα που το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα πάνω, πριν αποκτήσει σταθερή ταχύτητα. Σχεδιάστε τα διαγράμματα δυνάμεων που ζητήθηκαν στο (β). Συγκρίνετε το μέτρο της δύναμης (με κατεύθυνση προς τα πάνω) που ασκεί η ζυγαριά σε σας, με το βάρος σας. Συγκρίνετε την ένδειξη της ζυγαριάς με την ένδειξη που εμφανίζεται όταν το ασανσέρ είναι ακίνητο και όταν ανεβαίνει ή κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα. Το συμπέρασμά σας για το μέτρο της δύναμης που κατευθύνεται προς τα πάνω και ασκείται σε σας από τη ζυγαριά, είναι συνεπές με την αίσθηση που έχετε κατά το χρονικό διάστημα που επιταχύνετε προς τα πάνω; Συγκρίνετε τη συνολική προς τα πάνω έλξη των συρμάτων του ασανσέρ με το βάρος του ασανσέρ και του περιεχομένου του. Τι συμβαίνει στις ενδείξεις της ζυγαριάς και στη συνολική προς τα πάνω έλξη των συρμάτων, καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται συνεχώς; (Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.)

ε) Υποθέστε ότι στέκεστε πάνω στη ζυγαριά μέσα στο ασανσέρ, το οποίο επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση μικρότερη από $9,80 \text{ m/s}^2$. Επαναλάβετε ακριβώς τα διαγράμματα και τις ερωτήσεις της περίπτωσης (δ). Αναλύστε, επίσης, τι συμβαίνει, καθώς η προς τα κάτω επιτάχυνση αυξάνεται συνεχώς.

στ) Υποθέστε ότι, καθώς το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα κάτω, η προς τα πάνω έλξη των συρμάτων μειώνεται συνεχώς, μέχρις ότου το ασανσέρ αρχίσει να πέφτει ελεύθερα. Στις συνθήκες αυτές, ποιες δυνάμεις ασκούνται πάνω σας; Πόση (προς τα πάνω) δύναμη ασκεί η ζυγαριά πάνω σας; Ποια είναι η αριθμητική ένδειξη της ζυγαριάς; Το βάρος σας (η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη πάνω σας) έχει αλλάξει;

ζ) Το ασανσέρ είναι απολύτως κλειστό, ώστε είναι αδύνατο να κοιτάξετε έξω: το σύστημα αναφοράς σας είναι το εσωτερικό του ασανσέρ. Περιγράψτε τι παρατηρείτε να συμβαίνει στο ασανσέρ που πέφτει ελεύθερα,

καθώς εκτελείτε ορισμένα απλά πειράματα: λόγου χάρη: (i) κρατάτε μια μπάλα στο τεντωμένο χέρι σας και την αφήνετε ελεύθερη· (ii) σπρώχνετε ελαφρώς την μπάλα προς διάφορες κατευθύνσεις (προς τα πάνω, προς τα κάτω, πλαγίως κτλ.)· (iii) κρεμάτε ένα αντικείμενο από ένα καντάρι· (iv) δένετε τη μια άκρη ενός νήματος από την οροφή του ασανσέρ, ενώ στην άλλη άκρη του υπάρχει ένα βαρίδι και προσπαθείτε να εξαναγκάσετε το εκκρεμές σε ταλάντωση. Τι θα αισθανόσαστε αν το ασανσέρ έπεφτε ελεύθερα; Θα μπορούσατε να «σταθείτε» πάνω στο πάτωμα, όπως συμβαίνει στις συνηθισμένες περιπτώσεις; Τι συμβαίνει αν σπρώξετε το πάτωμα ή το τοίχωμα; Επινοήστε πρόσθετες ερωτήσεις και δικά σας ιδεατά πειράματα.

η) Υποθέστε ότι βρίσκεστε μέσα σε ένα θάλαμο ή σε ένα ασανσέρ και ένας καταπέλτης εκσφενδονίζει το θάλαμο ή το ασανσέρ προς τα πάνω: (i) Περιγράψτε τα αισθήματά σας και τις ενδείξεις της ζυγαριάς κατά το χρονικό διάστημα που ο καταπέλτης σάς εκσφενδονίζει προς τα πάνω. (ii) Περιγράψτε τις συνθήκες που επικρατούν μέσα στο θάλαμο, καθώς ανέρχεται κατακόρυφα, αφού εγκαταλείψει τον καταπέλτη. Συγκρίνετε αυτές τις συνθήκες με τις συνθήκες που επικρατούν αν το ασανσέρ πέφτει ελεύθερα.

θ) Καταρχάς, μπορούμε να επιταχύνουμε προς τα κάτω ένα αντικείμενο με επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης, δηλαδή μεγαλύτερη από $9,80 \text{ m/s}^2$; Τι πρέπει να κάνουμε για να προσδώσουμε αυτή την επιτάχυνση σε μια πέτρα ή σε ένα ασανσέρ; Ποιες συνθήκες επικρατούν μέσα σε ένα ασανσέρ που επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση μεγαλύτερη από g ; Επαναλάβετε ορισμένα από τα ιδεατά πειράματα της περίπτωσης (γ) και περιγράψτε τι θα παρατηρούσατε. Πού νομίζετε ότι θα στέκεστε κατά το χρονικό διάστημα που το ασανσέρ θα κινείται με την εν λόγω επιτάχυνση;

10. α) Υποθέστε ότι κάθεστε σε ένα αυτοκίνητο του οποίου η ταχύτητα αυξάνεται. Σχεδιάστε σε ξεχωριστά διαγράμματα τις δυνάμεις που ασκούνται στα εξής αντικείμενα: στο σώμα σας, στο κάθισμα όπου κάθεστε (ξεχωριστά από το αυτοκίνητο), στο αυτοκίνητο (ξεχωριστά από το κάθισμα), στο τμήμα της επιφάνειας του οδοστρώματος όπου τα λάστιχα του αυτοκινήτου αλληλεπιδρούν με το οδόστρωμα. Θεωρήστε ότι το αυτοκίνητο έχει την «κίνηση» στις πίσω ρόδες. Περιγράψτε με λόγια κάθε δύναμη· σχεδιάστε τις ισχυρότερες δυνάμεις με βέλη μεγαλύτερου μήκους· προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου. Εξηγήστε με δικά σας λόγια πώς παράγεται η δύναμη που προσδίδει επιτάχυνση στο αυτοκίνητο.

β) Υποθέστε ότι από την οροφή του αυτοκινήτου κρέμεται ένα βαρίδι (εκκρεμές). Σχεδιάστε σε ξεχωριστά διαγράμματα τις δυνάμεις που ασκούνται στο βαρίδι, στο νήμα από το οποίο κρέμεται και στο τμήμα της οροφής που αλληλεπιδρά με το νήμα. Περιγράψτε με λόγια κάθε δύναμη· προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου.

11. Υποθέστε ότι κάθεστε σε ένα κινούμενο αυτοκίνητο το οποίο επιβραδύνεται υπό την επίδραση των φρένων που υπάρχουν στους τέσσερις τροχούς. Σ' αυτήν την περίπτωση, προσδιορίστε τα ζητούμενα της προηγούμενης άσκησης. Εξηγήστε με δικά σας λόγια την προέλευση της δύναμης που επιβραδύνει το αυτοκίνητο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στις επόμενες ερωτήσεις, ο μαθητής, αρχικά, μελετά (με τη βοήθεια των εννοιών της δυναμικής που έχουν ήδη αναπτυχθεί) καταστάσεις που τις αντιλαμβάνεται με τις αισθήσεις του. Κατόπιν, προσπαθεί να αντιληφθεί αφηρημένες ή ασυνήθιστες καταστάσεις που είναι «μετασχηματισμοί» των συνηθισμένων.

12. Θεωρήστε ένα βαρίδι στην άκρη ενός νήματος που αιωρείται από το ταβάνι. Τραβάμε το βαρίδι προς τα αριστερά και το αφήνουμε ελεύθερο. Σχεδιάστε την τροχιά (τη διαδρομή) που θα ακολουθούσε το βαρίδι στις επόμενες περιπτώσεις: (i) τη στιγμή που το βαρίδι βρίσκεται στο μέσο της διαδρομής του, κατευθυνόμενο προς το κατώτατο σημείο της τροχιάς του, το νήμα σπάει· (ii) τη στιγμή που βρίσκεται στο κατώτατο σημείο, το νήμα σπάει· (iii) τη στιγμή που βρίσκεται στο μέσο της διαδρομής του, μεταξύ του κατώτατου σημείου και του ανώτατου προς τα δεξιά, το νήμα σπάει· (iv) τη στιγμή που βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο προς τα δεξιά, το νήμα σπάει.

13. Ο Νεύτων, σε σύνδεση με την ανάπτυξη της έννοιας της παγκόσμιας βαρυτικής έλξης και του ρόλου της μάζας στο νόμο του αντιστρόφου του τετραγώνου, εκτέλεσε ένα ιδιαίτερα σημαντικό πείραμα: Κατασκεύασε ένα κούφιο εκκρεμές, μέσα στο οποίο τοποθετούσε αντικείμενα διαφόρων υλικών, λόγου χάρη ξύλο, σίδηρο, χρυσό, χαλκό, αλάτι και ύφασμα. (Είναι δυνατό να μετρήσουμε με μεγάλη ακρίβεια την περίοδο του εκκρεμούς, μετρώντας τον αριθμό των ταλαντώσεων σε μεγάλο χρονικό διάστημα.) Ο Νεύτων, τοποθετώντας διαφορετικά υλικά στο εσωτερικό του εκκρεμούς, δεν παρατήρησε αλλαγή στην περιόδό του. Γιατί θεωρούσε ιδιαίτερα σημαντικό το εν λόγω πείραμα; Ποιο συμπέρασμα εξάγεται από το «μηδενικό» αποτέλεσμα;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν και πολλά εγχειρίδια περιλαμβάνουν ποιοτικές ερωτήσεις, με σκοπό ο μαθητής να προβληματιστεί για τα θέματα που περιγράψαμε στο παρόν Κεφάλαιο, τα περισσότερα δεν επιτυγχάνουν το σκοπό τους για πολλούς λόγους: επειδή οι ερωτήσεις είναι αποσπασματικές και απομονωμένες, δεν βοηθάνε το μαθητή να συνθέσει τις σχετικές ιδέες· επειδή οι ερωτήσεις είναι πολύπλοκες και «κοφτές», δεν καθοδηγούν με «σωκρατική» μέθοδο το μαθητή που αντιμετωπίζει δυσκολίες· το περιεχόμενο των ερωτήσεων δεν εμπλουτίζεται μέσω της σπειροειδούς επανάλη-

ψης των ιδεών. Εκτός από τον πρόχειρο σχεδιασμό τους, οι ερωτήσεις είναι, επίσης, ελάχιστα αποτελεσματικές, επειδή καθόλου ή σπάνια ζητούνται στα τεστ.

Εκτός από το είδος των ερωτήσεων που παρουσιάσαμε προηγουμένως, οι περισσότερες ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του τρόπου με τον οποίο μαθαίνουν οι μαθητές (τις οποίες περιγράψαμε στο κύριο τμήμα του παρόντος Κεφαλαίου) είναι πολύ χρήσιμες: οι μαθητές κάνοντας λάθη και πέφτοντας σε αντιφάσεις, εκλεπτύνουν τον τρόπο που αντιλαμβάνονται τις έννοιες και αφομοιώνουν το είδος της γνώσης που επιθυμούμε να ενσταλάξουμε. Αυτές οι ερωτήσεις συμπληρώνουν και κάνουν αποτελεσματικότερα τα συμβατικά προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου των εγχειριδίων. Έχουν, ωστόσο, ισχύο αποτέλεσμα, αν δεν ζητήσουμε από τους μαθητές να ασχοληθούν μ' αυτές και να τις αναλύσουν κι αν δεν τις συμπεριλάβουμε στα τεστ με τα οποία βαθμολογούνται.

4. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

4.1 Τα διανύσματα και η άλγεβρά τους

Οι περισσότερες παρουσιάσεις της έννοιας του διανύσματος αρχίζουν με την αναπαράσταση των μετατοπίσεων σε δύο διαστάσεις και, κατόπιν, αναπτύσσουν διαισθητικά τη διαδικασία πρόσθεσης των εν λόγω μεγεθών. Επειδή σε τούτο το στάδιο οι μαθητές δεν δυσκολεύονται να αντιληφθούν τη διαδικασία αυτή, η συγκεκριμένη παρουσίαση είναι αναμφίβολα λογικό και αποτελεσματικό σημείο εκκίνησης. Τα προβλήματα εμφανίζονται όταν περνάμε απότομα σε άλλες διαδικασίες και σε άλλα διανυσματικά μεγέθη.

Λόγου χάρη, σε ορισμένα εγχειρίδια αναφέρεται ότι, κατά την αφαίρεση των διανυσμάτων, το αντίθετο διάνυσμα προκύπτει αν αντιστρέψουμε απλώς τη φορά του αρχικού διανύσματος (ή αν πολλαπλασιάσουμε με τον βαθμωτό παράγοντα -1). Αν και σε μας το αίτιο είναι ολοφάνερο, αποδεικνύεται ότι στους μαθητές δεν είναι καθόλου προφανές. Διστάζουν, ωστόσο, να το αναζητήσουν και απομνημονεύουν τον ισχυρισμό, χωρίς να τον κατανοούν. Λόγου χάρη, στην κυκλική κίνηση, όταν θελήσουμε να προσδιορίσουμε τη διανυσματική αλλαγή της ταχύτητας κατά τη διάρκεια μιας στοιχειώδους γωνιακής μετατόπισης, επειδή οι μαθητές έχουν ξεχάσει τη διαδικασία της αφαίρεσης, δεν κατανοούν πώς προκύπτει η κεντρομόλος επιτάχυνση.

Αποτελεσματικότερος τρόπος εισαγωγής της πράξης της αφαίρεσης είναι να υιοθετήσουμε τη συστηματική μαθηματική διαδικασία: προσδιορίζουμε το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε σε δεδομένο διάνυσμα, ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το μηδέν. (Χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία, αυτό σημαίνει ότι κατασκευάζουμε «το αντίστροφο στοιχείο ως προς την πρόσθεση».) Ορίζουμε, λοιπόν, την αφαίρεση, συνδέοντάς τη με «πράξη» που την έχουμε ήδη ορίσει, δηλαδή με την πρόσθεση. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται, έτσι, ότι υπάρχει λογική συνέχεια και ότι η μετάβαση δεν γίνεται απότομα ούτε ο ισχυρισμός είναι αυθαίρετος.

Στη συνέχεια, σε πολλά εγχειρίδια διακηρύσσεται ότι επειδή η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη έχουν «μέτρο και διεύθυνση», είναι, επίσης, διανυσματικές ποσότητες, με την έννοια ότι η «αριθμητική» τους είναι παρόμοια με εκείνη της μετατόπισης. Ωστόσο, και ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν είναι προφανής στους μαθητές: θεωρούν ότι η πρόσθεση διανυ-

σμάτων ταχύτητας είναι απολύτως διαφορετική από την πρόσθεση των διανυσμάτων μετατόπισης, ενώ είναι αδύνατο να κατανοήσουν το διάνυσμα της επιτάχυνσης. Η μετάβαση από το ένα μέγεθος στο άλλο πρέπει να συνοδεύεται από κατάλληλη ανάλυση — αν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα και την άλγεβρά τους. Δεν διευκολύνουμε όντως το μαθητή αν «καταχωνιάσουμε» ή αγνοήσουμε τα ερωτήματα που αφορούν τη λογική δομή.

Για να παρουσιάσουμε με συνέπεια τα σχετικά ζητήματα, είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τουλάχιστον τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος της μετατόπισης με σταθερές ποσότητες μεγαλύτερες ή μικρότερες από τη μονάδα: Τι συμβαίνει όταν διαιρούμε τη μετατόπιση με το χρονικό διάστημα κατά το οποίο αυτή συνέβη; Τι μονάδες και τι διαστάσεις έχει το εν λόγω μέγεθος; Ποιο είναι το νόημα της επιτάχυνσης ως διάνυσμα και πώς συνδέεται με τη δύναμη; [Είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι ο «δρομος» είναι ομαλότερος, αν έχουμε ήδη δείξει την απαιτούμενη προσοχή στο νόημα του αλγεβρικού προσήμου που εμφανίζεται στην ευθύγραμμη κίνηση (όπως υποστηρίξαμε στο εδάφιο 2.8) και στον λεπτομερή λειτουργικό ορισμό της δύναμης (όπως τον εισαγάγαμε στα εδάφια 3.4-3.6).]

Άλλη ιδιότητα των διανυσμάτων, την οποία συχνά δεχόμαστε στο μάθημα χωρίς να την αναλύουμε, είναι η «ευκινησία» τους. Πολλοί μαθητές προσκολλώνται επίμονα στην αρχική άποψή τους ότι το διάνυσμα «ορίζεται σε συγκεκριμένο σημείο». Είναι κατανοητό πώς καλλιεργείται αυτή η εντύπωση: οι μετατοπίσεις, τα πρώτα διανύσματα που συναντούν οι μαθητές, έχουν αφετηρία σταθερό σημείο· στη συνέχεια ακολουθεί μια σειρά από διανύσματα τοποθετημένα έτσι, ώστε από το τέλος του προηγούμενου να αρχίζει το επόμενο, δηλαδή, η αρχή κάθε διανύσματος βρίσκεται σε συγκεκριμένο σημείο. Οι μαθητές θεωρούν, επίσης, ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι προσαρμοσμένο στο σωματίδιο και ότι η δύναμη ασκείται σε ορισμένο σημείο του σώματος. Όταν, λοιπόν, πρέπει να αντιληφθούν ότι οι δυνάμεις ασκούνται οπουδήποτε κατά μήκος της *ευθείας* της δράσης τους, αντιστέκονται και δυσπιστούν. Με τον ίδιο τρόπο αντιδρούν όταν πρέπει να μεταφέρουν τις ταχύτητες από το διάγραμμα της κυκλικής κίνησης, για να σχεδιάσουν το διανυσματικό διάγραμμα της αλλαγής της ταχύτητας. Επειδή θεωρούν ότι η διαδικασία «δεν έχει νόημα» και επειδή δεν την αποφεύγουν ή την εφαρμόζουν λανθασμένα. Για να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν το ότι τα διανύσματα *δεν* ορίζονται σε συγκεκριμένο σημείο, είναι απαραίτητο να προηγηθεί αναλυτική συζήτηση.

Οι μαθητές θα ωφελούνταν ακόμη περισσότερο αν στα εγχειρίδια υπήρχαν περισσότερες ασκήσεις και γυμνάσματα στις πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων που εκτελούνται διαγραμματικά, απ' όσα υπάρχουν συνήθως. Με τη βοήθεια του υπολογιστή, μπορούμε να επινοήσουμε γυμνάσματα με

ανατροφοδότηση και εμπλουτισμό, εκμεταλλευόμενοι την ικανότητά του για γραφικές παραστάσεις. Δυστυχώς, έως τη στιγμή που γράφονται τούτες οι γραμμές, ελάχιστα καλοσχεδιασμένα προγράμματα είναι διαθέσιμα στο εμπόριο.

4.2 Ο ορισμός του «διανύσματος»

Το πόσο αυστηρά θα ορίσει ο καθηγητής την έννοια του «διανύσματος», επαφίεται στην κρίση του. Προσωπικά, θεωρώ ότι σε στοιχειώδες επίπεδο ή με μαθητές που δεν πρόκειται να παρακολουθήσουν προχωρημένα μαθήματα μαθηματικών και φυσικής, δεν πρέπει να «το παρακάνουμε». Ωστόσο, για τους προχωρημένους μαθητές και για εκείνους που πιθανόν θα ακολουθήσουν το επάγγελμα του φυσικού ή του μηχανικού, δεν πρέπει να αγνοήσουμε ή να αποκρύψουμε το θέμα αυτό.

Αρχικώς, δείχνουμε στους μαθητές ότι δεν αρκεί ένα μέγεθος να έχει απλώς «μέτρο και διεύθυνση» για να το χαρακτηρίσουμε διανυσματικό. Λόγου χάρη, οι πεπερασμένες στροφές, αν και έχουν μέτρο και διεύθυνση, δεν είναι διανυσματικά μεγέθη, επειδή δεν αντιμετωπίζονται ως προς την πρόσθεση. Μπορούμε να δείξουμε το συγκεκριμένο γεγονός στους μαθητές, ζητώντας τους να στρέψουν διαδοχικά κατά 90° ένα βιβλίο γύρω από δύο διαφορετικούς άξονες: αν αντιμετωθίσουμε την αλληλουχία των στροφών ο τελικός προσανατολισμός του βιβλίου είναι διαφορετικός. Είναι δυνατό, λοιπόν, να αντιπαραθέσουμε άμεσα τούτο το γεγονός με το ότι οι μετατοπίσεις, οι ταχύτητες κτλ. αντιμετωπίζονται ως προς την πρόσθεση (ή την αφαίρεση) και ότι αυτό αποτελεί ουσιώδες συστατικό του ορισμού τους. (Για να καταλάβουμε τι είναι κάτι, πρέπει να καταλάβουμε και τι δεν είναι.)

Η εισαγωγή των πεπερασμένων στροφών αποτελεί επένδυση για το μέλλον, όταν θελήσουμε να δείξουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι δυνατό να παρασταθεί ως διανυσματικό μέγεθος. (Το συγκεκριμένο ζήτημα, συχνά παρατίθεται χωρίς προσπάθεια δικαιολόγησής του. Παραθέτοντας, ωστόσο, αστήρικτους ισχυρισμούς, ενθαρρύνουμε τους μαθητές να απομνημονεύουν τα θέματα, χωρίς να τα κατανοούν.) Εξετάζοντας τις στροφές δείχνουμε ότι οι απειροστές στροφές (όταν η γωνία στροφής προσεγγίζει το μηδέν) όντως μετατίθενται. Πραγματοποιούμε, έτσι, το πρώτο βήμα στην κατεύθυνση της εισαγωγής του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας με εύλογο και αποδεκτό τρόπο. Δεν εμφανίζεται ως μυστηριώδες μέγεθος που οι μαθητές πρέπει να το απομνημονεύσουν.

Είναι χρήσιμο επίσης να παρουσιάσουμε τα διανύσματα από μαθηματική άποψη, δηλαδή ως «διατεταγμένα ζεύγη» αριθμών. Αυτό το χαρακτηριστικό των διανυσμάτων συνδέεται στενά (στο πλαίσιο κατάλληλης σειράς

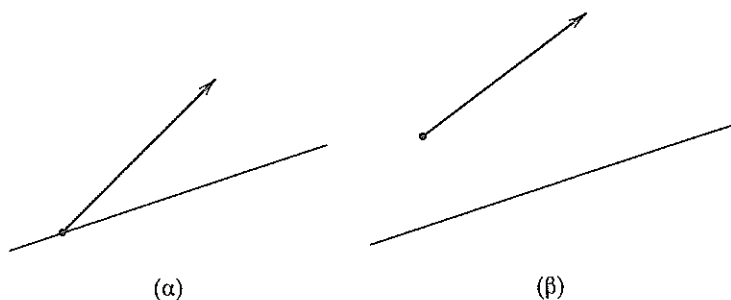
μαθημάτων) με τις ορθογώνιες συνιστώσες του διανύσματος.

Ο ορισμός του διανύσματος δεν εξαντλείται βεβαίως στην αντιμεταθετικότητα του ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση. Το διάνυσμα ορίζεται ουσιαστικά μέσω της συμπεριφοράς του ως προς τις στροφές σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων: η εν λόγω συμπεριφορά έχει μεγάλη σημασία στη διάκριση ενός καρτεσιανού διανύσματος από ένα ψευδοδιάνυσμα. Έχω διαπιστώσει ότι οι μαθητές οι οποίοι σε εισαγωγικό στάδιο είχαν το προνόμιο να παρακολουθήσουν βαθμιαία την έκθεση των απλών ιδεών που περιγράψαμε, αντιλαμβάνονται ευκολότερα τη συγκεκριμένη διάκριση, καθώς και την ανάγκη να επεκταθεί ο ορισμός πέραν της απαίτησης της αντιμεταθετικότητας ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση. Έτσι, δεν έρχονται ξαφνικά αντιμέτωποι μ' αυτές τις ιδέες σε προχωρημένο στάδιο. Με άλλα λόγια, η εν λόγω προετοιμασία βοηθά τους μαθητές να συλλάβουν καλύτερα τη φύση του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων.

4.3 Συνιστώσες διανύσματος

Επειδή οι καθηγητές θεωρούν ότι η έννοια των ορθογώνιων (καρτεσιανών) συντεταγμένων είναι απλή και διαφανής και επειδή οι μαθητές, αν προσδιορίσουμε τους καρτεσιανούς άξονες, έχουν απομνημονεύσει τον τρόπο χειρισμού του αντίστοιχου προβλήματος, πολλές σημαντικές δυσκολίες τις οποίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές περνούν απαρατήρητες. Ωστόσο, μέσα από συνεντεύξεις μαζί τους αναδεικνύεται ότι έχουν σημαντικά κενά στην κατανόηση.

Θεωρήστε τα δύο διαγράμματα του Σχ. 4.3.1. Αν σχεδιάσουμε το διάγραμμα (α) και ζητήσουμε από τους μαθητές «να δείξουν γραφικώς το αποτέλεσμα του διανυσματικού μεγέθους (ίσως μιας δύναμης ή μιας ταχύτητας), που παριστάνεται με το βέλος, κατά μήκος της ευθείας», πολλοί τα χάνουν και αδυνατούν να απαντήσουν. Αν σχεδιάσουμε το διάγραμμα (β)



Σχήμα 4.3.1 Για κάθε διάνυσμα πόσο είναι το «αποτέλεσμα» κατά τη διεύθυνση της γραμμής;

και θέσουμε την ίδια ερώτηση, ακόμη περισσότεροι μαθητές δεν μπορούν να απαντήσουν. (Στην τελευταία περίπτωση, η δυσκολία αυξάνεται από το ότι η ευθεία δεν διέρχεται από την «ουρά» του διανύσματος. Για το ζήτημα αυτό, βλ. τα σχόλια του εδαφίου 4.1.) Στο σχήμα δεν σημειώνεται κάποια γωνία με ένα συνηθισμένο σύμβολο, δεν υπάρχουν καρτεσιανοί άξονες σε συνηθισμένες κατευθύνσεις ούτε χρησιμοποιείται η λέξη «συνιστώσα». Δεν υπάρχει, λοιπόν, κάτι που να παρακινεί τους μαθητές να ανακαλέσουν τους τύπους με τα ημίτονα και τα συνημίτονα, που έχουν απομνημονεύσει. Με άλλα λόγια, οι μαθητές που αντιμετωπίζουν αυτή τη δυσκολία δεν έχουν κατανοήσει τις απαραίτητες έννοιες.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι ανάλυσης και παραδείγματα που βοηθούν τους μαθητές να αφομοιώσουν τις έννοιες· δεν θεωρώ, όμως, ότι κάποιος τρόπος υπερτερεί έναντι των υπολοίπων. Είναι απαραίτητο, ωστόσο, να είμαστε προσεκτικότεροι με τούτες τις ιδέες από όσο είναι τα περισσότερα εγχειρίδια. Με τα χρόνια, έχω εμπειρικά καταλήξει στον επόμενο τρόπο παρουσίασης: Αρχίζοντας με ένα παράδειγμα όπου το διάνυσμα του Σχ. 4.3.1β παριστάνει μια μετατόπιση και η γραμμή έναν τοίχο, εκτελούμε την επόμενη επίδειξη στην τάξη (ή στο αμφιθέατρο): κατευθύνουμε τη δέσμη ενός προβολέα κάθετα στον τοίχο, έτσι ώστε η σκιά κάποιου μετακινούμενου αντικειμένου (ενός μαθητή, ενός χεριού, μιας μπάλας) να μετατοπίζεται κατά μήκος του τοίχου, ενώ το ίδιο το αντικείμενο μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση του βέλους. (Στο παρόν στάδιο, επικεντρώνουμε την προσοχή μας μόνο στη μεταβολή της θέσης και όχι στο είδος της κίνησης.) Ερμηνεύουμε, λοιπόν, τη μετατόπιση της σκιάς ως το «αποτέλεσμα» της πραγματικής μετατόπισης του αντικειμένου στην αίθουσα, κατά μήκος του επιπέδου (ή της διεύθυνσης) του τοίχου. Μπορούμε, επίσης, να εκτελέσουμε παρόμοιες παρατηρήσεις για τη μετατόπιση της σκιάς κατά μήκος του τοίχου που είναι κάθετος στον προηγούμενο.

Κατόπιν, αφού επιφέρουμε ορισμένες τροποποιήσεις, προσδιορίζουμε το αποτέλεσμά τους, για να εμπλουτίσουμε την αντίληψή μας: Όταν η πραγματική κίνηση του αντικειμένου είναι παράλληλη προς τον έναν τοίχο και κάθετη προς τον άλλο, τι συμβαίνει στο «αποτέλεσμα» πάνω σε κάθε τοίχο; Με ποιες προϋποθέσεις το «αποτέλεσμα» σε κάθε τοίχο έχει το ίδιο μέγεθος; Αν αυξήσουμε ή ελαττώσουμε τη γωνία της πραγματικής μετατόπισης ως προς τον έναν τοίχο και διατηρήσουμε το μήκος της μετατόπισης σταθερό, τι συμβαίνει στο «αποτέλεσμα» σε κάθε τοίχο; Οι άξονες, κατά μήκος των οποίων μπορούμε να μετρήσουμε το «αποτέλεσμα», πρέπει να είναι μόνο οριζόντιοι και κατακόρυφοι;

Αφού οι μαθητές αποκτήσουν εμπειρία αυτού του είδους, οδηγούνται πολύ εύκολα στο να περιγράψουν την αντίστοιχη διαδικασία της χάραξης των κάθετων τμημάτων στους ορθογώνιους άξονες και να αντιληφθούν πώς εμφανίζονται οι σχέσεις με τα ημίτονα και τα συνημίτονα. Τέλος, όταν η

ιδέα εδραιωθεί με λειτουργικό τρόπο, μπορούμε, πλέον, να εισαγάγουμε την τεχνική *διατύπωση* «κάθετες συνιστώσες της μετατόπισης».

Σε επόμενο στάδιο, λαμβάνοντας υπόψη την ετοιμότητα των μαθητών και το βάθος της αντίληψής τους, μελετάμε (ή παρουσιάζουμε) τη συμπεριφορά δύο σκιών ενός αντικειμένου που κινείται συνεχώς. Μπορούμε, επίσης, να επεκτείνουμε τις ιδέες μας για να συμπεριλάβουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Η λογική επέκταση στην έννοια των συνιστωσών της δύναμης προκύπτει από τον τρόπο που για πρώτη φορά εισήχθη η έννοια της δύναμης. Ωστόσο, βοηθά όντως πολλούς μαθητές να αντιληφθούν τις έννοιες, αν σύρουν λόγου χάρη έναν κύβο (ή κάποιο άλλο σώμα) πάνω στο πάτωμα ή στο τραπέζι, μέσω νήματος που σχηματίζει διάφορες γωνίες ως προς την οριζόντια διεύθυνση, και αισθανθούν ότι η έλξη έχει δύο ταυτόχρονα αλλά διαφορετικά μεταξύ τους αποτελέσματα: ένα κατακόρυφο και ένα οριζόντιο. Η ένταση κάθε αποτελέσματος μεταβάλλεται μαζί με τη γωνία του νήματος, ακριβώς όπως μεταβάλλεται το μήκος της μετατόπισης και η ταχύτητα της σκιάς πάνω σε κάθε τοίχο. Έχοντας δημιουργήσει αυτήν την εννοιολογική δομή, μπορούμε να επιστρέψουμε σε ερωτήσεις όπως η ερώτηση που τέθηκε σε σύνδεση με το Σχ. 4.3.1 (αφού στρέψουμε την εικόνα προς απολύτως διαφορετική κατεύθυνση). Η συγκεκριμένη άσκηση αποτελεί έναν πρώτο έλεγχο του αν οι μαθητές έχουν αρχίσει να αφομοιώνουν την αντίστοιχη έννοια.

Όπως στην περίπτωση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης γραφικών των διανυσμάτων (βλ. εδάφιο 4.1), έτσι και στη χρήση των συνιστωσών, κατά την πρόσθεση και την αφαίρεση των διανυσμάτων οι μαθητές έχουν ανάγκη συμπληρωματικής εξάσκησης. Το υλικό που βασίζεται στη χρήση υπολογιστή είναι δυνατό να καλύψει αποτελεσματικά το κενό που, συνήθως, αφήνουν τόσο τα εγχειρίδια όσο και οι καθηγητές, λόγω έλλειψης χώρου και χρόνου.

4.4 Βολή

Η μελέτη της άποψης του Γαλιλαίου για τη λύση του προβλήματος της βολής και, ταυτόχρονα, η μελέτη ορισμένων ερωτημάτων που αναδεικνύονται σ' αυτό το θέμα και αφορούν τη λογική και επιστημολογική δομή του, παρέχουν σε όλο το φάσμα των μαθητών ενός κύκλου εισαγωγικών μαθημάτων φυσικής (από τους μαθητές που δεν θα ασχοληθούν ιδιαίτερα με τη φυσική έως τους μελλοντικούς μηχανικούς και φυσικούς) μια εξαιρετικά πολύτιμη ευκαιρία να αναπτύξουν την καλλιέργειά τους στις θετικές επιστήμες. Ο βαθμός πολυπλοκότητας των μαθηματικών που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάπτυξη του θέματος εξαρτάται από το επίπεδο των μαθητών. Μπορούμε, ωστόσο, να αναδείξουμε τις σημαντικές ιδέες και να τις μελε-

τήσουμε λογικά και με συνέπεια με οποιουσδήποτε μαθητές.

Ο Γαλιλαίος, λύνοντας τα πρόβλημα της κίνησης των βλημάτων στην ιδανική, οριακή περίπτωση της μηδενικής αντίστασης του αέρα, για πρώτη φορά χρησιμοποιεί προσεκτικά την αρχή της σύνθεσης. Στο βιβλίο του «Δύο Νέες Επιστήμες» περιγράφει την προσέγγισή του και αναδεικνύει την εννοιολογική αξία της με καταπληκτική σαφήνεια:

Στις προηγούμενες σελίδες, μελετήσαμε τις ιδιότητες της ομαλής κίνησης και της κίνησης που επιταχύνεται φυσιολογικά. Προτείνω, λοιπόν, να εκθέσω τις ιδιότητες ενός σώματος του οποίου η κίνηση είναι αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο άλλων κινήσεων: μιας ομαλής και μιας φυσιολογικά επιταχυνόμενης... Πρόκειται για την κίνηση ενός κινούμενου βλήματος· αντιλαμβάνομαι δε την ουσία της ως εξής: Φανταστείτε ότι ένα σωματίδιο βάλλεται κατά μήκος ενός οριζόντιου επιπέδου και κινείται χωρίς τριβές... Το σωματίδιο θα κινείται κατά μήκος του επιπέδου με ομαλή και αέναη κίνηση, υπό τον όρο ότι το επίπεδο δεν έχει όρια. Ωστόσο, αν το επίπεδο έχει άκρα και βρίσκεται σε κάποιο ύψος, το κινούμενο σωματίδιο, το οποίο φανταζόμαστε βαρύ, προσπερνά τα άκρα του επιπέδου και, λόγω του βάρους του, έχει τάση να κινηθεί προς τα κάτω, ταυτόχρονα με την προηγούμενη ομαλή αέναη κίνησή του· η κίνηση που προκύπτει... είναι σύνθεση μιας ομαλής οριζόντιας κίνησης και μιας κατακόρυφης φυσιολογικά επιταχυνόμενης.

Στο απόσπασμα, οι «φράσεις-κλειδιά» είναι: «η κίνηση που προκύπτει» και «είναι σύνθεση». Απ' αυτές τις φαινομενικά απλές φράσεις, φαίνεται ότι ο Γαλιλαίος είχε απομακρυνθεί αρκετά από τη σχολαστική άποψη. Στο πλαίσιο αυτής της άποψης, η κίνηση θεωρούνταν σύνολο και ουδείς την αντιλαμβανόταν ως σύνθεση. Επίσης, με τις συγκεκριμένες φράσεις ο Γαλιλαίος εκφράζει με σαφήνεια τη διαισθητική σύλληψή του ότι η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση ενός βλήματος δεν αλληλοεπηρεάζονται: συμπεριφέρονται σαν να υπάρχει καθεμιά ξεχωριστά· η πραγματική κίνηση είναι αποτέλεσμα απλής σύνθεσης δύο ανεξάρτητων κινήσεων, που μπορούμε να τις προσδιορίσουμε ξεχωριστά. Η υπόθεση αυτή είναι *φυσική*· δεν είναι, απλώς, ζήτημα ορισμού. Είναι, λοιπόν, απαραίτητο να επιβεβαιωθεί, όπως ακριβώς η υπόθεση ότι η ελεύθερη πτώση είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Για να επαληθεύσουμε την αρχή της υπέρθεσης, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την απάντηση σε δύο ξεχωριστά ερωτήματα: (1) Αν προσδώσουμε, με οποιονδήποτε τρόπο, οριζόντια ταχύτητα σε ένα σωματίδιο, μεταβάλλονται η κατακόρυφη επιτάχυνση και η ταχύτητά του, τις οποίες αποκτά φυσιολογικά, όταν πέφτει ελεύθερα σε ευθεία γραμμή; (2) Αντίστρο-

φα, η εμφάνιση κατακόρυφης επιτάχυνσης και ταχύτητας μεταβάλλει την οριζόντια ταχύτητα που έχει αρχικά το σωματίδιο; Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι δύο ερωτήσεις είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους και ότι αν η απάντηση στη μια ερώτηση είναι καταφατική, δεν σημαίνει αυτόματα ότι η απάντηση στην άλλη είναι επίσης καταφατική.

Βεβαίως, ο Γαλιλαίος δεν μπορούσε να ελέγξει πειραματικά αυτές τις συνθήκες με μεγάλη ακρίβεια (αν και υποστήριξε, όντως, ότι αν από την κορυφή του καταρτιού ενός κινούμενου πλοίου πέσει ένα αντικείμενο, χτυπά το κατάστρωμα στη βάση του καταρτιού). Έπρεπε να στηριχθεί πρωτίστως στην αυτοσυνέπεια των συμπερασμάτων και στη συμφωνία τους γενικά με το πείραμα. Στη σύγχρονη εποχή των ηλεκτρονικών συσκευών και των «γρήγορων» φωτογραφικών μηχανών, ο έλεγχος είναι δυνατό να γίνει αμέσως και να επιδειχθεί στους μαθητές. Οι στροβοσκοπικές φωτογραφίες, που έχουν αναπαραχθεί εκτενώς (στις εκδόσεις του «PSSC Physics» και σε άλλα εγχειρίδια), δείχνουν ότι δύο σφαίρες που έχουν ξεκινήσει ταυτόχρονα, η μια κατακόρυφα χωρίς αρχική ταχύτητα και η άλλη με αρχική οριζόντια ταχύτητα, σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα βρίσκονται συνεχώς στο ίδιο ύψος. Οι συγκεκριμένες φωτογραφίες απαντούν καταφατικά στην 1η ερώτηση. Κινηματογραφικές ταινίες δείχνουν ότι αν ένα αντικείμενο αφηθεί από ένα κατάρτι (ή από ένα κατακόρυφο σώμα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα), πέφτει ακριβώς κατά μήκος του καταρτιού και προσγειώνεται στη βάση του. Οι συγκεκριμένες ταινίες απαντούν καταφατικά στη 2η ερώτηση. (Σε πολλές παρουσιάσεις, η λογική απαίτηση της εξέτασης και των δύο ερωτήσεων, δυστυχώς αποκρύπτεται.)

Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να αφομοιώσουν τη φυσική της βολής, είναι σημαντικό να τους ζητάμε να σχεδιάζουν *ξεχωριστά* διαγράμματα: (1) της δύναμης που ασκείται στο βλήμα σε διάφορα σημεία της τροχιάς του (κατά την άνοδό του, στο υψηλότερο σημείο και κατά την κάθοδό του)· (2) της επιτάχυνσης σε κάθε σημείο· (3) της οριζόντιας και κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας σε κάθε σημείο· (4) του ολικού διανύσματος της ταχύτητας σε κάθε σημείο. Πρέπει, επίσης, να σχεδιάζουν παρόμοια σειρά διαγραμμάτων για ένα βαγονάκι το οποίο αρχικά κινείται χωρίς τριβές πάνω σε ένα τραπέζι και, κατόπιν, πέφτει από την άκρη του τραπεζιού. Ορισμένες φορές στα εγχειρίδια υπάρχουν εικόνες όπου στο *ίδιο* διάγραμμα εμφανίζονται βέλη διαφορετικών διανυσματικών μεγεθών. Πρόκειται, αναμφίβολα, για πηγή σοβαρών συγχύσεων.

Πολύτιμη άσκηση είναι, επίσης, η σχεδίαση της τροχιάς που θα ακολουθούσε το βαρίδι ενός εκκρεμούς αν κοβόταν το νήμα: (1) σε κάποιο σημείο της καθόδου του εκκρεμούς· (2) στο χαμηλότερο σημείο της ταλάντωσης· (3) σε κάποιο σημείο της ανόδου του εκκρεμούς· (4) στην ακραία θέση της ταλάντωσης. [Αρχικά μελετήσαμε το ρόλο και τη σπουδαιότητα αυτών των ασκήσεων στο εδάφιο 3.16. Η εκφώνηση του προβλήματος υπάρχει στο

παράρτημα του 3ου Κεφαλαίου (12ο πρόβλημα).]

Στις «Δύο Νέες Επιστήμες», ο Γαλιλαίος δεν παρουσιάζει, απλώς, τους συλλογισμούς του για τα σώματα και την κίνησή τους. Προπαγανδίζει, επίσης, την αξία των μαθηματικών στην περιγραφή και την κατανόηση των φυσικών φαινομένων. Αφού προσδιορίζει την εξίσωση της τροχιάς ενός βλήματος, αποδεικνύει ότι αν η γωνία βολής είναι 45° το βεληνεκές είναι μέγιστο¹. Η ευχαρίστησή του για το αποτέλεσμα φαίνεται μέσα από τα λόγια του Sagredo:

Η ισχύς της ανστηρής απόδειξης, όπως συμβαίνει μόνο στα μαθηματικά, με γεμίζει θαυμασμό και ευχαρίστηση. Απ' όσα αναφέρουν οι πυροβολητές, γνώριζα ήδη ότι κατά τη χρήση των κανονιών και των τουφεκιών, το μέγιστο βεληνεκές... προκύπτει όταν η γωνία βολής ως προς τον ορίζοντα είναι 45° ...· ωστόσο, η κατανόηση της αιτίας του συγκεκριμένου αποτελέσματος υπερτερεί κατά πολύ της μαρτυρίας των παρατηρητών, αλλά και της ετυμολογίας πειραμάτων που έχουν επανειλημμένα εκτελεστεί.

Αν χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο απόσπασμα στην τάξη, πρέπει, συγχρόνως, να αναλύσουμε τι εννοούν οι επιστήμονες με τη φράση «κατανοώ την αιτία...» στη συγκεκριμένη περίπτωση. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται κατά γράμμα τη φράση αυτή. Πρέπει, λοιπόν, να τους βοηθήσουμε να αντιληφθούν ότι η φράση αυτή σημαίνει ότι ερμηνεύω ένα αποτέλεσμα με μια ακολουθία απλούστερων, εύλογων και, κατά προτίμηση, καλά θεμελιωμένων ιδεών που αφορούν μιαν ευρύτερη περιοχή φαινομένων. Οι συγκεκριμένες ιδέες, ωστόσο, δεν ερμηνεύονται και είναι δυνατό να περιέχουν μιαν ατέλειωτη σειρά από αναπάντητα «γιατί» που έρχονται και παρέρχονται. Λόγου χάρη, «γιατί όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση ανεξαρτήτως του βάρους τους;» ή «γιατί οι ορθογώνιες συνιστώσες της ταχύτητας ενός βλήματος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους;».

1. Για τους μαθητές που έχουν προχωρήσει αρκετά στον διαφορικό λογισμό, είναι πολύτιμη ευκαιρία να προσδιορίσουν, με παραγωγή, το ακρότατο του βεληνεκούς και να επαληθεύσουν αν πρόκειται για μέγιστο ή ελάχιστο: μέχρι τότε, σπάνια έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν την εν λόγω μαθηματική τεχνική σε φυσικό πρόβλημα. Οι μαθητές που δεν γνωρίζουν διαφορικό λογισμό είναι απολύτως δυνατό να προσδιορίσουν διαισθητικά και με μη ανστηρό τρόπο το μέγιστο. Η συγκεκριμένη μελέτη είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, τόσο για να εκτιμήσουν την αξία του επιχειρήματος του Γαλιλαίου για το ρόλο των μαθηματικών όσο και για να αντιληφθούν άλλες φυσικές καταστάσεις όπου εμφανίζονται μέγιστα τα οποία συνδέονται με το γινόμενο του ημιτόνου με το συνημίτονο.

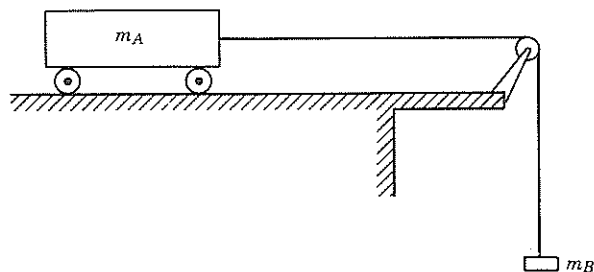
4.5 Φαινομενολογική ανάλυση και συλλογισμοί

Σκοπός του παρόντος εδαφίου είναι να καταδείξει τρόπους συλλογισμού και ανάλυσης τους οποίους λίγοι μαθητές χρησιμοποιούν αυτομάτως. Μπορούμε, ωστόσο, να τους καλλιεργήσουμε και να τους αναπτύξουμε με την εξάσκηση. Ευκαιρίες εξάσκησης παρέχονται μέσω δομημένων ακολουθιών ερωτήσεων. Οι ερωτήσεις πρέπει, κατά προτίμηση, να σχετίζονται με καταστάσεις που είναι εύκολο να αναπαραχθούν ή τις συναντάμε συχνά στην καθημερινή ζωή. Το είδος των παραδειγμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε δεν έχει ιδιαίτερη σημασία: τα παραδείγματα πρέπει, απλώς, να είναι κατατοπιστικά. Μπορούμε, λοιπόν, να δημιουργήσουμε πρωτότυπα παραδείγματα (ή παραλλαγές των παραδειγμάτων που ήδη υπάρχουν), τα οποία θα ταιριάζουν καλύτερα στους μαθητές μας.

Λόγου χάρη, δεν πρέπει να χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές σχέσεις που περιγράφουν τη βολή για να αντικαθιστούμε απλώς τα αριθμητικά δεδομένα των προβλημάτων που υπάρχουν στο τέλος των κεφαλαίων. Πρέπει, επίσης, να κατευθύνουμε τους μαθητές να ερμηνεύσουν τα αλγεβρικά αποτελέσματα: Ποιοι παράγοντες προσδιορίζουν το βεληνεκές; Πώς μεταβάλλεται η ολική διανυσματική ταχύτητα κατά τη διάρκεια της πτήσης; Αν εκτοξεύσουμε οριζόντια ένα βλήμα, ποιοι παράγοντες προσδιορίζουν πόσο ύψος χάνει καθώς αυξάνεται η οριζόντια απόσταση από το σημείο βολής; Στην οριζόντια βολή, πώς είναι δυνατό να μειωθεί το μήκος της κατακόρυφης πτώσης για δεδομένο βεληνεκές; Ποια σημασία έχει το ότι η μάζα του βλήματος δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις;

Πριν από χρόνια, σε εξετάσεις για την απόκτηση διδακτορικού διπλώματος, ρώτησα γιατί οι καθοδικές ακτίνες δεν φαίνεται να εκτρέπονται λόγω της βαρύτητας, ενώ η ηλεκτρική και η μαγνητική εκτροπή είναι καταφανής. Πάνω από το 40% των φοιτητών απάντησε ότι αυτό οφειλόταν στο μικρό μέγεθος της μάζας του ηλεκτρονίου. Το αποτέλεσμα έδειχνε ότι οι συγκεκριμένοι φοιτητές δεν είχαν ασχοληθεί με το είδος του συλλογισμού που αναφέραμε προηγουμένως.

Μια περίπτωση την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν βαθύτερη γνώση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα, είναι το πανταχού παρόν πρόβλημα που απεικονίζεται στο Σχ. 4.5.1 (δεν υπάρχουν τριβές και το νήμα δεν έχει μάζα). Το πρόβλημα τίθεται, συνήθως, για τον προσδιορισμό των κατάλληλων αλγεβρικών σχέσεων ή για αριθμητικούς υπολογισμούς (ή και για τα δύο): σπάνια, ωστόσο, ζητάμε από τους μαθητές να αναδείξουν το φυσικό περιεχόμενο της συγκεκριμένης κατάστασης, ερμηνεύοντας τα αποτελέσματά τους. Είναι δυνατόν, ωστόσο, να ζητήσουμε να μας πουν (με τη βοήθεια των αλγεβρικών αποτελεσμάτων τους) πώς μεταβάλλεται η επιτάχυνση του συστήματος και η τάση του νήμα-



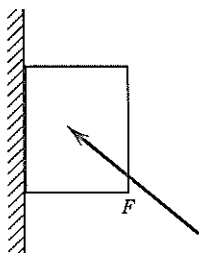
Σχήμα 4.5.1

τος, αν η μάζα m_B γίνει πολύ μεγαλύτερη ή πολύ μικρότερη από την m_A . Οι συγκεκριμένες προβλέψεις έχουν φυσικό νόημα; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

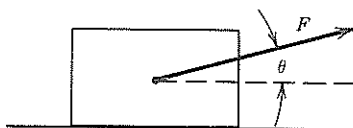
Μπορούμε, επίσης, να θέσουμε το σημαντικότερο ζήτημα: να συγκριθεί η δύναμη που ασκεί το νήμα πάνω στο βαγονάκι με το βάρος της m_B («συγκρίνω» σημαίνει «προσδιορίζω αν είναι ίση, μεγαλύτερη ή μικρότερη»). (Για πολλά χρόνια έθετα αυτή την ερώτηση σε μεταπτυχιακούς φοιτητές, οι περισσότεροι από τους οποίους βοηθούσαν προπτυχιακούς φοιτητές στην εργασία τους για το σπίτι. Αρχικά, σχεδόν όλοι απαντούσαν ότι οι δύο δυνάμεις είναι ίσες κατά μέτρο· μόνο 30% περίπου άλλαξε άποψη, όταν τους ζητούσα να ξανασκεφτούν την απάντησή τους.) Η απάντηση ότι οι δύο δυνάμεις είναι «ίσες» υποδηλώνει ότι οι μαθητές κατανοούν ανεπαρκώς τα αντίστοιχα φαινόμενα και το φαινομενολογικό περιεχόμενο του 2ου Νόμου. Οι σωστές απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές στα συμβατικά προβλήματα δεν αποτελεί εγγύηση ότι έχουν κατανοήσει τα σχετικά ζητήματα.

Μια απλή κατάσταση, που αποτελεί καλή άσκηση φαινομενολογικής ανάλυσης και δεν οδηγεί σε τυφλή αντικατάσταση των μαθηματικών σχέσεων, εμφανίζεται στο Σχ. 4.5.2: Ένας άνθρωπος κρατά κολλημένο τον κύβο πάνω στον τοίχο, ασκώντας πλάγια δύναμη F . Μεταξύ του κύβου και του τοίχου υπάρχει τριβή. Ο κύβος θα κινηθεί προς τα πάνω, προς τα κάτω ή θα μείνει ακίνητος;

Αρχικά, πρέπει να κατευθύνουμε τους μαθητές να σχεδιάσουν το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στον κύβο, στον τοίχο και στο χέρι που σπρώχνει τον κύβο, ακολουθώντας την προσέγγιση που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 3.16. Η απλούστερη εκδοχή του προβλήματος είναι να δο-



Σχήμα 4.5.2



Σχήμα 4.5.3

θούν αριθμητικές τιμές για τη δύναμη, τη μάζα του κύβου και το συντελεστή τριβής και να αναζητηθεί τι συμβαίνει στις συγκεκριμένες συνθήκες. Πολυπλοκότερη εκδοχή είναι να μελετηθεί το πρόβλημα μόνο με τη βοήθεια αλγεβρικών σχέσεων. (Η τελευταία εκδοχή είναι άριστη άσκηση για μαθητές που ενδιαφέρονται για θεωρητική ανάλυση.) Το νόημα της συγκεκριμένης ερώτησης είναι ότι δεν αναφέρουμε στους μαθητές τι πρέπει να υπολογίσουν: μόνοι τους θα αποφασίσουν τι πρέπει να κάνουν, τι πρέπει να αναζητήσουν και πώς πρέπει να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα. Η εν λόγω διαδικασία παρακινεί τους μαθητές να σκεφτούν φαινομενολογικά και αντιμάχεται την τάση τους να καταφεύγουν σε διαδικασίες απομνημόνευσης.

Το προηγούμενο πρόβλημα δεν είναι πολύ ενδιαφέρον, αν το εξετάσουμε μεμονωμένα, χωρίς να το συσχετίσουμε με άλλες περιπτώσεις που συναντάμε στη συνέχεια. Αξιόλογο πρόβλημα, που συνδέεται στενά μ' αυτό, είναι εκείνο όπου ένας άνθρωπος «κολλάει» στο τοίχωμα του περιστρεφόμενου κυλίνδρου του λούνα παρκ. Σχετικό πρόβλημα είναι, επίσης, εκείνο όπου ένα ηλεκτρικά φορτισμένο μπαλόνι μένει κολλημένο στον τοίχο του δωματίου. Όταν οι μαθητές συναντούν τα συγκεκριμένα προβλήματα, εβδομάδες μετά, καθώς το μάθημα συνεχίζεται, ο καθηγητής αρχίζει να παρατηρεί στο πρόσωπό τους τους μορφασμούς και τα βλέμματα της αναγνώρισης ενός «φίλου απ' τα παλιά» σε νέο πλαίσιο. Αν δεν υπάρξει η συγκεκριμένη επανάληψη και ανακύκληση, οι ιδέες λησμονιούνται.

Τέλος, μια περίπτωση σε δύο διαστάσεις με πλούσιο φυσικό περιεχόμενο, η οποία σπάνια διερευνάται με κατάλληλο τρόπο, εμφανίζεται στο Σχ. 4.5.3. Ως συνήθως, πρέπει αρχικά να σχεδιάσουμε το διάγραμμα των δυνάμεων. Κατόπιν, μπορούμε να ρωτήσουμε: Αν το σώμα δεν ολισθαίνει, η δύναμη τριβής είναι απαραίτητως μηδενική; Ποιο είναι το εύρος τιμών της δύναμης τριβής; Αν το σώμα ολισθαίνει, η δύναμη τριβής ισούται με μmg ; Γιατί ναι ή γιατί όχι; Τι συμβαίνει στην επιτάχυνση, αν η γωνία θ αυξάνεται, αρχίζοντας από μηδενική, ενώ το μέτρο της δύναμης F παραμένει σταθερό; Τι συμβαίνει αν η γωνία παραμένει σταθερή και το μέτρο της δύναμης αυξάνεται απεριόριστα; Σε τι διαφέρει η συγκεκριμένη κατάσταση από εκείνη όπου η φορά της δύναμης F είναι αντίθετη;

4.6 Μέτρηση με ακτίνια και ο αριθμός π

Στη διάρκεια μιας σειράς εισαγωγικών μαθημάτων φυσικής, ελάχιστοι

μαθητές κατανοούν τον τρόπο μέτρησης με ακτίνια, ακόμα κι αν η έννοια τους έχει ήδη εκτεθεί. Λίγοι έχουν, απλώς, απομνημονεύσει ορισμένα στοιχεία για το μήκος του τόξου και την ακτίνα· δεν μπορούν, λοιπόν, να επαναπροσδιορίσουν ακριβώς τον ορισμό ή να τον χρησιμοποιήσουν στη μελέτη των στροφών και της γωνιακής ταχύτητας. Για τους περισσότερους μαθητές το πρόβλημα αφορά καταρχάς το νόημα του π και όχι τη μέτρηση με ακτίνια.

Αν οι μαθητές ερωτηθούν για το νόημα του π , «ψελλίζουν» τον μαθηματικό τύπο της περιμέτρου ή του εμβαδού, χωρίς να είναι βέβαιοι σε τι αναφέρεται ο τύπος και χωρίς να μπορούν να εξηγήσουν το νόημα των συμβόλων του ή το πώς προκύπτει. Είναι, λοιπόν, απαραίτητος όχι ο υπολογισμός με αυστηρές μεθόδους της σειράς των δεκαδικών ψηφίων του π , αλλά ο προσδιορισμός του μέσω της άμεσης καταμέτρησης των στοιχείων του κύκλου — το είδος της απόδειξης η οποία ήταν γνωστή από την αρχαιότητα. Αργότερα, είναι δυνατό να παρουσιάσουμε, με τη βοήθεια της ανάλυσης, τον συγκεκριμένο υπολογισμό στους μαθητές που θα προχωρήσουν στο αντίστοιχο επίπεδο.

Η διαδικασία που ακολουθώ με τους σπουδαστές οι οποίοι δεν κατανοούν το νόημα του π είναι η εξής: χρησιμοποιώντας νήμα και υποδεκάμετρο, μετρούν την περίμετρο των κυλινδρικών αντικειμένων που μπορούν να βρουν μέσα στο εργαστήριο. Μετρούν, επίσης, τη διάμετρό τους, τοποθετώντας τα αντικείμενα μεταξύ δύο απολύτως παράλληλων σανίδων. Κατόπιν, σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της περιμέτρου ως προς την ακτίνα. (Πρέπει να επισημάνουμε ότι επειδή η συγκεκριμένη άσκηση *έπεται* των αριθμητικών συλλογισμών και της διαγραμματικής ανάλυσης που περιγράψαμε στα εδάφια 1.10 και 1.11, οι μαθητές έχουν ήδη αποκτήσει αίσθηση για το νόημα της κλίσης μιας ευθείας σε κάποια γραφική παράσταση.) Σχεδόν κάθε φορά που καθοδηγώ αυτή τη μελέτη (λόγου χάρι, με φοιτητές που προορίζονται για δάσκαλοι ή με μετεκπαιδευόμενους δασκάλους) ακούγονται φωνές μέσα στην αίθουσα, όπως «Νά ποιο είναι το νόημα του π !!!». Ωστόσο, η «ανακάλυψη» *πρέπει* να συνοδεύεται με ασκήσεις και επεξηγήσεις, όπως εκείνες που παρουσιάσαμε στο 1ο Κεφάλαιο· αλλιώς, τα αρχικά στοιχεία κατανόησης χάνονται.

Από τη στιγμή που οι μαθητές κατανοήσουν το νόημα του π στο γλωσσικό επίπεδο που ορίσαμε προηγουμένως, μπορούμε να τους κατευθύνουμε να αντιληφθούν ότι ο λόγος S/R (όπου με S συμβολίζουμε το μήκος του τόξου και με R την ακτίνα) πρέπει για δεδομένη γωνία να έχει σταθερή τιμή, ανεξάρτητα από το μέγεθος της R . Πρέπει, επίσης, να αντιληφθούν ότι η τιμή του λόγου μεταβάλλεται από 0 έως 6,28 (η τελευταία τιμή αντιστοιχεί στον πλήρη κύκλο) και ότι επειδή σε κάθε γωνία αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή, ο λόγος S/R είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της γωνίας που βαίνει στο συγκεκριμένο τόξο. (Κάθε φορά που δίδασκα ένα ει-

σαγωγικό μάθημα φυσικής, συμπεριλαμβανομένων των μαθημάτων όπου χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός, ελάχιστοι σπουδαστές γνωρίζαν το νόημα της έκφρασης «βαίνει στο τόξο». Αν πρόκειται να τη χρησιμοποιήσετε, πρέπει προηγουμένως να την ορίσετε με σαφήνεια.)

Για να εμπλουτίσουμε το περιεχόμενο του λόγου S/R και για να του προσδώσουμε ιδιαίτερη βαρύτητα είναι χρήσιμο να επισημάνουμε το εξής: οι λόγοι οι οποίοι είναι γνωστοί ως «ημίτονο», «συνημίτονο» και «εφαπτομένη» έχουν, επίσης, σταθερή τιμή για δεδομένη γωνία, ανεξάρτητα από το μέγεθος του κύκλου πάνω στον οποίο ορίζονται· αποτελούν, λοιπόν, επίσης, μέτρο του μεγέθους μιας γωνίας. Ωστόσο, οι συγκεκριμένοι λόγοι δεν μεταβάλλονται *γραμμικά* με το μέγεθος της γωνίας (την οποία αντιλαμβανόμαστε ως κλάσμα πλήρους κύκλου), όπως συμβαίνει με το λόγο S/R . Χρησιμοποιούνται, λοιπόν, με απολύτως διαφορετικό τρόπο.

Τέλος, ο λόγος S/R μας παρέχει έναν «φυσιολογικό» τρόπο μέτρησης γωνιών μέσω της σύνδεσής του με το π , που αποτελεί εγγενή ιδιότητα όλων των κύκλων. Δεν πρόκειται για τεχνητό τρόπο μέτρησης, όπως είναι η μέτρηση με μοίρες. Η κύρια ιδιότητα του αριθμού S/R είναι ότι είναι *αδιάστατος*: είναι «καθαρός» αριθμός (στο συγκεκριμένο πλαίσιο αυτό είναι εν μέρει το νόημα του όρου «φυσιολογικός»). Ωστόσο, πρέπει πάντοτε να επισημαίνουμε ότι αν και ο συγκεκριμένος νέος τρόπος μέτρησης γωνιών είναι αδιάστατος, υπεισέρχεται κάποια μονάδα μέτρησης: η *μονάδα* αυτή ονομάζεται «ακτίνιο» και είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως στους υπολογισμούς. Δεν πρέπει, όμως, να τη συγχέουμε με τις μονάδες των μεγεθών που έχουν *διαστάσεις*, λόγου χάρι της μάζας, του μήκους και του χρόνου.

Πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι η προηγούμενη μελέτη ακολουθεί τον κανόνα: «πρώτα η ιδέα και μετά η ονομασία», τον οποίο υποστηρίξαμε στο 2ο Κεφάλαιο. Πριν γράψουμε την έκφραση:

$$\theta \equiv S/R \quad (4.6.1)$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο μέλλον, εξετάζουμε σε βάθος τις ιδιότητες του λόγου S/R . Η συγκεκριμένη ακολουθία ανάπτυξης βοηθά να μειωθεί η τάση των μαθητών να απομνημονεύουν τον «τύπο», χωρίς να έχουν κατανοήσει ότι πρόκειται για *ορισμό* που τον επινοήσαμε λόγω της πρακτικής αξίας του.

Οι μαθητές που θα προχωρήσουν στο επίπεδο όπου θα συναντήσουν την αντικατάσταση του ημιτόνου ή της εφαπτομένης με την ίδια την τιμή της γωνίας (όταν πρόκειται για μικρή τιμή) βοηθούνται αν τους κατευθύνουμε να αντιληφθούν το εξής: η αντικατάσταση ισχύει μόνον όταν η γωνία μετρείται σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Η συγκεκριμένη πράξη εκτελείται πολύ εύκολα με υπολογιστές τσέπης που όλοι διαθέτουν· άλλωστε, οι περισ-

σότεροι μαθητές διασκεδάζουν χρησιμοποιώντας με αυτόν τον τρόπο τους υπολογιστές τους. Ένας τρόπος παρουσίασης του προβλήματος είναι να συντάξουν οι μαθητές έναν πίνακα με γωνίες σε ακτίνια και μοίρες, παράλληλα με το ημίτονο και την εφαπτομένη τους. Αρχίζοντας από τις μεγαλύτερες γωνίες, συνεχίζουν προς τις μικρότερες και ανακαλύπτουν τη γωνία στην οποία οι τρεις τιμές συμφωνούν έως δύο δεκαδικά ψηφία, έως τρία, τέσσερα κτλ.

Τέλος, στους μαθητές που παρακολουθούν μαθήματα απειροστικού λογισμού πρέπει να επισημανθεί ότι ο τύπος της παραγώγου της συνάρτησης του ημιτόνου και του συνημιτόνου ισχύει μόνον αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια: δηλαδή, οι σχέσεις ορίζουν

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 1 \quad (4.6.2)$$

οι οποίες χρησιμοποιούνται στην παράγωγο, ισχύουν μόνον αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια.

Η κύρια αιτία για την οποία ακόμη και μαθητές που έχουν παρακολουθήσει τον τρόπο μέτρησης σε ακτίνια, δεν έχουν συλλάβει το νόημά του, δεν είναι ότι ο καθηγητής δεν τους τον «εξηγήσε» σωστά (συνήθως, οι επεξηγήσεις είναι προσεκτικές). Ο λόγος είναι ότι ουδέποτε τους ζητήθηκε να αναπτύξουν και να εξηγήσουν με δικά τους λόγια κάποιο συλλογισμό. Καταφεύγουν, λοιπόν, στην απομνημόνευση και αποφεύγουν την ολόψυχη προσπάθεια που πρέπει να καταβάλουν για να κατανοήσουν κάποιο θέμα.

4.7 Κυκλική κίνηση

Συνήθως, «καταχωνιάζουμε» πολύ γρήγορα την κινηματική της επίπεδης κυκλικής κίνησης, λόγω της φανεράς ομοιότητάς της με την ευθύγραμμη. Για τους μαθητές που έχουν όντως αφομοιώσει τις έννοιες και τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κίνησης, η συγκεκριμένη τακτική είναι αποδεκτή: η περιττή επανάληψη είναι απώλεια χρόνου. Ωστόσο, επειδή, όπως επισημάναμε στο 2ο Κεφάλαιο, πολλοί μαθητές δεν αφομοιώνουν τις έννοιες από τον «πρώτο γύρο», η ανακύκλωση των ιδεών είναι χρήσιμη: στο μεταλλαγμένο πλαίσιο μια προσεκτικότερη ανάλυση αποδεικνύεται πολύτιμη για τη συγκεκριμένη κατηγορία μαθητών· ο ρυθμός παρουσίασης, ωστόσο, μπορεί να είναι ταχύτερος από πριν.

Στο παρόν στάδιο, οι πολικές συντεταγμένες αποτελούν νέο στοιχείο

για τους μαθητές. Ακόμα κι αν έχουν συναντήσει το συγκεκριμένο είδος συντεταγμένων στα μαθηματικά, δεν τις έχουν συνδέσει με την περιγραφή φυσικών γεγονότων. Είναι, λοιπόν, απαραίτητο να τους δοθεί η ευκαιρία να αφομοιώσουν τη σύνδεση. Πρέπει να αντιληφθούν ότι η γωνιακή θέση, όπως συμβαίνει με τη θέση πάνω στον βαθμολογημένο άξονα, δεν παριστάνει γενικά τη μετατόπιση του κινητού, το οποίο εξάλλου, ίσως, ποτέ να μη βρέθηκε στη μηδενική θέση. Πρέπει να τους δώσουμε την ευκαιρία να αντιληφθούν πώς τα αλγεβρικά πρόσημα εμφανίζονται τις θετικές και στις αρνητικές στροφές, στις θετικές και τις αρνητικές γωνιακές ταχύτητες και στις θετικές και τις αρνητικές γωνιακές επιταχύνσεις. Και στην περίπτωση αυτή, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ των εννοιών, όπως περιγράψαμε στο 2ο Κεφάλαιο.

Ο αριθμητικός συλλογισμός που συνδέει τη γωνιακή μετατόπιση με τη γραμμική, κατά μήκος του αντίστοιχου τόξου, τη γωνιακή ταχύτητα με τη γραμμική και τη γωνιακή επιτάχυνση με την εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης δυσκολεύει, επίσης, τους μαθητές. Ο συγκεκριμένος συλλογισμός δεν περιλαμβάνει μόνον την κατανόηση της μέτρησης με ακτίνια (εδάφιο 4.6)· αφορά, παράλληλα, και την αντίληψη ότι η στιγμιαία γραμμική ταχύτητα αντιστοιχεί κατά μέτρο στο μήκος του τόξου που θα καλυπτόταν σε ένα δευτερόλεπτο, αν η στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας παρέμενε σταθερή. Πολλοί μαθητές, για να αφομοιώσουν τις εξισώσεις, είναι απαραίτητο να έχουν άμεση εμπειρία, λόγου χάρις τυλίγοντας ένα κομμάτι νήμα γύρω από κάποιον κύλινδρο. Πραγματοποιώντας τη συγκεκριμένη επίδειξη εξοικονομείται χρόνος, αν οι μαθητές εξετάσουν, επίσης, την κύλιση του κυλίνδρου και προσπαθήσουν να αφομοιώσουν τη σύνδεση μεταξύ της γωνιακής ταχύτητας και της απόστασης που καλύπτει ο κύλινδρος, ενώ κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Τα δύο παραδείγματα αλληλοενισχύονται και συντελούν στην καλύτερη κατανόηση.

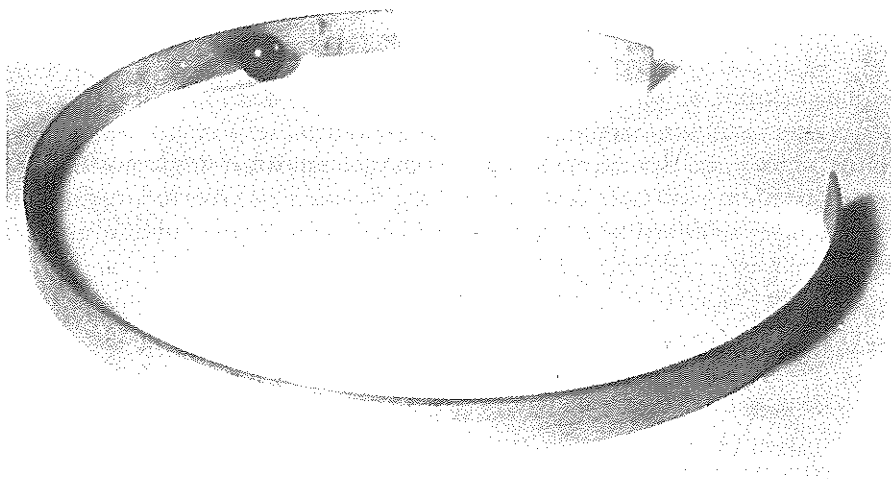
Αφού αναπτύξουμε τις κινηματικές σχέσεις, είναι χρήσιμο να δείξουμε την αντιστοιχία μεταξύ της ευθύγραμμης και της κυκλικής κίνησης. Ένας τροχός με ένα βάρος, το οποίο κρέμεται από κάποιο νήμα τυλιγμένο στον άξονα του τροχού, αποτελεί ιδιαίτερα χρήσιμο παράδειγμα. Καθώς πέφτει το βάρος, που, αρχικά, ήταν τυλιγμένο γύρω από τον τροχό, ο τροχός επιταχύνεται ομαλά. Μπορούμε, λοιπόν, να συγκρίνουμε τις παραμέτρους και τις εξισώσεις που περιγράφουν την παρατηρούμενη κυκλική κίνηση με την αντίστοιχη ευθύγραμμη κίνηση. Αν, αρχικά, το βάρος βρίσκεται κοντά στο πάτωμα και προσδώσουμε στον τροχό περιστροφική κίνηση, το βάρος ανέρχεται και ο τροχός επιβραδύνεται. Κατόπιν, προς στιγμήν η ταχύτητά του μηδενίζεται και στη συνέχεια η κυκλική κίνηση αλλάζει φορά. Τέλος, καθώς το βάρος πέφτει, ο τροχός επιταχύνεται. Οι περισσότεροι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι στις συγκεκριμένες συνθήκες η συμπεριφορά του τροχού είναι ταυτόσημη με εκείνη της μπάλας, όταν πετάμε την μπάλα κα-

τακόρνα προς τα πάνω. Παραμένουν λοιπόν σ' αυτή την κατάσταση μέχρι να τους κατευθύνουμε να αντιληφθούν τη σύνδεση.

Όπως επισημάναμε στα εδάφια 1.6-1.10, πολλοί μαθητές όταν αρχίζουν να παρακολουθούν μια σειρά εισαγωγικών μαθημάτων φυσικής συναντούν σοβαρές δυσκολίες που οφείλονται στο ότι δεν έχουν αφομοιώσει τον τρόπο εκτέλεσης αριθμητικών συλλογισμών με λόγους και διαιρέσεις. Όταν, λοιπόν, φτάνουν στην κυκλική κίνηση, δυσκολεύονται σημαντικά να αντιληφθούν τις απλές σχέσεις μεταξύ της γωνιακής ταχύτητας, της περιόδου περιστροφής και της συχνότητας περιστροφής. Αν δεν τους ζητήσουμε να εξηγήσουν με δικά τους λόγια τις αλγεβρικές σχέσεις, τις απομνημονεύουν απλώς, χωρίς να τις κατανοούν, και είναι ανίκανοι να τις χρησιμοποιήσουν σε μιαν ακολουθία συλλογισμών. Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αντικαθιστούν μηχανικά αριθμούς στους τύπους, ελπίζοντας να φτάσουν στην «απάντηση» που υπάρχει στο τέλος του βιβλίου. Επειδή δεν διαθέτουν άλλον τρόπο ελέγχου, όταν τελικά προσδιορίσουν την «απάντηση», θεωρούν ότι εξετέλεσαν το καθήκον τους, χωρίς να αντιλαμβάνονται ότι δεν έχουν κατανοήσει την ανάλυση. Για τους συγκεκριμένους μαθητές, η επαφή με τα απλά μεγέθη της κυκλικής κίνησης αποτελεί πολύτιμη ευκαιρία επανάληψης, σε ένα μεταλλαγμένο πλαίσιο· τους βοηθά, επίσης, να αποκτήσουν ευχέρεια στην εκτέλεση συλλογισμών με λόγους.

4.8 Πρωτογενείς αντιλήψεις για την κυκλική κίνηση

Πολλοί μαθητές, όταν αρχίζουν να μελετούν τη δυναμική της κυκλικής κίνησης, έχουν ήδη πολλές βαθιά ριζωμένες πρωτογενείς αντιλήψεις. Οι συγκεκριμένες αντιλήψεις έχουν αντισταθεί σθεναρά στην επίδραση οποιουδήποτε προηγούμενου μαθήματος θετικών επιστημών ή φυσικής όπου ενδεχομένως μελετήθηκαν τα σχετικά ζητήματα. Αντίληψη αυτού του είδους είναι η εξής: οι μαθητές πιστεύουν ότι ένα σώμα που αναγκάζεται να εκτελέσει καμπυλόγραμμη κίνηση παραμένει σε αυτή την κατάσταση, ακόμα κι όταν το αίτιο που το ανάγκαζε να κινηθεί καμπυλόγραμμα παύει να υφίσταται. Λόγου χάρι, δείξτε στους μαθητές τη συσκευή του Σχ. 4.8.1 (βλ. επόμενη σελίδα): μια σφαίρα τίθεται σε κυκλική κίνηση στην εσωτερική πλευρά μιας ανοιχτής στεφάνης που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι. Κατόπιν, ρωτήστε τους: τι συμβαίνει όταν η σφαίρα φτάσει στο άνοιγμα; Πολλοί μαθητές απαντούν: στο άνοιγμα η σφαίρα ακολουθεί καμπυλόγραμμη διαδρομή και συνεχίζει να κινείται κυκλικά στο υπόλοιπο τμήμα της στεφάνης. Όταν, λοιπόν, η επίδειξη εκτελεστεί και η σφαίρα εγκαταλείψει εφάπτομενικώς τη στεφάνη, χωρίς να συνεχίσει την κυκλική κίνησή της, ακούγονται επιφωνήματα έκπληξης.



Σχήμα 4.8.1 Μια σφαίρα κυλά στην εσωτερική πλευρά μιας ανοιχτής στεφάνης που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι.

Ο McCloskey και οι συνεργάτες του [McCloskey et al (1980)*· McCloskey (1983)] παραθέτουν παρόμοια αποτελέσματα από συνεντεύξεις με μαθητές στους οποίους ζητήθηκε να προβλέψουν τη διαδρομή που θα ακολουθήσει κατά την έξοδο της μια χάντρα, αν εκτοξευθεί μέσα σε έναν σπειροειδή γυάλινο σωλήνα που βρίσκεται τοποθετημένος πάνω σε κάποιο τραπέζι. Πολλοί μαθητές προβλέπουν ότι η χάντρα κατά την έξοδό της θα ακολουθήσει καμπύλη διαδρομή προς την ίδια φορά με την καμπυλότητα του σωλήνα· υπάρχει, δηλαδή, ισχυρή πεποίθηση ότι θα ακολουθήσει καμπύλη διαδρομή και μετά την άρση του περιορισμού.

Στο πλαίσιο ορισμένων τουλάχιστον από τις επόμενες επιδείξεις, υπάρχουν πολλά σημεία από τα οποία μπορούμε να αρχίσουμε να μελετάμε τη δυναμική της κυκλικής κίνησης ενός υλικού σημείου: (1) (αν είναι εφικτό) προωθούμε με τα χέρια έναν μεγάλο κύβο ξηρού πάγου σε κυκλική τροχιά πάνω σε μια γυάλινη πλάκα, όπως περιγράψαμε στην όγδοη παράγραφο του εδαφίου 3.10· (2) παρατηρούμε τι συμβαίνει κατά τη θραύση του νήματος που συγκρατεί ένα βαγονάκι το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση πάνω σε τραπέζι με στρώμα αέρα (ή του σχοινιού που συγκρατεί έναν κύβο πάγου ο οποίος εκτελεί κυκλική κίνηση πάνω σε γυάλινη πλάκα)· (3) εκτελούμε τα πειράματα με τον καμπύλο σωλήνα που χρησιμοποιεί ο McCloskey.

* Το άρθρο υπάρχει μεταφρασμένο στο περιοδικό «Επιθεώρηση Φυσικής», περίοδος Β, τόμος Ζ, τεύχος 20, σελ. 5, έκδοση της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών. (Σ.τ.μ.)

Πρέπει να ζητάμε από τους μαθητές να προβλέψουν τι θα συμβεί σε κάθε περίπτωση – και να δικαιολογήσουν την πρόβλεψή τους –, πριν εκτελεστεί η επίδειξη. Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι αποτελεσματικότερη από έναν εκ των προτέρων ισχυρισμό του καθηγητή για το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Μια δεύτερη βαθιά ριζωμένη πρωτογενής αντίληψη αφορά την ύπαρξη δύναμης κατά τη διεύθυνση της κίνησης: η ώθηση που προσδίδεται στο σώμα «παραμένει σ' αυτό και διατηρεί την κίνησή του». Λόγου χάρη, οι μαθητές θεωρούν ότι το νήμα τραβάει το βαρίδι ή το βαγονάκι κατά τη διεύθυνση της κίνησης². Είναι δυνατό να ορίσουμε τον «απολύτως αισιόδοξο» καθηγητή ως εκείνον που περιμένει ότι όλοι οι μαθητές του έχουν αποβάλει αυτήν την αντίληψη ύστερα από μια διαυγή παρουσίαση του Νόμου της Αδράνειας για την ευθύγραμμη κίνηση, ακολουθώντας τις οδηγίες του 3ου Κεφαλαίου. Δεν πρέπει, όμως, να μας εκπλήσσει το ότι η προσδοκία αυτή δεν πραγματοποιείται: το αποτέλεσμα, όπως συμβαίνει και με τις χημικές αντιδράσεις (!), ουδέποτε είναι 100%. Το πλαίσιο έχει μεταβληθεί από την ευθύγραμμη κίνηση στην κυκλική και μολονότι ορισμένοι μαθητές έχουν όντως αφομοιώσει τη νευτώνεια άποψη, υπάρχουν πολλοί που ακόμα δεν την υιοθετούν. Πρέπει να θεωρήσουμε το νέο πλαίσιο ως ευκαιρία για ανακύκλωση των ιδεών και να «στρατολογήσουμε» νέους πιστούς της νευτώνειας αντίληψης.

Μια τρίτη ευρέως επικρατούσα πρωτογενής αντίληψη που αφορά την κυκλική κίνηση είναι ότι το αντικείμενο «φεύγει προς τα έξω». Η εν λόγω αντίληψη οφείλεται κυρίως (εκτός από το ότι οι μαθητές ακούνε καθηγητές ελλιπώς προετοιμασμένους να αναφέρουν τον συγκεκριμένο ισχυρισμό, δίνοντας ελάχιστη προσοχή στη διδασκαλία του μαθήματος) στην αίσθηση όλων μας, όταν κινούμαστε σε καμπύλη τροχιά. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο είναι μεγάλο πλεονέκτημα αν έχουμε ήδη ανασκευάσει την αντίληψη αυτή κατά τη μελέτη της ευθύγραμμης κίνησης (βλ. εδάφιο 3.20). Από τη στιγμή που οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται πως όταν το αυτοκίνητο επι-

2. Πολλοί μαθητές, όταν στριφογυρίζουν ένα βαρίδι με κάποιο νήμα, πιστεύουν ότι σπρώχνουν το βαρίδι σε εφαπτομενική κατεύθυνση. Η εφαρμογή, αρχικά, κάποιας ροπής που επιταχύνει το βαρίδι και κατόπιν διατηρεί την κίνησή του, εξουδετερώνοντας την αντίσταση της τριβής, είναι όντως αρκετά πολύπλοκη διαδικασία. Συνεπώς, η προηγούμενη άποψη των μαθητών δεν πρέπει να μας εκπλήσσει. Δεν πρέπει να μεταβαίνουμε απότομα στην εξιδανικευμένη κατάσταση παράλειψης της ροπής, θεωρώντας την προφανές γεγονός. Η εντύπωση ότι το νήμα διατηρεί την κίνηση του βαριδιού, προωθώντας το εφαπτομενικά, αποτελεί πρόσθετο λόγο για την εκτέλεση πειραμάτων όπου ασκείται κάποια δύναμη με κατεύθυνση από το εξωτερικό προς το εσωτερικό της τροχιάς, όπως η επίδειξη με τη στεφάνη του Σχ. 4.7.1. Σε αυτή την περίπτωση, οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο από πριν να δικαιολογήσουν την ύπαρξη κάποιας εφαπτομενικής δύναμης.

ταχύνεται, οι επιβάτες δεν τινάζονται προς τα πίσω ή, όταν το αυτοκίνητο φρενάρει, οι επιβάτες δεν τινάζονται προς τα εμπρός, είναι καλύτερα προετοιμασμένοι να διακρίνουν τι συμβαίνει όταν κινούμαστε σε καμπύλη τροχιά. Είναι, επίσης, καλύτερα προετοιμασμένοι για να σχηματίσουν την έννοια της κεντρομόλου δύναμης.

4.9 Κεντρομόλος δύναμη συγγραμμικών δυνάμεων

Η έννοια της κεντρομόλου δύναμης και της σχέσης

$$F_z = \frac{mv^2}{R} \quad (4.9.1)$$

συνηθέστατα αναπτύσσεται σε σύνδεση με την εξής επίδειξη: ένα βαρίδι (ή ένα βαγονάκι χωρίς τριβές) δεμένο με ένα νήμα, κινείται σε οριζόντιο κύκλο. Πολλοί μαθητές, λοιπόν, κατά κανόνα συνδέουν τον όρο «κεντρομόλος δύναμη» με την έλξη του νήματος, ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν ή όχι άλλες επιδράσεις.

Αν και ίσως φαίνεται τετριμμένο στον καθηγητή, πολλοί μαθητές βοηθούνται αν δώσουμε έμφαση στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει νήμα. Λόγου χάρη, αυτό συμβαίνει όταν η σφαίρα κυλά γύρω γύρω στο εσωτερικό μιας στεφάνης (Σχ. 4.8.1) και όταν βρισκόμαστε μέσα σε αυτοκίνητο που κινείται σε καμπύλη τροχιά πάνω σε οριζόντιο δρόμο. Οι μαθητές πρέπει να συνειδητοποιήσουν σαφώς ότι η κεντρομόλος επίδραση μπορεί να προέρχεται από κάποια *ώθηση* προς το κέντρο και όχι απαραίτητα από έλξη.

Στο συγκεκριμένο στάδιο, η κίνηση του αυτοκινήτου σε στροφή χωρίς κλίση προς το εσωτερικό της είναι πολύτιμο πρόβλημα. Μας δίνεται η ευκαιρία να υπολογίσουμε μια κεντρομόλο δύναμη η οποία δεν ασκείται από νήμα: την κεντρομόλο δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο σώμα του επιβάτη και την κεντρομόλο δύναμη που προέρχεται από την τριβή που ασκεί το οδόστρωμα στο αυτοκίνητο. (Αν διακόψουμε τη μελέτη του προβλήματος σε τούτο το σημείο, προετοιμάζουμε το έδαφος για τη μελέτη της κίνησης σε στροφή με κλίση προς το εσωτερικό της. Ο χρόνος που μεσολαβεί βοηθά τους μαθητές να αφομοιώσουν τις ιδέες.)

Ένα βαθύτερο από φυσική άποψη ζήτημα, το οποίο σπανίως παρουσιάζεται με σαφήνεια στους μαθητές, είναι το εξής: στις προηγούμενες περιπτώσεις, επικαλούμαστε μια παθητική δύναμη (ασκούμενη από το νήμα, από τη στεφάνη, από το κάθισμα ή από το οδόστρωμα), η οποία προσαρμόζεται κατάλληλα κατά μέτρο σε δεδομένη ακτίνα και γωνιακή ταχύτητα. Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι παρόμοια με την περίπτωση της κάθετης δύναμης που ασκεί το τραπέζι σε ένα σώμα: η δύναμη αυτή προσαρμόζεται

κατάλληλα κατά μέτρο στο βάρος του σώματος. Είναι επίσης παρόμοια με την περίπτωση της δύναμης τριβής που ασκεί το πάτωμα στο σώμα (πριν αρχίσει η ολίσθηση): η δύναμη αυτή προσαρμόζεται στην εξωτερική ώθηση ή έλξη που ασκείται στο σώμα. Οι περισσότεροι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν — εκτός κι αν ο καθηγητής κατευθύνει τη σκέψη τους — ότι αν αυξήσουμε απεριορίστα την τιμή της δύναμης, κάποια στιγμή το νήμα σπάει, η στεφάνη λυγίζει, το αυτοκίνητο ντεραπάρει. Αν οι μαθητές κατορθώσουν να αντιληφθούν τη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών καταστάσεων, η μάθηση υποβοηθείται σε υψηλό βαθμό.

Πρέπει εν τέλει να αντιδιαστέλλουμε προσεκτικά τις καταστάσεις στις οποίες υπεισέρχονται παθητικές δυνάμεις από εκείνες στις οποίες υπεισέρχονται ενεργητικές, λόγου χάρη η βαρυτική ή ηλεκτροστατική έλξη. Στην τελευταία περίπτωση, μια αλλαγή στη γραμμική ταχύτητα δεν αντισταθμίζεται με κάποια αλλαγή στην παθητική δύναμη: πρέπει κατά συνέπεια να μεταβληθεί η ακτίνα. Πολλοί μαθητές δεν διεισδύουν στην κατανόηση του φυσικού περιεχομένου αυτών των αντίθετων περιπτώσεων, εκτός κι αν έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν τις διαφορές. Συχνά η μελέτη παραλείπεται, επειδή η ανάλυση της ενεργητικής δύναμης ακολουθεί αρκετό χρόνο μετά την πρώτη παρουσίαση της κυκλικής κίνησης και επειδή ο καθηγητής δεν εκμεταλλεύεται το πλεονέκτημα της ανακύκλωσης των ιδεών (δεν πρόκειται για λογοπαίγνιο!).

Επίσης, επειδή σχεδόν ποτέ δεν εξετάζουμε άλλες καταστάσεις, εκτός από εκείνη που περιγράφεται με την εξίσωση 4.9.1 — δηλαδή καταστάσεις όπου εμφανίζονται δυνάμεις μεγαλύτερες ή μικρότερες από εκείνη που υπεισέρχεται στην εξίσωση — οι μαθητές έχουν την εντύπωση ότι οποιαδήποτε δύναμη με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της κίνησης ονομάζεται «κεντρομόλος». Είναι δυνατό να αντιμετωπίσουμε τη λανθασμένη εντύπωση, ζητώντας από τους μαθητές να περιγράψουν το εξής: πώς θα συμπεριφερθεί το βαρίδι, αν η ακτίνα και η γραμμική ταχύτητα διατηρηθούν σταθερές, ενώ η δύναμη με κατεύθυνση προς το εσωτερικό λάβει μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή από την ποσότητα mv^2/R ; Δεν είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τις μαθηματικές συνέπειες αυτής της μεταβολής (πρόκειται, όντως, για δύσκολη προσπάθεια): είναι, απλώς, απαραίτητο οι μαθητές να αντιληφθούν ποιοτικά ότι το σωματίδιο θα αποκλίνει προς το εσωτερικό ή προς το εξωτερικό του διαγραφόμενου κύκλου. Αν κατευθύνουμε τους μαθητές να αντιληφθούν το ευρύτερο πλαίσιο (το τι δεν συμβαίνει ταυτόχρονα με το τι συμβαίνει), ο λειτουργικός ορισμός της «κεντρομόλου δύναμης» αρχίζει να λαμβάνει σταθερότερη μορφή: ο συγκεκριμένος όρος αναφέρεται απλώς στο μέτρο της δύναμης η οποία προσδίδει σε σωματίδιο μάζας m επιτάχυνση v^2/R και το συγκρατεί σε δεδομένη κυκλική τροχιά.

Σοβαρότερο πρόβλημα για το νόημα της «κεντρομόλου δύναμης» αναδύεται στην περίπτωση όπου δύο ή περισσότερες δυνάμεις δημιουργούν

την κεντρομόλο δύναμη. Λόγου χάρι, αυτό συμβαίνει όταν περιστρέφουμε σε κατακόρυφο κύκλο ένα βαρίδι, δεμένο στην άκρη ενός νήματος, ή όταν ένα βαγόνι εκτελεί ανακύκληση. Από την πρώτη στιγμή πρέπει να επισημάνουμε ότι ο όρος «κεντρομόλος δύναμη» αναφέρεται πάντοτε στη *συνισταμένη* δύναμη που προσδίδει επιτάχυνση v^2/R στο δεδομένο αντικείμενο. Οι μαθητές, όμως, δεν κατανοούν σαφώς το νόημα του όρου «συνισταμένη», εκτός κι αν αντιμετωπίσουν τη σύνθεση των δυνάμεων. Όταν το βαρίδι βρίσκεται στο ανώτατο ή στο κατώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, αρχικά, οι μαθητές θεωρούν ως κεντρομόλο δύναμη απλώς την έλξη του νήματος. Δεν αντιλαμβάνονται ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο όρος αναφέρεται στο αλγεβρικό άθροισμα της έλξης του νήματος και του βάρους του βαριδιού. Παρόμοια δυσκολία εμφανίζεται στην περίπτωση της ανακύκλησης.

Η παρανόηση του τεχνικού όρου «κεντρομόλος δύναμη» εμποδίζει, επίσης, την κατανόηση της διαδικασίας που υπεισέρχεται στο συγκεκριμένο φαινόμενο. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι η ενεργητική δύναμη (το βάρος του βαριδιού ή του βαγονιού), που συνεισφέρει στην κεντρομόλο δύναμη, παραμένει αμετάβλητη, ενώ η τιμή της παθητικής δύναμης (της έλξης του νήματος ή της ώθησης της σιδηροτροχιάς) προσαρμόζεται ακριβώς στην τιμή που είναι απαραίτητη, ώστε το αλγεβρικό άθροισμα των δύο δυνάμεων να προσδίδει την απαιτούμενη κεντρομόλο επιτάχυνση.

Πολλοί μαθητές λύνουν το πρόβλημα της ανακύκλησης (υπάρχει στο τέλος του αντίστοιχου κεφαλαίου σχεδόν σε κάθε εγχειρίδιο): Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη γραμμική ταχύτητα, ώστε το βαρίδι ή το βαγόνι να διέλθουν από την κορυφή του κύκλου; (Η: από ποιο ύψος πρέπει να ξεκινήσει το βαγόνι;) Δεν κατανοούν, ωστόσο, το ρόλο των δύο συνιστωσών δυνάμεων και το πλήρες νόημα του όρου «κεντρομόλος δύναμη».

Η αδυναμία των συμβατικών προβλημάτων είναι ότι περιορίζονται στη συνθήκη για την εκτέλεση της ανακύκλησης. Δεν κατευθύνουν το μαθητή να εξετάσει τι συμβαίνει γενικά. Λόγου χάρι: Πόσο είναι το μέτρο της τάσης του νήματος στην κορυφή του κύκλου, αν η γραμμική ταχύτητα του βαριδιού είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή; Πώς μεταβάλλεται η τάση, αν η γραμμική ταχύτητα ελαττωθεί; Σε ποιες συνθήκες η τάση μηδενίζεται; Τι συμβαίνει αν η γραμμική ταχύτητα μειωθεί ακόμη περισσότερο; Αν θέλουμε να καλλιεργήσουμε την αντίληψη των μαθητών, πρέπει να αναλύσουμε και να ερμηνεύσουμε όλη την ακολουθία των προηγούμενων ζητημάτων.

Ο αποτελεσματικότερος τρόπος για να το καταφέρουμε, είναι να κατευθύνουμε τους μαθητές να διατυπώσουν την εξίσωση της τάσης του νήματος στην κορυφή του κύκλου:

$$T = \frac{mv^2}{R} - mg \quad (4.9.2)$$

και να εξετάσουν πώς μεταβάλλεται το T , όταν το v μειώνεται από κάποια μεγάλη αρχική τιμή. Έτσι μελετούν τόσο την κρίσιμη συνθήκη όσο και την ανάγκη ερμηνείας του προσήμου του T στην κρίσιμη τιμή του v . Πρόκειται για πολύτιμη άσκηση ερμηνείας ενός μαθηματικού αποτελέσματος. Μπορούμε, επίσης, να πραγματοποιήσουμε παρόμοια ανάλυση για τη μεταβολή του T στη βάση του κύκλου, την οποία θα αντιδιαστείλουμε με τη μεταβολή του στην κορυφή.

Στη διάρκεια της μελέτης, πρέπει να επισημάνουμε ότι το T δεν είναι η κεντρομόλος δύναμη: στην κορυφή του κύκλου η κεντρομόλος δύναμη ισούται με $T+mg$ και στη βάση του με $T-mg$. Με τη συγκεκριμένη παρατήρηση, η εντύπωση ότι η T είναι πάντοτε η κεντρομόλος δύναμη αρχίζει να εξασθενεί.

Στο παρόν στάδιο, αν και ίσως φαίνεται ότι η εξέταση της κάθετης δύναμης που ασκεί η σιδηροτροχιά στο βαγόνι είναι τετριμμένη επανάληψη, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Το περιεχόμενο του προβλήματος έχει αλλάξει σημαντικά. Εξαιτίας της αλλαγής αυτής, η ανάλυση της μεταβολής της κάθετης δύναμης που ασκεί η σιδηροτροχιά στο βαγόνι στην κορυφή και στη βάση της ανακύκλησης, αποτελεί πλέον κατάλληλη ερώτηση για τεστ. Οι μαθητές που έχουν αφομοιώσει τις απαραίτητες γνώσεις νιώθουν ευχαρίστηση όταν αναλύουν με επιτυχία το πρόβλημα. Αλλά και όσοι δυσκολεύονται, έχουν μια επιπλέον πολύτιμη ευκαιρία μελέτης των εννοιών. Υπάρχει, επίσης, σύνδεση μεταξύ της εν λόγω κατάστασης και της περίπτωσης του ασανσέρ που περιγράψαμε στην 9η ερώτηση του Παραρτήματος του 3ου Κεφαλαίου: η αίσθηση την οποία έχει ο επιβάτης του βαγονιού που εκτελεί ανακύκληση είναι παρόμοια με εκείνη του επιβάτη του ασανσέρ, όταν αυτό επιταχύνεται προς τα πάνω.

Άλλη χρήσιμη παραλλαγή είναι η περίπτωση όπου ένα αυτοκίνητο περνά από την κορυφή ενός λόφου, αν θεωρήσουμε ότι το περίγραμμα της κορυφής είναι τμήμα κύκλου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η μελέτη δεν αφορά το εσωτερικό της «τροχιάς» (όπως στην ανακύκληση), αλλά το εξωτερικό της. Η κατάσταση αυτή είναι επίσης ελάχιστα διαφορετική από τις προηγούμενες. Αποτελεί, λοιπόν, ευαίσθητο δείκτη κατανόησης των σχετικών ζητημάτων. Συνδέεται, επίσης, με την αίσθηση που έχουν νιώσει πολλοί μαθητές: όταν περνούν με ταχύτητα την κορυφή ενός λόφου, νομίζουν ότι θα «απογειωθούν». Αν συνδέσουμε όλες τις περιπτώσεις μεταξύ τους, στο πλαίσιο μιας εργασίας για το σπίτι, οι μαθητές έχουν μοναδική ευκαιρία να κατανοήσουν το θέμα.

Σχετικά ελάχιστοι μαθητές έχουν αφομοιώσει τα διαγράμματα των δυνάμεων, όταν για πρώτη φορά τους παρουσιάζουμε την κυκλική κίνηση. Ενδείκνυται, λοιπόν, να χρησιμοποιούμε όλα τα διαθέσιμα προβλήματα με δυνάμεις που εμφανίζονται στην κυκλική κίνηση, ως ευκαιρία για ανακύκληση και ενίσχυση της κατανόησης της έννοιας της δύναμης. Πρέπει, συ-

νεπώς, να ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάζουν, τόσο στα τεστ όσο και στα προβλήματα «για το σπίτι», το διάγραμμα των δυνάμεων, να περιγράφουν με λόγια τις δυνάμεις και να προσδιορίζουν τα ζεύγη του 3ου Νόμου (όπως συστήσαμε στο εδάφιο 3.12). Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα θα περιλαμβάνει τόσο το σωματίδιο όσο και το νήμα και οτιδήποτε άλλο βρίσκεται στο άλλο άκρο του νήματος. Είναι δυνατό να περιλαμβάνει, επίσης, τη σιδηροτροχιά και το βαγόνι της ανακύκλησης ή το σώμα του επιβάτη και το αυτοκίνητο, όταν το τελευταίο κινείται σε στροφή χωρίς κλίση προς το εσωτερικό της.

4.10 Κεντρομόλος δύναμη μη συγγραμμικών δυνάμεων

Στα επόμενα παραδείγματα, είναι απολύτως απαραίτητο οι μαθητές να σχεδιάσουν το διάγραμμα των δυνάμεων για *κάθε* αλληλεπιδρών σώμα, με τον τρόπο που περιγράψαμε στο εδάφιο 3.12.

1. *Στροφή δρόμου με κλίση προς το εσωτερικό της.* Συνήθως το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο μ' εκείνο του βαγονιού που εκτελεί ανακύκληση: εξετάζεται μόνον η οριακή περίπτωση. Πολλοί μαθητές, λοιπόν, δεν κατορθώνουν να κατανοήσουν το φυσικό περιεχόμενο. Στο παρόν στάδιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αρχίσουμε με τη μελέτη της κίνησης του αυτοκινήτου σε στροφή δρόμου χωρίς κλίση προς το εσωτερικό της και κατόπιν να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου της κυκλικής κίνησης, το ρόλο της τριβής και το αίτιο του ντεραπαρίσματος. Γι' αυτό το λόγο στο προηγούμενο εδάφιο ασχοληθήκαμε εκτενώς μ' αυτήν την περίπτωση.

Αφού οι μαθητές κατανοήσουν την περίπτωση της στροφής δρόμου χωρίς κλίση, μπορούμε να τους κατευθύνουμε να αναζητήσουν τι συμβαίνει καθώς η κλίση του δρόμου αυξάνεται. Ωστόσο, αρχικά πρέπει να τους κατευθύνουμε να προσδιορίσουν ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Προηγουμένως έχουμε αντιμετωπίσει (με επιτυχία) όλα τα προβλήματα των κεκλιμένων επιπέδων, με τη βοήθεια καρτεσιανών συντεταγμένων παραλλήλως και κάθετως στο επίπεδο. Στους μαθητές, λοιπόν, έχει αυτομάτως αναπτυχθεί η εντύπωση ότι πάντοτε επιλέγουμε παρόμοιο προσανατολισμό των αξόνων. Πρέπει, ωστόσο, να τους κατευθύνουμε να αντιληφθούν ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι καλύτερα να ορίσουμε τον έναν άξονα στην κατεύθυνση της απαιτούμενης κεντρομόλου δύναμης (δηλαδή οριζοντίως). Αλλιώς, οδηγούμαστε σε μεγάλη σύγχυση.

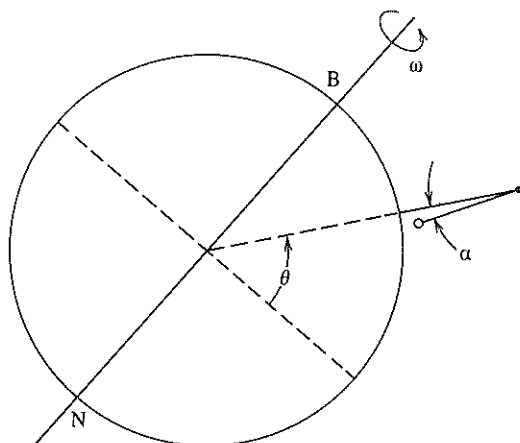
Αφού ορίσουμε το κατάλληλο σύστημα αξόνων, πρέπει να κατευθύνουμε τους μαθητές να αντιληφθούν *ποιοτικά* το εξής: καθώς αυξάνεται η κλίση του δρόμου, αυξάνεται επίσης η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το οδόστρωμα στο αυτοκίνητο· ταυτόχρονα το μέγεθος της απαιτούμενης τριβής ελαττώνεται. Προσδιορίζουμε, έτσι, την ευνοϊκότερη περίπτω-

ση για την κίνηση του αυτοκινήτου και λύνουμε το αντίστοιχο πρόβλημα. Δεν πρέπει, ωστόσο, να σταματήσουμε την εξέταση στο σημείο αυτό· πρέπει να προσδιορίσουμε τι συμβαίνει όταν ξεπεράσουμε την κρίσιμη γωνία. Οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν σαφώς ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, η απαίτηση για την κατεύθυνση της δύναμης της τριβής έχει μεταβληθεί: η συγκεκριμένη δύναμη ασκείται πλέον προς τα έξω και όχι προς τα μέσα.

2. *Ο περιστρεφόμενος κύλινδρος του λούνα παρκ όπου μπορούμε να σταθούμε κολημένοι στο τοίχωμά του, χωρίς να πατάμε στο δάπεδο.* Το συγκεκριμένο πρόβλημα προσφέρεται ως μοναδική ευκαιρία ανακύκλησης των ιδεών και σύνδεσης με το παράδειγμα του κουτιού που το πιέζουμε με οριζόντια δύναμη πάνω σε κατακόρυφο τοίχο, χωρίς να ολισθαίνει. Στο παρόν στάδιο πρέπει να αντιπαραθέσουμε τις δύο περιπτώσεις και να εξετάσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους από την άποψη του φυσικού περιεχομένου τους. Η περίπτωση της κυκλικής κίνησης πρέπει να εξεταστεί πλήρως· πρέπει να διατυπώσουμε τις κατάλληλες εξισώσεις, να φανταστούμε το αποτέλεσμα της συνεχούς μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας (αρχίζοντας από μεγάλες ή μικρές τιμές), να «διαβούμε» το κρίσιμο σημείο και να συνεχίσουμε προς τις υπόλοιπες τιμές. Στη συγκεκριμένη άσκηση οι μαθητές είναι απαραίτητο να εκτελέσουν συλλογισμούς μάλλον με ανισότητες παρά με ισότητες. Η άσκηση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για μαθητές που πρόκειται να συνεχίσουν σε ανώτερο επίπεδο, επειδή σπανίως οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκτελέσουν αυτό το είδος συλλογισμών.

3. *Η κατεύθυνση του g (η κατακόρυφος ενός τόπου) πάνω στη σφαιρική (δηλαδή στερεή) αλλά περιστρεφόμενη Γη.* (Αν και δεν πρόκειται για ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα, οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρή δυσκολία. Αυτή η διαπίστωση ισχύει ακόμα και για τους καλούς σπουδαστές που παρακολουθούν ένα μάθημα φυσικής όπου χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός. Δαπανάται, λοιπόν, σημαντική ποσότητα χρόνου. Η πρακτική που ακολουθώ είναι η εξής: σε τάξεις με μέτριους μαθητές, παρουσιάζω το πρόβλημα ως ευκαιρία για να ανεβάσει το βαθμό του όποιος μαθητής το επιθυμεί· σε τάξεις με καλούς μαθητές που πρόκειται να προχωρήσουν, αναθέτω κανονικά τη λύση του και τη συζητώ μαζί τους.)

Αρχικά, μπορούμε να εξετάσουμε απολύτως ποιοτικά το συγκεκριμένο εξαιρετικά εξιδανικευμένο πρόβλημα, οπότε από εννοιολογική άποψη το όφελος είναι μεγάλο. Αργότερα, είναι δυνατό να το μελετήσουμε περισσότερο ποσοτικά, χωρίς, ωστόσο, αυτό να είναι απολύτως απαραίτητο. Η προσωπική μου εμπειρία μου υπαγορεύει ότι ο αποτελεσματικότερος τρόπος είναι να σχεδιάσουμε την περιστρεφόμενη Γη και να φανταστούμε ότι ένα μολυβένιο βαρίδι κρέμεται από κάποιο νήμα (Σχ. 4.10.1, βλ. επόμενη σελίδα). Αρχικά, πρέπει να κατευθύνουμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι σε διαφορετικά πλάτη το κέντρο της κυκλικής κίνησης βρίσκεται στην τομή του επιπέδου του παράλληλου κύκλου και του άξονα περιστροφής και ότι



Σχήμα 4.10.1 Ένα μολυβένιο βαρίδι αιωρείται πάνω από μια περιστρεφόμενη υδρόγειο.

δεν συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας. Επειδή οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά το πρόβλημα της περιστρεφόμενης σφαίρας, στο παρόν στάδιο δεν είναι ακόμα εξοικειωμένοι μ' αυτήν την απλή περίπτωση. Ωστόσο, η συγκεκριμένη μελέτη είναι χρήσιμη: τους προετοιμάζει για τις πιο σύνθετες περιπτώσεις που θα αντιμετωπίσουν μελλοντικά.

Κατόπιν, πρέπει να κατευθύνουμε τους μαθητές να σχεδιάσουν το διάγραμμα των δυνάμεων που ασκούνται στο βαρίδι: πρέπει να αντιληφθούν ότι η βαρυτική δύναμη έχει σταθερό μέτρο και κατευθύνεται προς το κέντρο της σφαίρας· πρέπει να διακρίνουν ότι η παθητική δύναμη που ασκεί το νήμα είναι απαραίτητο να προσαρμόζεται κατά μέτρο και διεύθυνση, έτσι ώστε η συνισταμένη των δύο δυνάμεων να είναι η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη η οποία κατευθύνεται καθέτως στον άξονα περιστροφής. Θεωρούμε, ωστόσο, ότι η δύναμη που ασκείται από το νήμα είναι ίση και αντίθετη προς το βάρος του βαριδιού «στον συγκεκριμένο τόπο» και η κατεύθυνσή της προσδιορίζει την κατακόρυφο του τόπου. Είναι, λοιπόν, προφανές ότι το g κατευθύνεται προς το κέντρο της Γης μόνο στον ισημερινό και στους πόλους, ενώ στα υπόλοιπα πλάτη υπάρχει η απόκλιση που φαίνεται στο Σχ. 4.10.1. Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος, οι μαθητές είναι δυνατό να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται πώς η Γη, όταν ακόμα ο φλοιός της δεν είχε στερεοποιηθεί, έλαβε το πεπλατυσμένο σχήμα της. Μπορούν, επίσης, να φανταστούν τι θα συνέβαινε αν η γωνιακή ταχύτητά της αυξανόταν ή μειωνόταν.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η εισαγωγή του νήματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη επινόηση. Είναι πολύ ευκολότερο να μελετήσουμε αυτήν την περίπτωση παρά να προσπαθήσουμε να φανταστούμε τι συμβαίνει με ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα.

Από τη στιγμή που θα σχεδιάσουμε το διανυσματικό διάγραμμα, έχου-

με αμέσως στη διάθεσή μας την ποσοτική λύση του προβλήματος. Αν δεν λάβουμε υπόψη μας τους μικρούς όρους, το αποτέλεσμα είναι:

$$\alpha \approx \left(\frac{R\omega^2}{g} \right) \eta \mu 2\theta \quad (4.10.1)$$

όπου α είναι η γωνία της απόκλισης της κατακορύφου του τόπου από την ακτινική κατεύθυνση· R είναι η ακτίνα της Γης και ω η γωνιακή ταχύτητα της· θ είναι το γεωγραφικό πλάτος του τόπου. Είναι προφανές ότι η απόκλιση είναι μέγιστη σε πλάτος 45° . (Η συγκεκριμένη μέγιστη απόκλιση ισούται με έξι πρώτα λεπτά της μοίρας.)

4.11 Συστήματα αναφοράς και φανταστικές δυνάμεις

Οι μαθητές αρχίζουν να παρακολουθούν τις παραδόσεις της φυσικής, χρησιμοποιώντας το λεξιλόγιο που έχουν καλλιεργήσει συστηματικά παρακολουθώντας άλλα μαθήματα θετικών επιστημών και διαβάζοντας εκλαϊκευμένα βιβλία με σχετικό περιεχόμενο. Οι καθηγητές, λοιπόν, δυσκολεύονται να ανακαλύψουν τρόπους να παρουσιάσουν την έννοια της «φανταστικής δύναμης». Η χρήση του συγκεκριμένου λεξιλογίου ενισχύεται από την άμεση εντύπωση του μαθητή όταν αισθάνεται να «φεύγει προς τα έξω», καθώς κινείται σε καμπύλη τροχιά. Προσωπικά θεωρώ ότι, με το πέρασμα του χρόνου, το ζήτημα έχει αποσαφηνιστεί και ότι σε πολλά εγχειρίδια η διαπραγματεύσή του είναι επιτυχής. Μια ιδιαίτερα ικανοποιητική παρουσίαση υπάρχει στην ταινία του PSSC «Συστήματα αναφοράς». Την ταινία έχουν δημιουργήσει οι Hume και Ivey του Πανεπιστημίου του Τορόντο. (Από παλιά, έχω την άποψη ότι μπορούμε δικαιολογημένα να υποστηρίξουμε πως η συγκεκριμένη ταινία είναι η καλύτερη ταινία διδασκαλίας της φυσικής που κατασκευάστηκε ποτέ. Η φυσική που παρουσιάζεται σ' αυτή είναι άριστη. Η ταινία, αν και είναι μαυροάσπρη, δεν έχει ξεπεραστεί, και το χιούμορ της διατηρείται ακόμα και αν τη δούμε πολλές φορές.) Αρχικά ορίζεται η έννοια της «φανταστικής δύναμης» και κατόπιν κατατάσσεται η «φυγόκεντρος δύναμη» στην κατηγορία αυτή.

Για να αποφύγουμε τις περιπλοκές με τις λεπτομέρειες των φανταστικών δυνάμεων, η καλύτερη (απολύτως θεμιτή) προσέγγιση είναι να μη δεχτούμε την ύπαρξη φυγόκεντρου δύναμης στο πλαίσιο κάποιου αδρανειακού συστήματος αναφοράς, όπου εφαρμόζονται οι Νόμοι του Νεύτωνα, και να μην τη χρησιμοποιήσουμε. Όπως επισημάναμε τόσο στο 3ο Κεφάλαιο όσο και στα προηγούμενα εδάφια του παρόντος Κεφαλαίου, είναι δυνατό να υποστηρίξουμε ότι δεν υπάρχει κάποια δύναμη που ωθεί προς τα έξω ένα σώμα το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση· είναι, απλώς, απαραίτητη μια

συνισταμένη δύναμη με κατεύθυνση προς τα μέσα, για να προσδώσει στο σώμα κεντρομόλο επιτάχυνση.

Ωστόσο, για τους μαθητές που θα προχωρήσουν σε ανώτερο επίπεδο, είναι απαραίτητο να αναπτύξουμε την ιδέα της φανταστικής δύναμης. Και τούτο, επειδή θα συναντήσουν απαραίτητα μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ιδιαίτερα το σύστημα που συνδέεται με την περιστρεφόμενη Γη, λόγω χάρη στη μετεωρολογία, την ωκεανογραφία και τη γεωφυσική. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σημαντική φανταστική δύναμη είναι μάλλον η δύναμη Coriolis παρά η φυγόκεντρος· ωστόσο, είναι συνετό να αρχίσουμε από την απλούστερη έννοια.

Ορισμένα εγχειρίδια και καθηγητές δέχονται τον όρο «φυγόκεντρος δύναμη» και τον εφαρμόζουν στη δύναμη που ασκεί το βαρίδι στο νήμα ή στη δύναμη που ασκεί το νήμα στο στήριγμα στο οποίο είναι δεμένο. Ο συγκεκριμένος τρόπος μελέτης είναι ο πλέον ατυχής· πρέπει, λοιπόν, να τον αποφεύγουμε. Η ιδέα που συνοδεύει τον όρο «φυγόκεντρος δύναμη», η οποία, ωστόσο, δεν διατυπώνεται σαφώς στα εγχειρίδια, είναι η εξής: η συγκεκριμένη δύναμη ασκείται στο σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση και όχι από το σώμα αυτό σε κάποιο άλλο. Η πρωτογενής αντίληψη του μαθητή είναι ότι εμφανίζεται μια δύναμη που ωθεί το σώμα προς τα έξω και όχι ότι το σώμα ασκεί κάποια δύναμη στο περιβάλλον του. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα δικαιολογείται *μόνον* ως φανταστική δύναμη ως προς το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Δεν υπάρχει λόγος, λοιπόν, να επιβαρύνουμε τους μαθητές με κάποια απατηλή εκδοχή, την οποία πρέπει να τροποποιήσουν όταν προχωρήσουν σε ανώτερο επίπεδο.

4.12 Στροφή γύρω από το κέντρο μάζας: το πρόβλημα των δύο σωμάτων

Τις περισσότερες φορές — ιδιαίτερα σε μαθήματα όπου δεν χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός — η μελέτη της κυκλικής κίνησης περιορίζεται στην περίπτωση της κίνησης γύρω από ιδιαίτερα σταθερό κέντρο. Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι κατάλληλη για πολύ στοιχειώδεις φυσικές καταστάσεις, παρόμοιες με εκείνες που εξετάσαμε στα προηγούμενα εδάφια. Ωστόσο, επειδή συχνά αναφερόμαστε στην κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη και των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, οι μαθητές μένουν με την εντύπωση ότι οι εν λόγω κινήσεις ταυτίζονται με την προηγούμενη. Επίσης, οποιαδήποτε αναφορά της σεληνιακής και της ηλιακής παλίρροιας είναι ελλιπής αν δεν συνοδεύεται από τη μελέτη του προβλήματος των δύο σωμάτων.

Ουδέποτε με ρώτησε μαθητής γιατί θεωρούμε ότι η Γη στρέφεται γύρω από τον Ήλιο, αφού μπορούμε εξίσου να θεωρήσουμε τη βαρυτική αλληλεπίδραση ως την κεντρομόλο δύναμη που αναγκάζει τον Ήλιο να στρέφεται γύρω από τη Γη. Στο συγκεκριμένο ζήτημα, υπάρχουν πολλά «κρυμμένα»

στοιχεία· αν τα αναδείξουμε, βοηθάμε τους μαθητές να κατανοήσουν το φυσικό περιεχόμενο της κυκλικής κίνησης και να σκεφτούν με φαινομενολογικό τρόπο. Ωστόσο, επειδή το ερώτημα δεν προκύπτει αυτομάτως, πρέπει να το εκμαιεύσουμε.

Η απάντηση δεν είναι απαραίτητο να δοθεί μέσω πλήρους δυναμικής ανάλυσης η οποία θα περιλαμβάνει και το σχηματισμό της έννοιας της ανηγμένης (reduced) μάζας. Η εν λόγω μελέτη είναι αναγκαία, στο πλαίσιο ενός συνηθισμένου μαθήματος φυσικής όπου χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός. Μπορούμε, ωστόσο, να διαπραγματευτούμε απολύτως ποιοτικά το ζήτημα με μαθητές μη προετοιμασμένους για την αναλυτική προσέγγιση.

Λόγου χάρη, με μαθητές γενικής κατεύθυνσης και με δασκάλους δημοτικής εκπαίδευσης έχω χρησιμοποιήσει την επόμενη προσέγγιση: Στα πρώτα μαθήματα [Arons, 1977] θέτω την ερώτηση: Γιατί θεωρούμε ότι η Γη και οι πλανήτες στρέφονται γύρω από τον Ήλιο και όχι το αντίστροφο; Κατόπιν, για μερικές εβδομάδες απαντάμε βαθμιαία στην ερώτηση. Έχοντας αναπτύξει την κινηματική, τους Νόμους του Νεύτωνα, τις έννοιες της γήινης βαρύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης και δύναμης, μαθαίνουμε για την υπόθεση του Νεύτωνα, ότι δηλαδή η βαρύτητα περιλαμβάνει όλες τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ουράνιων σωμάτων. Είναι, επίσης, η απαραίτητη κεντρική δύναμη για τις παρατηρούμενες κινήσεις. Παραμένει απλώς το ερώτημα ποιο σώμα γυρίζει γύρω από ποιο.

Μερικές μέρες μετά τη διατύπωση του συγκεκριμένου ερωτήματος (και αφού το έχω αφήσει να «σιγοβράζει» στη σκέψη των μαθητών), τοποθετώ στο τραπέζι, πάνω στο οποίο υπάρχει στρώμα αέρα, δύο ταυτόσημα βαγονάκια συνδεδεμένα μεταξύ τους με νήμα. Κατόπιν απευθύνομαι στην τάξη, λέγοντας ότι πρόκειται να ωθήσω τα βαγονάκια, για να τα θέσω σε κυκλική κίνηση, με όσο το δυνατόν μικρότερη μεταφορική κίνηση. Ζητώ, λοιπόν, από τους μαθητές να προβλέψουν το κέντρο της κυκλικής κίνησης. Την πρώτη φορά που πραγματοποιήσα την επίδειξη, περίμενα ότι θα υπήρχε μεγάλο εύρος απαντήσεων, ιδιαίτερα επειδή άφησα να εννοηθεί ότι θα κρατούσα το ένα βαγονάκι και θα έσπρωχνα το άλλο. Έμεινα έκπληκτος όταν διαπίστωσα ότι ολόκληρη «χορωδία» μαθητών ισχυριζόταν ότι το κέντρο της κυκλικής κίνησης θα είναι το μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο βαγονιών. (Η διαίσθησή μας για την ύπαρξη αυτής της συμμετρίας έχει προφανώς βαθιές ρίζες: όλοι έχουμε αυτή τη διαίσθηση, ακόμα κι αν δεν έχουμε κάποια προηγούμενη εμπειρία με τα συγκεκριμένα φαινόμενα.)

Αφού προσδιορίσω τη συμπεριφορά των δύο ταυτόσημων βαγονιών, τοποθετώ κάποιο βάρος σε ένα απ' αυτά. Κατόπιν, ζητώ πάλι από τους μαθητές να προσδιορίσουν το κέντρο της κυκλικής κίνησης. Η «χορωδία» τοποθετεί το κέντρο πλησιέστερα προς το βαρύτερο βαγονάκι. Αν ζητήσω να μου πουν τι θα συμβεί αν αυξήσω επιπλέον τη μάζα και γίνει πολύ μεγαλύ-

τερη από τη μάζα του άλλου βαγονιού, προκύπτει, σαφώς, η απάντηση ότι το κέντρο θα μετακινηθεί πολύ κοντά στο βαρύ βαγόνι. Σχεδόν πάντοτε κάποιος μαθητής αναφωνεί, συνήθως με φωνή γεμάτη έκπληξη που συνοδεύει μια ανακάλυψη: «Το ίδιο πρέπει να συμβαίνει με τον Ήλιο και τη Γη!» Βρισκόμαστε, πλέον, στον σωστό δρόμο. Απομένει μόνο να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ των μαζών.

Αν ο καθηγητής έχει στη διάθεσή του λίγο περισσότερο χρόνο και η τάξη του είναι σχετικά προχωρημένη, μπορεί να διατυπώσει και να ερμηνεύσει την εξίσωση:

$$mr\omega^2 = MR\omega^2 \quad (4.12.1)$$

για την περίπτωση των δύο σωμάτων και να αναδείξει το ρόλο του κέντρου μάζας του συστήματος. Αν και η συγκεκριμένη μελέτη είναι χρήσιμη, δεν είναι ουσιαστική σε πρώτο στάδιο προσέγγισης.

Ωστόσο, αν αποπειραθούμε να μελετήσουμε προσεκτικά, και όχι απλώς περιγραφικά, την παλίρροια που προκαλεί η Σελήνη είναι ουσιαστικές να παρουσιάσουμε τη σημασία της στροφής τόσο της Γης όσο και της Σελήνης γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος. Αν η Γη παρέμενε ακίνητη και η Σελήνη στρεφόταν γύρω της, θα υπήρχε μόνο μία σεληνιακή παλίρροια την ημέρα (όχι δύο) και το ύψος της θα ήταν καταστροφικό. Το ότι υπάρχουν ημερησίως δύο παλίρροιες και ότι το ύψος τους δεν είναι τόσο μεγάλο είναι αποτέλεσμα του ότι η Γη πέφτει ελεύθερα προς το κέντρο μάζας γύρω από το οποίο εκτελείται η περιστροφή.

Για να καταλήξουμε στο προηγούμενο συμπέρασμα, μπορούμε να επεκτείνουμε τις ιδέες που αναπτύξαμε στα ιδεατά πειράματα της ελεύθερης πτώσης του ασανσέρ (βλ. 9η ερώτηση του Παραρτήματος του 3ου Κεφαλαίου). Πρόκειται για μια επιπλέον ευκαιρία ανακύκλωσης των ιδεών.

Υποθέστε ότι το ύψος του ασανσέρ είναι πολύ μεγάλο· τόσο μεγάλο, ώστε μπορούμε πλέον να διακρίνουμε τη μεταβολή της βαρυτικής δύναμης, η οποία θα είναι μικρότερη στην κορυφή του ασανσέρ και μεγαλύτερη στη βάση του. Στη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης, ολόκληρο το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα κάτω. Η κίνησή του περιγράφεται από την κίνηση του κέντρου βάρους. Ας συμβολίσουμε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου βάρους με $g_{\kappa.β.}$. (Το ίδιο το ασανσέρ επιμηκύνεται επειδή η βαρυτική δύναμη στη βάση του είναι μεγαλύτερη από τη βαρυτική δύναμη στην κορυφή του.) Αν αφήσουμε μια σφαίρα κοντά στο κέντρο βάρους θα «παραμείνει» εκεί όπου την αφήσαμε. Ωστόσο, αν την αφήσουμε στην κορυφή του ασανσέρ, θα «πέσει προς τα πάνω» ως προς το ασανσέρ, με επιτάχυνση $g_{\kappa.β.} - g_{\chi}$ όπου g_{χ} είναι η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης ως προς τη Γη στην κορυφή του ασανσέρ. Αν αφήσουμε τη σφαίρα κοντά στη βάση του ασανσέρ, θα επιτα-

χυνθεί «προς τα κάτω» σε σχέση μ' αυτό, με επιτάχυνση $g_{\beta} - g_{\alpha,\beta}$. Είναι δυνατό να παρατηρήσουμε την επιτάχυνση προς τα πάνω και προς τα κάτω, επειδή τα βαρυτικά φαινόμενα του ασανσέρ είναι αμελητέα.

Αν το ασανσέρ δημιουργούσε ισχυρό βαρυτικό πεδίο γύρω από το κέντρο του, η αντίστοιχη βαρυτική δύναμη θα υπερνικούσε τις επιδράσεις που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Συνεπώς, η σφαίρα θα έπεφτε προς το κέντρο του ασανσέρ είτε την αφήναμε στην κορυφή είτε στη βάση.

Η περίπτωση της Γης στο σύστημα Γης-Σελήνης είναι σε κάποιο βαθμό ανάλογη μ' εκείνη της ελεύθερης πτώσης του ασανσέρ: η Γη εκτελεί ελεύθερη πτώση προς το κέντρο μάζας του συστήματος· η επιτάχυνση ολόκληρης της Γης είναι η επιτάχυνση του κέντρου βάρους της· επειδή η Γη βρίσκεται υπό την επίδραση του μη ομαλού βαρυτικού πεδίου της Σελήνης, υφίσταται συμπίεση. Ως προς τη Γη, λοιπόν, απομένει μια (φανταστική) δύναμη. Η δύναμη αυτή, σε σημεία πάνω στη Γη που βρίσκονται στην άλλη πλευρά από εκείνη που βρίσκεται η Σελήνη, έχει κατεύθυνση *αντίθετη* από την κατεύθυνση της Σελήνης. Σε σημεία, όμως, που βρίσκονται απέναντι από τη Σελήνη η εν λόγω δύναμη έχει κατεύθυνση *προς* τη Σελήνη. Η συγκεκριμένη «διάκριση» έχει αποτέλεσμα τη δημιουργία παλίρροιας δύο φορές την ημέρα.

Σε τούτο το σημείο, επειδή η αναλογία με το ασανσέρ αρχίζει να κλονίζεται, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Η πίεση την οποία προκαλούν οι σεληνιακές δυνάμεις που απομένουν έχει αποτέλεσμα τη δημιουργία παλίρροιας στην ξηρά. Το φαινόμενο, αν και είναι πολύ ασθενές, είναι δυνατό να καταμετρηθεί. Το ενδιαφέρον μας, ωστόσο, εντοπίζεται στην παλίρροια των ωκεανών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σφαιρικότητα της Γης αποβαίνει κρίσιμος παράγοντας. Αναλύουμε τις σεληνιακές δυνάμεις, που απομένουν, στις ακτινικές και εφαπτομενικές συνιστώσες τους ως προς τη Γη. Η ακτινική συνιστώσα εξουδετερώνεται πλήρως από τη γήινη βαρύτητα και η επίδρασή της είναι αμελητέα (όπως στην περίπτωση του ασανσέρ που πέφτει ελεύθερα και ταυτόχρονα προκαλεί ισχυρό βαρυτικό πεδίο γύρω από το κέντρο του). Μόνον η εφαπτομενική συνιστώσα είναι ικανή να μετακινήσει τα νερά των ωκεανών. Αυτό διαρκεί μέχρις ότου η βαθμίδα της υδροστατικής πίεσης η οποία οφείλεται στην κλίση της επιφάνειας, ισορροπήσει τη δράση της εφαπτομενικής συνιστώσας της παραμένουσας σεληνιακής βαρύτητας και προς τις δύο πλευρές της Γης.

Από τη μελέτη της παλίρροιας, που δημιουργεί η Σελήνη δύο φορές την ημέρα, όπως παρουσιάζεται σε πολλά εγχειρίδια, τείνει να δημιουργηθεί στους μαθητές η εξής εντύπωση: η παραμένουσα δύναμη ακριβώς «κάτω» από τη Σελήνη (με κατεύθυνση προς τη Σελήνη) και η παραμένουσα φανταστική δύναμη (με ακτινική κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση της Σελήνης) είναι εκείνες οι δυνάμεις που «συσσωρεύουν» το νερό και δημιουργούν παλίρροια δύο φορές την ημέρα. Η συγκεκριμένη εντύπωση είναι

απολύτως λανθασμένη, όπως δείξαμε προηγουμένως: η εφαπτομενική δύναμη προκαλεί τα παρατηρούμενα φαινόμενα.

Ο Lamb (1932) παρουσίασε μια αρκετά επιτυχημένη εναλλακτική άποψη για την παλίνρροια που δημιουργεί η Σελήνη δύο φορές την ημέρα. Απέδειξε ότι αν υπήρχαν δύο ταυτόσημες Σελήνες, από τις οποίες καθεμιά θα είχε τη μισή μάζα από εκείνη της πραγματικής Σελήνης, και οι οποίες θα περιστρέφονταν σε εκ διαμέτρου αντίθετες θέσεις, η Γη δε θα εκτελούσε ελεύθερη πτώση, αλλά θα παρέμενε σταθερή. Ωστόσο, η παλίνρροια θα εκδηλωνόταν, όπως ακριβώς συμβαίνει στην πραγματικότητα. [Λεπτομερέστερη ανάλυση υπάρχει στα άρθρα των Tsantes (1974), Arons (1979) και Lamb (1932), καθώς και στις βιβλιογραφικές αναφορές των εν λόγω άρθρων.]

Τελευταία παρατήρηση: Το πρόβλημα των δύο σωμάτων εμφανίζεται πάλι, σε περίοπτη θέση, στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας για το άτομο του υδρογόνου. Για να προκύψει συμφωνία μεταξύ της θεωρητικής και της πειραματικής τιμής της σταθεράς του Rydberg, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ανηγμένη μάζα του συστήματος ηλεκτρονίου-πρωτονίου και όχι απλώς τη μάζα του ηλεκτρονίου. Στη δεύτερη προσέγγιση, υπονοούμε ότι το πρωτόνιο παραμένει ακίνητο, ενώ στην πρώτη λαμβάνουμε υπόψη μας τη δυναμική ως προς το κέντρο μάζας.

Ενδιαφέρουσα εμβάθυνση στο φυσικό περιεχόμενο των προηγούμενων ζητημάτων προκύπτει αν μελετήσουμε τη διαφορά μεταξύ του συστήματος Γης-Σελήνης και ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Αν η Γη ήταν ακίνητη, η περίοδος περιστροφής της Σελήνης θα δινόταν από τον 3ο Νόμο του Kepler:

$$T_1^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_r} \right) H^3 \quad (4.12.2)$$

ενώ η περίοδος στροφής γύρω από το κοινό κέντρο μάζας προκύπτει από τον τύπο:

$$T_2^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(M_r + M_s)} \right] H^3 \quad (4.12.3)$$

όπου H είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων της Γης και της Σελήνης. Έτσι, η πραγματική αστρική περίοδος του συστήματος είναι λίγο μικρότερη από εκείνη που θα ήταν αν η Γη παρέμενε ακίνητη. Η εξίσωση 4.12.3 δεν περιέχει όλη την έκφραση της ανηγμένης μάζας: ένα τμήμα της απαλείφεται, επειδή οι μάζες περιέχονται και στο Νόμο της Βαρυντικής Δύναμης. Ωστόσο, στο σύστημα ηλεκτρονίου-πρωτονίου ο νόμος που περιγράφει τη

δύναμη (Νόμος του Coulomb) δεν περιέχει τις μάζες. Στην αντίστοιχη εξίσωση, λοιπόν, εμφανίζεται *όλη* η ανηγμένη μάζα.

Πολλοί μαθητές, όταν αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του ατόμου του υδρογόνου, έχοντας πλήρη άγνοια των φαινομένων που συνδέονται με «το πρόβλημα των δύο σωμάτων», περιπίπτουν σε σύγχυση και εκπλήσσονται. Βοηθάμε, λοιπόν, σημαντικά τους μαθητές που θα συνεχίσουν σε ανώτερο επίπεδο, αν στη διάρκεια του εισαγωγικού μαθήματος εκθέσουμε τουλάχιστον ποιοτικά τη φυσική του προβλήματος των δύο σωμάτων.

4.13 Ροπή

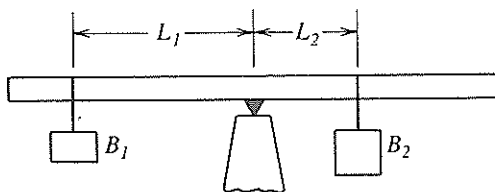
Αν οι μαθητές αφομοιώσουν την προηγούμενη εννοιολογική δομή, η έννοια της «ροπής» προκύπτει ως απλή επέκταση, που χρειάζεται συγκριτικά μικρότερη προσπάθεια και λιγότερη προσοχή. Ωστόσο, για πολλούς μαθητές αυτό δεν συμβαίνει. Ακόμη αγωνίζονται να συλλάβουν τις περισσότερες νέες έννοιες, τους αναλυτικούς τύπους και τη σύνδεσή τους με τα φαινόμενα. Σε πολλές περιπτώσεις, επίσης, οι καθηγητές παρουσιάζουν την έκφραση της ροπής πολύ γρήγορα, χωρίς να υπάρχει σοβαρό ερέθισμα και σύνδεση με την εμπειρία. Η αποτελεσματικότητα της παρουσίασης αυξάνεται, ωστόσο, αν ακολουθήσουμε τον κανόνα: «πρώτα η ιδέα και μετά η ονομασία της».

Εκτός από την επίκληση της κιναισθητικής εμπειρίας των μαθητών, την οποία έχουν αποκτήσει προσδίδοντας επιτάχυνση σε περιστρεφόμενα σώματα, με τη βοήθεια στροφάλων και μοχλοβραχιόνων διαφόρων μηκών, συχνά βοηθά αν επικαλεστούμε την προηγούμενη εμπειρία τους από την παρατήρηση σωμάτων που ισορροπούν (λόγου χάρι της τραμπάλας). Μαθήματα για τον τρόπο ζύγισης είναι απολύτως συνηθισμένα και διάσπαρτα στις θετικές επιστήμες που διδάσκονται στο σχολείο. Επικαλούμενοι, λοιπόν, συγκεκριμένη εμπειρία, βοηθάμε να αμβλυνθεί το συναίσθημα φόβου και ανασφάλειας των μαθητών που συνοδεύει τις νέες αφηρημένες διατυπώσεις.

Αν έχει ήδη εκτεθεί στους μαθητές ο ζυγός με βραχίονες (παρόμοιος με τον τύπο που φαίνεται στο Σχ. 4.13.1 της επόμενης σελίδας), είναι πιθανό οι μαθητές να έχουν μελετήσει τη συνθήκη ισορροπίας του ζυγού με τη βοήθεια των λόγων:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{L_2}{L_1} \quad \eta \quad \frac{L_1}{B_2} = \frac{L_2}{B_1} \quad (4.13.1)$$

(Ενδεχομένως να μην έχουν διατυπώσει αλγεβρικά τις συγκεκριμένες εκφράσεις· ωστόσο, η σκέψη τους ακολουθεί αυτό το δρόμο, ιδιαίτερα, όταν



Σχήμα 4.13.1

οι λόγοι παίρνουν ακέραιες τιμές.)

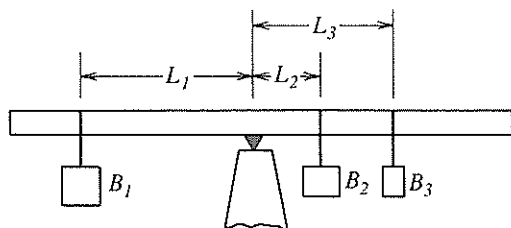
Είναι, λοιπόν, δυνατό να χρησιμοποιήσουμε το υπόβαθρο αυτό ως εξής: Αρχικά κατασκευάζουμε τη διάταξη του Σχ. 4.13.1· κατόπιν, εκμαιεύουμε από τους μαθητές μια περιγραφή της συνθήκης ισορροπίας του ζυγού και τις δύο αλγεβρικές εκφράσεις 4.13.1. Στη συνέχεια, επισημαίνουμε ότι η συνθήκη με τους λόγους «αναμειγνύει» τις δυνάμεις με τους μοχλοβραχίονες. Οι δείκτες 1 και 2 εμφανίζονται, ωστόσο, και στις δύο πλευρές της εξίσωσης. Ρωτάμε, λοιπόν, αν είναι δυνατό να επαναδιατυπώσουμε τη συνθήκη ισορροπίας, έτσι ώστε ο δείκτης 1 να εμφανίζεται στη μια πλευρά της εξίσωσης και ο δείκτης 2 στην άλλη. Τέλος, εκμαιεύουμε την εξίσωση:

$$B_1 L_1 = B_2 L_2 \quad (4.13.2)$$

Επισημαίνουμε, λοιπόν, ότι η εξίσωση 4.13.2 εκφράζει τη συνθήκη ισορροπίας του ζυγού: στο αριστερό μέλος περιέχονται στοιχεία του αριστερού τμήματος του ζυγού και στο δεξιό μέλος στοιχεία του δεξιού τμήματος. Συνεπώς, θεωρούμε (ή ερμηνεύουμε) ότι καθεμιά από τις ποσότητες $B_1 L_1$ και $B_2 L_2$ χαρακτηρίζει αντίστοιχα κάθε πλευρά του ζυγού. Ειδικότερα, ερμηνεύουμε την ποσότητα BL ως μέτρο της «τάσης για στροφή» κάθε πλευράς. Η συγκεκριμένη ερμηνεία ενισχύεται αν δείξουμε ότι: ο ζυγός δεν ισορροπεί και στρέφεται προς τα αριστερά, αν η ποσότητα $B_1 L_1$ γίνει μεγαλύτερη από την $B_2 L_2$ (αν η φορά της ανισότητας αντιστραφεί, ο ζυγός πάλι δεν ισορροπεί και στρέφεται προς τα δεξιά). Είναι, όντως, σημαντικό να μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία ο ζυγός δεν ισορροπεί· αλλιώς οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν τι συμβαίνει παράλληλα με το τι δεν συμβαίνει.

Στη συνέχεια, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε τη διάταξη του Σχ. 4.13.2 τοποθετώντας δύο βάρη από τη μια πλευρά του υπομοχλίου και ένα βάρος από την άλλη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μπορούμε να κατευθύνουμε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η συνθήκη ισορροπίας του ζυγού δεν περιγράφεται πλέον με τις εξισώσεις 4.13.1· ωστόσο, η εξίσωση 4.13.2 ισχύει. Η συνθήκη ισορροπίας λαμβάνει τη μορφή:

$$B_1 L_1 = B_2 L_2 + B_3 L_3 \quad (4.13.3)$$



Σχήμα 4.13.2

Στην πραγματικότητα, λοιπόν, «η τάση για στροφή», όπως ορίζεται μέσω του γινομένου BL , είναι απλή προσθετική ιδιότητα! Στο παρόν στάδιο, λοιπόν, είναι δυνατό να εισαγάγουμε τον όρο «μοχλοβραχίονας της ασκούμενης δύναμης».

Αφού προσδιορίσουμε τη σημασία και τη χρησιμότητα του γινομένου BL , εξετάζουμε λίγες περιπτώσεις όπου κάποια άλλη δύναμη, εκτός από ένα κρεμασμένο βάρος, ασκεί ώθηση ή έλξη στο βραχίονα του ζυγού (λόγου χάρι, τραβώντας με το χέρι το νήμα). Επισημαίνουμε, λοιπόν, ότι, αρχικά, μελετήσαμε μια πολύ ειδική περίπτωση, στην οποία η ασκούμενη δύναμη ήταν κάθετη στο μοχλοβραχίονα. Πώς είναι δυνατό να υπολογίσουμε την «τάση για στροφή», στην περίπτωση όπου η δύναμη δεν είναι κάθετη στο μοχλοβραχίονα;

Μας δίνεται, λοιπόν, η ευκαιρία να επανέλθουμε στη μελέτη της έννοιας των συνιστωσών της δύναμης, σε νέο πλαίσιο. Αναλύουμε την ασκούμενη δύναμη σε δύο συνιστώσες, μία κατά μήκος του μοχλοβραχίονα και μία κάθετα σ' αυτόν, και εξετάζουμε το αποτέλεσμα καθεμιάς. Επειδή η συνιστώσα που έχει κατεύθυνση κατά μήκος του μοχλοβραχίονα διέρχεται από το κέντρο περιστροφής, έχει μηδενικό αποτέλεσμα. Η τάση περιστροφής προσδιορίζεται από το μέτρο της συνιστώσας που είναι κάθετη στο μοχλοβραχίονα κτλ. Μας δίνεται, επίσης, μοναδική ευκαιρία να ξαναθυμηθούμε ότι τα διανύσματα δεν είναι «αγκυροβολημένα» σε κάποιο σημείο, αλλά μπορούμε να φανταστούμε ότι ολισθαίνουν κατά μήκος της ευθείας της δράσης τους. Είναι, επίσης, πολύ σημαντικό να παρουσιάσουμε τον εναλλακτικό υπολογισμό της τάσης περιστροφής: υπολογίζουμε τον «ενεργό» μοχλοβραχίονα για την ασκούμενη δύναμη, χωρίς να την αναλύουμε σε συνιστώσες.

Αρχικά, πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στην εκτέλεση των εν λόγω υπολογισμών. Δεν κατανοούν σαφώς τα στοιχεία της γεωμετρίας που υπεισέρχονται στο θέμα, ιδιαιτέρως όταν είναι απαραίτητο να συμπληρώσουμε το αρχικό διάγραμμα. Είναι, λοιπόν, απαραίτητη η περισσότερη εξάσκηση από εκείνη που προσφέρουν τα προβλήματα στο τέλος των αντίστοιχων κεφαλαίων. Η εξάσκηση πρέπει να περιλαμβάνει μεγάλη ποικιλία διαγραμμάτων και σε κάθε περίπτωση τον προσδιορισμό των γωνιών. (Όταν το διάγραμμα είναι σχεδιασμένο σε ένα φύλλο χαρτί, μπορούμε να

το στρέφουμε προς διαφορετικές κατευθύνσεις.) Τα προβλήματα είναι δυνατό να περιλαμβάνουν μοχλοβραχίονες μηδενικού μήκους, αλλά και μοχλοβραχίονες οι οποίοι δεν εμφανίζονται σαφώς στο σχήμα και πρέπει να τους φανταστούμε. Επίσης, πρέπει να περιλαμβάνουν αφ' ενός προβλήματα όπου ζητείται απλώς ο τελικός τύπος, αφ' ετέρου προβλήματα όπου είναι απαραίτητος ο αριθμητικός υπολογισμός. Πρόκειται, επίσης, για μια περίπτωση όπου η εξάσκηση είναι δυνατό να υποβοηθηθεί μέσω καλοσχεδιασμένων προγραμμάτων υπολογιστή· ωστόσο, έως τη στιγμή που γράφονται αυτές οι γραμμές δεν διατίθεται καλής ποιότητας υλικό αυτού του είδους.

Αφού αποτυπωθεί στη σκέψη των μαθητών η έννοια της «τάσης για περιστροφή» (με τη βοήθεια όσων προαναφέραμε), μπορούμε πλέον να εισαγάγουμε τον όρο «ροπή». Μια τόσο συγκεκριμένη και σχετικά οικονομική παρουσίαση προετοιμάζει το έδαφος για να μελετήσουμε τη ροπή ως διάνυσμα που προκύπτει από εξωτερικό γινόμενο, και ως το αίτιο μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας. Η αφηρημένη ανάπτυξη των εν λόγω εννοιών, η οποία θα ακολουθήσει στο μέλλον, γίνεται περισσότερο καταληπτή από πολλούς μαθητές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4Α

Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ

Παρατήρηση: Οι επόμενες ποιοτικές ερωτήσεις περιλαμβάνουν τη σχεδίαση διαγραμμάτων δύναμης. Διευκρινίζουν, λοιπόν, το είδος της σπειροειδούς επανάληψης που είναι χρήσιμη σε πολλούς μαθητές. Στις ερωτήσεις γίνεται ανασκόπηση των ιδεών που αναπτύχθηκαν στο 3ο Κεφάλαιο και εκείνες οι ιδέες συνδέονται με τις ιδέες του παρόντος Κεφαλαίου. Πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν ακόμα δυσκολίες, ανεξάρτητα από το αν προηγουμένως έχουν ασχοληθεί με παρόμοιες ασκήσεις. Η εξάσκηση, λοιπόν, τους βοηθά. Είναι, επίσης, απαραίτητο να υπάρξουν ερωτήσεις οι οποίες να συνδέονται με την εμπειρία που έχουν ήδη αποκτήσει ή πρόκειται να αποκτήσουν οι μαθητές. Λόγου χάρι, μπορούμε να συμπεριλάβουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ μόνιμων μαγνητών, ιδιαίτερα αν οι μαγνήτες χρησιμοποιηθούν αργότερα για να δείξουμε την αλληλεπίδραση από απόσταση μεταξύ δύο βαγονιών που κινούνται πάνω σε στρώμα αέρα.

1. Ένας άνθρωπος κάθεται πάνω σε κάποιο κουτί στην πλατφόρμα όπου βρίσκονται τα αλογάκια του λούνα παρκ. Κρατάει ένα βαρίδι, κρεμασμένο από κάποιο σπάγκο, και η πλατφόρμα με τα αλογάκια περιστρέφεται. Σχεδιάστε ξεχωριστά διαγράμματα των δυνάμεων που ασκούνται στο βαρίδι, στο νήμα, στον άνθρωπο, στο κουτί και στην πλατφόρμα. Σχεδιάστε με ισομήκη διανύσματα τις δυνάμεις που έχουν ίσα μέτρα μεταξύ τους, τις μεγαλύτερες δυνάμεις με διανύσματα μεγαλύτερου μήκους κτλ. Περιγράψτε με λόγια κάθε δύναμη και προσδιορίστε τα ζεύγη του 3ου Νόμου.

2. Ένας άνθρωπος στέκεται στο χεῖλος της περιστρεφόμενης πλατφόρμας με τα αλογάκια και γέρνει το σώμα του, για να αισθάνεται πιο άνετα και να ισορροπεί κατά τη διάρκεια της περιστροφής. Από ένα κάγκελο κοντά στον άνθρωπο αιωρείται ένα εκκρεμές (ένα βαρίδι με νήμα). Στις συγκεκριμένες συνθήκες, παρατηρούμε ότι το σώμα του ανθρώπου έχει παράλληλη κατεύθυνση μ' εκείνη του νήματος. Σχεδιάστε τα διαγράμματα των δυνάμεων που ασκούνται στο βαρίδι, στο νήμα, στο κάγκελο, στον άνθρωπο και στην πλατφόρμα. Εξηγήστε γιατί ο άνθρωπος αισθάνεται πιο άνετα στην κατάσταση που περιγράψαμε. Περιγράψτε τη σύνδεση μεταξύ της πε-

ρίπτωσης αυτής και εκείνης του αυτοκινήτου που κινείται σε στροφή δρόμου με κλίση προς το εσωτερικό της. Μέσα στο αυτοκίνητο κάθεται ένας άνθρωπος και από την οροφή του αυτοκινήτου αιωρείται ένα εκκρεμές.

5. ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

5.1 Εισαγωγή

Όταν για πρώτη φορά οι μαθητές μελετούν τις έννοιες «ορμή» και «ενέργεια», αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες. Και τούτο, επειδή πρέπει: (1) να ορίσουν το σύστημα που εξετάζουν· (2) να διακρίνουν σαφώς τα ανοιχτά από τα κλειστά συστήματα· (3) να αφομοιώσουν την πληθώρα των νέων τεχνικών όρων που εμφανίζονται και να τους συνδέσουν με αλγεβρικές σχέσεις και υπολογισμούς (πολλοί όροι, αν και προέρχονται από την καθημερινή ομιλία, έχουν παραλλαγμένο νόημα)· (4) να αφομοιώσουν τις σχέσεις μεταξύ των τεχνικών όρων και να τις χρησιμοποιήσουν για να περιγράψουν και να αναλύσουν οικεία καθημερινά φαινόμενα.

Οι δυσκολίες ελαττώνονται σημαντικά, αν οι μαθητές, φτάνοντας σε αυτό το επίπεδο, έχουν ήδη εξασκηθεί: (1) στη διατύπωση λειτουργικών ορισμών με δικά τους λόγια· (2) στη μετάφραση συμβόλων σε λέξεις και λέξεων σε σύμβολα· (3) στην περιγραφή οικείων φαινομένων με τη βοήθεια τεχνικής ορολογίας η οποία έχει αναπτυχθεί προηγουμένως.

Αν έχουμε καλύψει την ύλη της κινηματικής αρκετά γρήγορα, χωρίς οι μαθητές να προλάβουν να εξασκηθούν με τον τρόπο που προαναφέραμε, οι δυσκολίες που εμφανίζονται στο παρόν στάδιο περιπλέκουν ακόμη περισσότερο την κατάσταση· πολλοί μαθητές, λοιπόν, εγκαταλείπουν την προσπάθεια. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να έχουν πλήρως αφομοιώσει την προηγούμενη ύλη: η έκθεση της ύλης πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να είναι έτοιμοι να κατανοήσουν τις νέες αφηρημένες έννοιες, χρησιμοποιώντας διαδικασίες με τις οποίες εξοικειώθηκαν σε προηγούμενο πιο συγκεκριμένο πλαίσιο. Στο νέο πλουσιότερο πλαίσιο, αφομοιώνουν καλύτερα, μέσω της ανακύκλησης των ιδεών, τις έννοιες τις οποίες προηγουμένως δεν είχαν πλήρως αφομοιώσει.

Οι μαθητές δυσκολεύονται σοβαρά να κατανοήσουν την έννοια της ενέργειας και ιδιαίτερα την έννοια του έργου, και πάλι εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο πολλά εγχειρίδια εισάγουν τις αντίστοιχες ιδέες. Αρχικά, η έννοια του «έργου» και το Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας αναπτύσσονται για την πολύ ειδική περίπτωση των σημειακών μαζών ή των σωματιδίων. Στην περίπτωση αυτή, η μετατόπιση της συνολικής εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του αντικειμένου πά-

νω στο οποίο δρα η δύναμη. Κατόπιν, οι σχέσεις που προκύπτουν επεκτείνονται, ορισμένες φορές λανθασμένα, σε συστήματα (περιστρεφόμενα ή μεταβαλλόμενου σχήματος) με εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Στα συστήματα αυτά η μετατόπιση των εξωτερικών δυνάμεων δεν ισούται με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας. Εμφανίζεται, λοιπόν, τεράστια σύγχυση στην ορολογία. Πολλές συνήθειες διατυπώσεις είναι ουσιαστικά λανθασμένες· έτσι, αρκετοί από τους καλύτερους μαθητές αισθάνονται δυσάρεστα και αντιλαμβάνονται ότι κάτι «δεν πάει καλά». Διστάζουν, ωστόσο, να ασχοληθούν με το ζήτημα, επειδή φοβούνται ότι θα θεωρηθούν ανόητοι. Οι πιο αδύνατοι απομνημονεύουν απλώς το θέμα, χωρίς να το κατανοούν. Πρέπει, λοιπόν, να δείξουμε μεγαλύτερη προσοχή στα εγχειρίδια, στις παραδόσεις και στην εργασία για το σπίτι. (Μελετάμε το συγκεκριμένο ζήτημα στα εδάφια 5.6-5.14.)

5.2 Ανάπτυξη του λεξιλογίου

Επειδή με τα χρόνια οι καθηγητές και οι συγγραφείς των εγχειριδίων εξοικειώνονται με τις έννοιες, σιγά σιγά παύουν να αντιλαμβάνονται πόση σύγχυση επιφέρει σε πολλούς μαθητές το πλήθος των νέων τεχνικών όρων. Η σύγχυση επαυξάνεται από το ότι νέο νόημα αποδίδεται σε φαινομενικά συνήθεις λέξεις, λόγου χάρη στην «ορμή», την «ενέργεια», το «έργο» και την «ώθηση». Εκτός από τους μεμονωμένους όρους, υπάρχουν, επίσης, τυποποιημένες εκφράσεις, λόγου χάρη η «ώθηση που προσφέρεται (ή το έργο που εκτελείται) από τη δύναμη $\mathbf{F}$ », «η ώθηση που προσφέρεται (ή το έργο που εκτελείται) από τη *συνισταμένη* δύναμη $\mathbf{F}_{\text{ολ}}$ », «η *μεταβολή* της ορμής ενός σώματος A », «η *μεταβολή* της κινηματικής ενέργειας ενός σώματος B », «το έργο που καταναλώνει η δύναμη F » και «η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος Σ ».

Επίσης, στην ευθύγραμμη κίνηση, το αλγεβρικό πρόσημο που συνδέεται με τη μεταβολή της ορμής ενός σώματος έχει απολύτως διαφορετικό νόημα από το αλγεβρικό πρόσημο που εμφανίζεται σε σύνδεση με την κινητική ενέργεια του σώματος.

Σε κύκλους μαθημάτων όπου χρησιμοποιείται άλγεβρα ή απειροστικός λογισμός, οι μαθητές δεν εξασκούνται στη σωστή χρήση της ορολογίας με το να διαβάζουν απλώς τις περιγραφές των εγχειριδίων, να ακούνε τον καθηγητή να εφαρμόζει την ορολογία σε λίγες ενδεικτικές περιπτώσεις ή να λύνουν τα προβλήματα που υπάρχουν στο τέλος του αντίστοιχου κεφαλαίου. Η κατανόηση του νοήματος των όρων και των φράσεων και η ικανότητα να τα χρησιμοποιούν σε φυσικά φαινόμενα δεν αναπτύσσεται μ' αυτόν τον τρόπο. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να έχουν την ευκαιρία, σε ορισμένες απλές φυσικές καταστάσεις, να *συνδυάσουν* τις αριθμητικές τιμές, που

προσδιορίζουν, με το νόημα των αντίστοιχων όρων. Επίσης, ενώ είναι απαραίτητο να απομνημονεύσουν ορισμένα στοιχεία της ορολογίας, δεν αντιλαμβάνονται αυτήν την αναγκαιότητα εκτός κι αν τους το υποδείξουμε και εξεταστούν σ' αυτό.

Στο παράρτημα του παρόντος Κεφαλαίου παρατίθενται λίγα ενδεικτικά προβλήματα που βοηθούν στην ανάπτυξη της εν λόγω ικανότητας. Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι μεμονωμένα τμήματα των προβλημάτων υπάρχουν στα περισσότερα εγχειρίδια. Ωστόσο, η αδυναμία των εγχειριδίων βρίσκεται στο ότι τα τμήματα παρουσιάζονται ασύνδετα μεταξύ τους: σπάνια, επίσης, εντάσσονται σε μια ολοκληρωμένη ακολουθία όπου το λεξιλόγιο χρησιμοποιείται σε πλουσιότερο και ευρύτερο πλαίσιο. Ο καθηγητής που ουδέποτε έδωσε σε τεστ ένα απλό πρόβλημα με διαδοχικά βήματα (παρόμοιο μ' εκείνα του παραρτήματος), την πρώτη φορά που θα το κάνει, θα εκπλαγεί από τον ελάχιστο βαθμό ανταπόκρισης της τάξης του. Ακόμα και σε κύκλους μαθημάτων όπου χρησιμοποιούμε απειροστικό λογισμό ή μεταξύ επιμελών μαθητών, η ανταπόκριση είναι πολύ μικρή.

Η αφομοίωση της σύνδεσης των όρων και των φράσεων από τη μια πλευρά και των αριθμητικών υπολογισμών από την άλλη αρχίζει να πραγματοποιείται μόνον ύστερα από πολλές ασκήσεις για το σπίτι και τεστ παρόμοια μ' εκείνα του παραρτήματος.

5.3 Περιγραφή φαινομένων της καθημερινής ζωής

Εκτός από την αποκατάσταση της σύνδεσης μεταξύ των αριθμητικών υπολογισμών και των όρων και φράσεων, που μελετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, βοηθάμε τους μαθητές να αφομοιώσουν τη σημασία της ενέργειας και της ορμής αν τους καθοδηγήσουμε να περιγράψουν απολύτως ποιοτικά και με τη βοήθεια του νέου λεξιλογίου συνήθη φαινόμενα.

Στα επόμενα παραδείγματα, τα οποία ουσιαστικά περιορίζονται σε ευθύγραμμες κινήσεις, εξετάζονται συνήθεις εμπειρίες:

Ρίχνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα και την πιάνουμε όταν επιστρέφει (ή την αφήνουμε να χτυπήσει στο έδαφος).

Ρίχνουμε οριζοντίως μια μπάλα και την πιάνει κάποιος άλλος.

Ρίχνουμε οριζοντίως μια μπάλα και εκείνη αναπηδά στον τοίχο.

Ρίχνουμε οριζοντίως ένα σβόλο στόκου· ο σβόλος κολλάει στον τοίχο.

Πηδάμε κατακόρυφα προς τα πάνω και προσγειωνόμαστε στο έδαφος.

Πηδάμε πάνω-κάτω, πάνω σε ένα τραμπολίνο.

Σκαρφαλώνουμε σε ένα σχοινί.

Περπατάμε και τρέχουμε (περιλαμβάνεται η εκκίνηση, η στάση και η κίνηση με σταθερή ταχύτητα).

Στεκόμαστε πάνω σε ένα πατίνι κοντά σε κάποιον τοίχο. Σπρώχνουμε τον τοίχο και κινούμαστε αντίθετα μέχρι να σταματήσουμε.

Βρισκόμαστε πάνω σε ένα πατίνι και πλησιάζουμε κάποιον τοίχο· για να προφυλαχτούμε από τη σύγκρουση φρενάρουμε, λυγίζοντας το ένα χέρι μας.

Αρχικά, επιταχύνουμε ένα αυτοκίνητο· κατόπιν, διατηρούμε σταθερή την ταχύτητά του και, τέλος, το επιβραδύνουμε μέχρι να σταματήσει.

Σπρώχνουμε ένα κιβώτιο πάνω στο πάτωμα όπου υπάρχουν τριβές (το κιβώτιο επιταχύνεται, κινείται με σταθερή ταχύτητα, επιβραδύνεται και σταματά). Στη μελέτη πρέπει να περιλάβουμε τη μεταβολή της ενέργειας και της ορμής τόσο του σώματός μας όσο και του κιβωτίου.

Κωπηλατούμε μέσα σε μια βάρκα ή κινούμαστε με τη βοήθεια μηχανής και προπέλας.

Μέσα στο διαστημικό κενό, ένα διαστημόπλοιο επιταχύνεται ή επιβραδύνεται με τη βοήθεια της ώθησης των πυραύλων του.

Τεντώνουμε (οριζοντίως) ένα ελατήριο του οποίου το ένα άκρο του είναι στερεωμένο στον τοίχο.

Καθόμαστε πάνω σε μια μαλακή καρέκλα.

Σε ελατήριο που είναι στερεωμένο στο ταβάνι κρεμάμε ένα αντικείμενο.

Πρέπει να κατευθύνουμε τους μαθητές να περιγράψουν τη μεταβολή της ενέργειας και της ορμής κάθε αλληλεπιδρώντος σώματος, συμπεριλαμβανομένης της Γης. Είναι, επίσης, απαραίτητο να επισημάνουμε ότι ορισμένες δυνάμεις που παίζουν σημαντικό ρόλο σ' αυτά τα φαινόμενα δεν παράγουν έργο· πρέπει, λοιπόν, να είμαστε πολύ προσεκτικοί στην περιγραφή των μετατροπών της ενέργειας (βλ. τα εδάφια που αρχίζουν από το 5.6).

Αρχικά, σχεδόν όλοι οι μαθητές περιγράφουν ελλιπώς τις προηγούμενες περιπτώσεις. Αυτό συμβαίνει και μεταξύ προικισμένων μαθητών. Η κατάσταση βελτιώνεται αν οι μαθητές εξασκηθούν στην περιγραφή των καταστάσεων, και αν, παράλληλα, ελέγχουμε και διορθώνουμε τις λανθασμένες περιγραφές. Καθώς βελτιώνουν τη διατύπωσή τους, κατανοούν καλύτερα τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων. Όπως συμβαίνει στις υπόλοιπες πε-

ριπτώσεις που μελετήσαμε, η εξάσκηση είναι απαραίτητο να επαναλαμβάνεται και όχι να περιορίζεται σε συγκεκριμένο χρόνο. Οποιαδήποτε προσπάθεια γρήγορης θεραπείας είναι αναποτελεσματική, ειδικότερα για τους λιγότερο προικισμένους μαθητές: ουδέποτε η αφομοίωση επιτυγχάνεται από την πρώτη στιγμή.

Ευτυχώς, είναι δυνατό να επανερχόμαστε στις ιδέες που προαναφέραμε σε συνεχώς πλουσιότερο πλαίσιο. Αρκεί να μην ξεχνάμε ότι πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τις ευκαιρίες που μας δίνονται για να περιγράψουν οι μαθητές προφορικά τα σχετικά ζητήματα, τα οποία εμφανίζονται σε σύνδεση με τα φαινόμενα που συναντάμε στη συνέχεια. Λόγου χάρη, με φαινόμενα που εμφανίζονται στην κυκλική κίνηση, στη θερμοδυναμική, στον ηλεκτρισμό και στο μαγνητισμό, στα κύματα και στο φως, και με φαινόμενα που εκδηλώνονται σε μοριακή, ατομική και υποατομική κλίμακα.

5.4 Η δύναμη και ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ^{*}ορμής

Πολλοί συγγραφείς, παρασυρμένοι από το ότι η ορμή φαίνεται αφ' ενός να είναι πρωταρχική έννοια στη νευτώνεια μηχανική, αφ' ετέρου να κατέχει την πρωτοκαθεδρία στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, επανήλθαν στο να υπογραμμίζουν την επόμενη μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα:

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} \quad (5.4.1)$$

όπου

$$\mathbf{J} = m\mathbf{v} \quad (5.4.2)$$

Τη μορφή αυτή τη συνδέουν με την ανάπτυξη των εννοιών της ώθησης και της ορμής και με τη διατήρηση της ορμής.

Ο τύπος 5.4.1 δεν είναι λανθασμένος¹, εκτός κι αν υπαινιχθούμε ότι έχει γενικότερη ισχύ από τον τύπο:

1. Αναφερόμαστε στην πληρότητά του από λογική άποψη. Από παιδαγωγική άποψη, ωστόσο, είναι δυνατό να θέσουμε το ερώτημα: Πόσο φρόνιμο είναι να υιοθετήσουμε από τόσο νωρίς τη συγκεκριμένη προσέγγιση σε ένα εισαγωγικό μάθημα στο οποίο οι περισσότεροι μαθητές (ακόμη κι εκείνοι που βρίσκονται σε προχωρημένο στάδιο) θεωρούν ακόμη το μέγεθος $d\mathbf{v}/dt$ μυστηριώδες;

* Ο όρος γραμμική ορμή είναι σε αντιδιαστολή με τον όρο επιφανειακή ορμή ή επιρροή.

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = m\mathbf{g} \quad (5.4.3)$$

επειδή περιλαμβάνει τόσο τη μεταβολή της ταχύτητας όσο και τη μεταβολή της μάζας.

Η εξίσωση (5.4.1) ισχύει, γενικά, μόνον για *κλειστά* συστήματα. Συμπτωματικά, εφαρμόζεται επίσης σε ένα πολύ ειδικό ανοιχτό σύστημα στο οποίο το σύστημα αναφοράς είναι τέτοιο, ώστε η ταχύτητα $\mathbf{u}$ έχει διττή σημασία: δεν είναι απλώς η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος του οποίου μεταβάλλεται η ορμή, αλλά είναι ταυτόχρονα και η *σχετική* ταχύτητα της εισερχόμενης ή της εξερχόμενης ύλης. Σε άλλα ανοιχτά συστήματα, λόγου χάρη στους πυραύλους, δεν εφαρμόζεται.

Το θέμα αυτό μελετάται προσεκτικά πλέον σε πολλά εγχειρίδια [λόγου χάρη, στο βιβλίο των Resnick και Halliday (1977), στο εδάφιο 9.7]: ωστόσο, επειδή ακόμη εμφανίζονται λανθασμένες ή παραπλανητικές διατυπώσεις, ο καθηγητής πρέπει να είναι επιφυλακτικός και προσεκτικός.

5.5 Θερμότητα και θερμοκρασία

Οι περισσότεροι καθηγητές γνωρίζουν ότι, σε έναν εισαγωγικό κύκλο μαθημάτων, πολλοί μαθητές δεν διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των όρων «θερμότητα» και «θερμοκρασία». Όταν περιγράφουν θερμικά φαινόμενα, συνήθως χρησιμοποιούν τις δύο λέξεις ως συνώνυμες. Η σύγχυση δεν εξαλείφεται με το να την αγνοήσουμε. Εκδηλώνεται επειδή οι μαθητές, με βάση την προηγούμενη εμπειρία τους, χρησιμοποιούν γενικά τους εν λόγω όρους ως πρωταρχικούς. Θεωρούν, δηλαδή, ότι το νόημά τους είναι φανερό στον καθέναν. Οι καθηγητές δεν τους έχουν υποδείξει να αρθρώσουν απλούς λειτουργικούς ορισμούς. Κάτι τέτοιο, ωστόσο, είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί ακόμα και κατά τη διδασκαλία των θετικών επιστημών στο δημοτικό. Επειδή, λοιπόν, σε προηγούμενο στάδιο δεν έχει επιδειχθεί η απαιτούμενη προσοχή, σε μια εισαγωγική σειρά μαθημάτων φυσικής είναι απαραίτητο να είμαστε προσεκτικοί.

Ευτυχώς, η προσπάθεια δεν είναι δύσκολη: είναι δυνατό να επικαλεστούμε πληθώρα παραδειγμάτων θερμικών φαινομένων από την καθημερινή εμπειρία. Μια απλή αλλά θεμελιώδης στρατηγική είναι η εξής: αποδεχόμαστε ως πρωταρχική τη γνώση που οι μαθητές έχουν αποκτήσει διαισθητικά, παρατηρώντας τα θερμόμετρα και τις ενδείξεις τους. Δεν είναι απαραίτητο, δηλαδή, να αρχίσουμε την παρουσίαση διατυπώνοντας λεπτομερείς ορισμούς². Κατόπιν, μπορούμε να κατευθύνουμε τους μαθητές να συνθέ-

2. Είναι δυνατό να επισημάνουμε ότι τελικά η *έννοια* της θερμοκρασίας είναι βαθύτερη. Όπως συμβαίνει, ωστόσο, με πολλές έννοιες, προχωράμε με διαδοχικά βήματα ορισμού και επαναορισμού της έννοιας και εμβαθύνουμε στο νόημά της, απομακρυνόμενοι συνεχώς από το αρχικό ασαφές σημείο εκκίνησης.

σουν περιγραφές από την καθημερινή εμπειρία τους, την οποία έχουν απομνημονεύσει διαισθητικά, αλλά σπάνια την περιγράφουν:

Μέσα σε ένα δωμάτιο τοποθετούμε έναν κουβά με ζεστό νερό. Παρατηρούμε ότι η ένδειξη του θερμομέτρου που βρίσκεται μέσα στο νερό πάντοτε μειώνεται, προσεγγίζοντας την ένδειξη του θερμομέτρου που βρίσκεται στον τοίχο του δωματίου.

Μέσα σε ένα δωμάτιο τοποθετούμε έναν κουβά με κρύο νερό. Παρατηρούμε ότι η ένδειξη του θερμομέτρου που βρίσκεται μέσα στο νερό πάντοτε αυξάνεται, προσεγγίζοντας την ένδειξη του θερμομέτρου που βρίσκεται στον τοίχο του δωματίου.

Φέρνουμε σε επαφή δύο σώματα διαφορετικής θερμοκρασίας. Πάντοτε η θερμοκρασία του θερμότερου σώματος μειώνεται, ενώ η θερμοκρασία του ψυχρότερου αυξάνεται μέχρις ότου εξισωθούν οι δύο θερμοκρασίες.

Φέρνουμε σε επαφή δύο σώματα ίδιας θερμοκρασίας· ουδεμία μεταβολή συμβαίνει.

Είναι δυνατό, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες περιγραφές — αφού τις διευρύνουμε με άλλες που θα εκμαιεύσουμε από τους μαθητές —, να δημιουργήσουμε την έννοια της θερμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο σωμάτων (τα οποία, αρχικώς, βρίσκονται σε διαφορετική θερμοκρασία) και την έννοια της θερμικής ισορροπίας. Έτσι, οι μαθητές αντιλαμβάνονται σαφώς τη σημασία της αλληλεπίδρασης. Μέσα από συνηθισμένα θερμικά φαινόμενα αντιλαμβάνονται, επίσης, ότι τα σώματα έχουν την τάση να καταλήγουν σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Στο πλαίσιο της στρατηγικής μας, το επόμενο βήμα είναι να κατευθύνουμε τους μαθητές να αντιληφθούν το εξής: αν και στη μελέτη των θερμικών φαινομένων η αλληλεπίδραση και η τάση για αποκατάσταση θερμικής ισορροπίας παίζουν σημαντικό ρόλο, η εξέλιξη των φαινομένων δεν προσδιορίζεται απλώς από τις ενδείξεις των θερμομέτρων. Παρεμβάλλονται και άλλοι παράγοντες. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται μόνοι τους αυτούς τους παράγοντες αν στρέψουμε την προσοχή τους στις παρατηρήσεις και στα εμπειρικά δεδομένα που ακολουθούν. Στις περιπτώσεις αυτές *ρυθμίζουμε* προσεκτικά τις θερμομετρικές ενδείξεις, μεταβάλλοντας τις υπόλοιπες συνθήκες:

«Μονώνουμε» τους κουβάδες με το ζεστό και το κρύο νερό που βρίσκονται μέσα στο δωμάτιο, σκεπάζοντάς τους με στρώματα βάμβακος

ή με το μονωτικό υλικό που τοποθετούμε μέσα στους τοίχους (ή τοποθετώντας το νερό σε θερμοός). Έτσι, μεταβάλλουμε σημαντικά το χρόνο που χρειάζεται για να πλησιάσει η ένδειξη του θερμομέτρου που βρίσκεται μέσα στο νερό την ένδειξη του θερμομέτρου του τοίχου. Η αρχική και η τελική ένδειξη του θερμομέτρου είναι παρόμοια μ' εκείνη στην περίπτωση που δεν υπάρχει μόνωση· ωστόσο, κάτι έχει αλλάξει, το οποίο δεν μας το δείχνουν τα θερμομέτρα.

Μεταβολή στο χρονικό διάστημα εμφανίζεται, επίσης, όταν η θερμοκρασία δύο σπιτιών, από τα οποία μόνον το ένα έχει μόνωση, μειώνεται ως τη θερμοκρασία του εξωτερικού περιβάλλοντος. (Αισθανόμαστε ιδιαίτερη έκπληξη, ανακαλύπτοντας πόσοι μαθητές δεν γνωρίζουν το εν λόγω θέμα και δεν μπορούν, όντως, ούτε να το περιγράψουν ούτε να κατανοήσουν τη σκοπιμότητα της μόνωσης των τοίχων.)

Διαθέτουμε δύο δοχεία νερό, ένα μεγάλο κι ένα μικρό, στην ίδια θερμοκρασία. Θερμαίνουμε τα δοχεία τοποθετώντας τα πάνω σε δύο παρόμοιες εστίες θερμότητας. Περισσότερος χρόνος και καύσιμο είναι απαραίτητα για να αυξηθεί η θερμοκρασία της μεγαλύτερης ποσότητας νερού στην ίδια τελική τιμή μ' εκείνη της μικρότερης ποσότητας.

Για να πήξει ή για να τακεί ένα καθαρό σώμα, πρέπει να αλληλεπιδράσει με το περιβάλλον. Το περιβάλλον πρέπει να έχει, αντίστοιχα, υψηλότερη ή χαμηλότερη θερμοκρασία από τη θερμοκρασία του σώματος που υφίσταται τη μεταβολή. Ωστόσο, αν και η αλληλεπίδραση συνεχίζεται κατά τη διάρκεια της πήξης ή της τήξης, η θερμοκρασία του υλικού δεν μεταβάλλεται καθόλου μέχρις ότου πήξει ή τακεί όλο το υλικό. Αν οι μαθητές αγνοούν το φαινόμενο αυτό, πρέπει να τους το παρουσιάσουμε.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, επαληθεύεται — στο τελευταίο μάλιστα με δραματικό τρόπο — ότι με τις ενδείξεις του θερμομέτρου δεν εξαντλείται το ζήτημα της θερμικής αλληλεπίδρασης. Κάτι περισσότερο συμβαίνει: είναι απαραίτητο, λοιπόν, να επινοήσουμε μια πρόσθετη έννοια (ή έννοιες)³. Θεωρούμε ότι κατά τη διαδικασία της αλληλεπίδρασης, η οποία υπεισέρχεται στις παρατηρήσεις που προαναφέραμε, «μεταφέρεται θερμότητα από το σώμα υψηλότερης θερμοκρασίας στο σώμα χαμηλότερης». Με-

3. Όπως συνέβη με τη μελέτη των κινηματικών εννοιών στα εδάφια 2.5 και 2.9, στο παρόν στάδιο μας δίνεται μια πρόσθετη ευκαιρία να δείξουμε στους μαθητές ότι οι επιστημονικές έννοιες επινοούνται με τη βοήθεια της ανθρώπινης φαντασίας και ευστροφίας: δεν πρόκειται για προϋπάρχουσες οντότητες τις οποίες «ανακαλύπτουμε».

λετώντας πάλι τα φαινόμενα, αναδεικνύουμε έναν *ποιοτικό* λειτουργικό ορισμό του νέου όρου, τον οποίο όλοι μας πολύ σύντομα και με απόκρυφο τρόπο αντικαθιστούμε, απλώς, με τη λέξη «θερμότητα».

Η ποσοτική περιγραφή της «μεταφοράς θερμότητας» προκύπτει, λοιπόν, με τον συνηθισμένο τρόπο: χρησιμοποιούμε το νερό ως συμβατική ουσία αναφοράς· βρίσκουμε (σε πρώτο βαθμό ακρίβειας) ότι, αν αναμειξουμε δύο ίσες μάζες νερού, που αρχικώς βρίσκονται σε διαφορετική θερμοκρασία, διατηρώντας τες απομονωμένες από το περιβάλλον, η τελική τιμή της θερμοκρασίας τους ισούται με τη μέση τιμή των αρχικών θερμοκρασιών τους. Η τελική τιμή της θερμοκρασίας δύο διαφορετικών ποσοτήτων νερού ακολουθεί τον κανόνα: ο λόγος των *μεταβολών* της θερμοκρασίας κάθε ποσότητας είναι ίσος με το αντίστροφο του λόγου των δύο μαζών. Μπορούμε, λοιπόν, να χρησιμοποιούμε μάζες και θερμοκρασίες ποσοτήτων νερού, για να αποδώσουμε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές σε ποσότητες μεταφερόμενης θερμότητας. Οδηγούμαστε, έτσι, στον ορισμό της «θερμίδας» και στην έννοια της «ειδικής θερμότητας» και άλλων ουσιών, εκτός από το νερό. (Το ότι είναι απαραίτητο να επαναορίσουμε ακόμα και την ίδια την ειδική θερμότητα του νερού — επειδή μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία — είναι ανακάλυψη δεύτερης τάξης. Καταδεικνύεται, έτσι, η συνεχής διαδικασία «ακονίσματος» και εκλέπτυνσης των εννοιών, καθώς η αντίληψή μας βελτιώνεται και οι ποσοτικές μετρήσεις γίνονται ακριβέστερες.)

Σε τούτο το «σταυροδρόμι», είναι σημαντικό να επιστρέψουμε σε προηγούμενες καταστάσεις, λόγου χάρη σ' εκείνη όπου ο κουβάς με το νερό κρύνει μέσα στο δωμάτιο. Λίγοι μαθητές αντιλαμβάνονται αμέσως ότι το δωμάτιο ή το σπίτι έχουν θερμοχωρητικότητα πολύ μεγαλύτερη — αν και πεπερασμένη — από τη θερμοχωρητικότητα του κουβά με το νερό. Πρέπει να τους κατευθύνουμε να αντιληφθούν ότι η θερμοκρασία του αέρα στο δωμάτιο μεταβάλλεται πολύ λιγότερο από εκείνη του νερού· ωστόσο, η μεταβολή δεν είναι μηδενική.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι δεν παρατηρούμε ούτε μετράμε με *άμεσο* τρόπο τη μεταφορά της θερμότητας. (Λίγοι σπουδαστές αντιλαμβάνονται αυτό το γεγονός.) Μετράμε, απλώς, μάζες και μεταβολές θερμοκρασίας και *προσδιορίζουμε* έμμεσα την ποσότητα της μεταφερόμενης θερμότητας. (Στο παρόν στάδιο, εμφανίζεται μια νέα ευκαιρία για να μελετήσουμε τη διάκριση μεταξύ της παρατήρησης και της εξαγωγής συμπεράσματος.)

Για λόγους σαφήνειας και ακρίβειας στη μελλοντική διαμόρφωση και χρήση των εννοιών που σχετίζονται με την ενέργεια, ενδείκνυται να μη χρησιμοποιούμε τη φράση: «θερμότητα που *περιέχεται* σε κάποιο σώμα», ακόμα και στο πρώτο στάδιο ανάπτυξης της έννοιας. Πρέπει να χρησιμοποιούμε τον όρο θερμότητα μόνο σε σύνδεση με τη διαδικασία *μεταφοράς* της προς ή από κάποιο σώμα ή σύστημα. Με τον τρόπο αυτό, χρησιμοποιεί-

ται στο πλαίσιο της θερμοδυναμικής. Υπεισέρχονται, δηλαδή, επικαμπύλια ολοκληρώματα και μη τέλεια διαφορικά, τα οποία συνδέονται με τη μεταφερόμενη θερμότητα και το έργο.

Όπως θα δούμε στο εδάφιο 5.8, αν θεωρήσουμε ότι ποσότητες θερμότητας διαμένουν στο εσωτερικό των σωμάτων και υπαινιχθούμε ότι οι ποσότητες αυτές εξαρτώνται από την κατάσταση του σώματος, τότε, ακόμα και σε στοιχειώδες επίπεδο, οι μαθητές δυσκολεύονται σοβαρά να αντιληφθούν σαφώς την έννοια της διατήρησης της ενέργειας.

Επίσης, όταν αναφέρουμε ότι «το έργο μετατρέπεται σε θερμότητα» (λόγου χάρι, όταν έργο καταναλώνεται σε διαδικασίες όπου εμφανίζονται τριβές), δημιουργούμε σύγχυση: στη συγκεκριμένη διαδικασία, δεν μεταφέρεται άμεσα θερμότητα στο σύστημα: το προσφερόμενο έργο μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, χωρίς να *μεταφερθεί* θερμότητα. Η αύξηση της εσωτερικής θερμικής ενέργειας ισούται, απλώς, με τη θερμότητα η οποία, αν μεταφερόταν στο σύστημα, θα επέφερε παρόμοια μεταβολή στη θερμοκρασία. (Τα συγκεκριμένα ζητήματα αναλύονται λεπτομερέστερα στα εδάφια 5.6-5.10.)

5.6 Το θεώρημα ώθησης-ορμής και έργου-κινητικής ενέργειας

Τα περισσότερα εγχειρίδια εκκινούν από την εξίσωση:

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = m\mathbf{g} \quad (5.6.1)$$

Κατόπιν, με βάση την εξίσωση αυτή, αναπτύσσουν τις σχέσεις μεταξύ της ώθησης και της ορμής και μεταξύ του έργου και της κινητικής ενέργειας. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν ως εξής: Αν χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός, ολοκληρώνουμε κάθε μέλος της Εξ. 5.6.1 ως προς τη χρονομετρική ένδειξη t και ως προς τη θέση s . Αν δεν χρησιμοποιείται απειροστικός λογισμός, θεωρούμε, απλώς, την περίπτωση σταθερής δύναμης. Αρχικώς, η ανάπτυξη αφορά, σαφέστατα, την απλούστερη περίπτωση, δηλαδή σωματίδιο ή σημειακή μάζα. Έτσι, οι εξισώσεις λαμβάνουν τη γνωστή μορφή τους:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{ολ}} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \Delta(m\mathbf{v}) \quad (5.6.2)$$

ή

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} \Delta t = \Delta(m\mathbf{v}) \quad (5.6.3)$$

και

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}_{\text{ολ}} ds = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (5.6.4)$$

ή

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} \Delta s = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (5.6.5)$$

Και τα δύο σύνολα αποτελεσμάτων έχουν απόλυτη και γενική ισχύ μόνο στο πλαίσιο όπου εξήχθησαν· αφορούν, δηλαδή, την κίνηση σημειακής μάζας. Ωστόσο, σοβαρές δυσκολίες εμφανίζονται, όταν επεκτείνουμε αυθαίρετα τις σχέσεις αυτές σε συνεχή και παραμορφώσιμα συστήματα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων ή αντικειμένων ή σε συστήματα που έχουν άλλους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. [Κοινότατα παραδείγματα τέτοιων συστημάτων είναι: η κίνηση του σώματός μας, όταν περπατάμε, τρέχουμε ή πηδάμε· η προώθηση του αυτοκινήτου· η διάκριση μεταξύ της ελαστικής και της πλαστικής κρούσης· ακόμα και η ώθηση ενός (φαινομενικά) στερεού κιβωτίου πάνω σε πάτωμα που εμφανίζει τριβές.]

Οι εξισώσεις 5.6.2-5.6.5 είναι δυναμικές σχέσεις. Ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις που υπεισέρχονται σ' αυτές αφορούν το κέντρο μάζας του συστήματος που μελετάμε. Αν αποφασίσουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα που εκτείνεται στο χώρο, στο πλαίσιο της συγκεκριμένης ανάλυσης, η σημασία και ο ρόλος του κέντρου μάζας πρέπει να αναπτυχθεί τουλάχιστον με εύλογο τρόπο, αν όχι με απόλυτη αυστηρότητα. Η γενική ιδέα της διατήρησης της γραμμικής ορμής συνδέεται κατάλληλα με τις εξισώσεις 5.6.2 και 5.6.3.

Αν και οι εξισώσεις 5.6.4 και 5.6.5 ισχύουν γενικά (με την προϋπόθεση ότι οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις αναφέρονται συνεχώς στο κέντρο μάζας), σοβαρά εννοιολογικά προβλήματα και προβλήματα ορολογίας εμφανίζονται από τη στιγμή που επεκτείνουμε την εφαρμογή των εν λόγω εξισώσεων πέραν των σημειακών μαζών. Οι δυσκολίες οφείλονται κυρίως στο ότι οι συγκεκριμένες εξισώσεις παρουσιάζονται ως νόμος διατήρησης του έργου και της ενέργειας, κατ' αναλογία προς τις εξισώσεις 5.6.2 και 5.6.3, που περιγράφουν τη διατήρηση της γραμμικής ώθησης και της ορμής. Θεωρείται, λοιπόν, ότι η εξίσωση 5.6.4 είναι η πρώτη εκδοχή του 1ου Νόμου της Θερμοδυναμικής, η οποία χρειάζεται, απλώς, εκλέπτυνση και επέκταση.

για να συμπεριλάβει άλλες μορφές ενέργειας. Οι εξισώσεις 5.6.4 και 5.6.5 ισχύουν, όντως, για το έργο και για την ενέργεια σημειακής μάζας· ωστόσο, στις περισσότερες εφαρμογές δεν αφορούν την ενέργεια συστημάτων που εκτείνονται στο χώρο. Προβλήματα εμφανίζονται επειδή το έργο και η θερμότητα είναι μορφές ενέργειας η οποία μεταφέρεται διαμέσου των ορίων ενός συστήματος, που μπορεί να είναι ένα μεμονωμένο παραμορφώσιμο σώμα.

Αρχίζουμε να αντιλαμβανόμαστε ότι κάτι «δεν πάει καλά» από τη στιγμή που μελετάμε περιπτώσεις οι οποίες περιλαμβάνουν δυνάμεις μηδενικού έργου. Σε συνηθισμένες καταστάσεις, οι δυνάμεις αυτές προσδίδουν επιτάχυνση σε αντικείμενα τα οποία εκτείνονται στο χώρο, μεταβάλλοντας έτσι την κινητική ενέργειά τους⁴. Λόγου χάρη, αυτό συμβαίνει όταν υπεισέρχονται οι επόμενες δυνάμεις: η δύναμη που ασκεί το έδαφος πάνω μας, όταν πηδάμε κατακόρυφα προς τα πάνω· η δύναμη που ασκεί ο τοίχος πάνω μας, όταν στεκόμαστε πάνω σε ένα πατίνι και εκτινασσόμαστε, σπρώχνοντας με τα χέρια μας τον τοίχο· η οριζόντια δύναμη τριβής την οποία ασκεί το οδόστρωμα πάνω στο επιταχυνόμενο αυτοκίνητο και η δύναμη της τριβής που ασκεί το έδαφος πάνω μας, όταν περπατάμε ή τρέχουμε (χωρίς να ολισθαίνουμε). Στις προηγούμενες περιπτώσεις, οι δυνάμεις είναι μηδενικού έργου. Ωστόσο, πολλά εγχειρίδια αναφέρουν ή υπαινίσσονται ότι οι συγκεκριμένες δυνάμεις εκτελούν έργο και, συνεπώς, προσδίδουν κινητική ενέργεια στο επιταχυνόμενο σώμα. Και τούτο, ανεξάρτητα από όσα έχουν, ενδεχομένως, αναφέρει για τις δυνάμεις οι οποίες δεν παράγουν έργο.

Άλλο παράδειγμα που καταδεικνύει ότι κάτι «δεν πάει καλά» εμφανίζεται στην απλούστατη περίπτωση κατά την οποία πάνω στο πάτωμα, στο οποίο υπάρχουν τριβές, σπρώχνουμε με σταθερή ταχύτητα ένα κιβώτιο. Αν συμβολίσουμε με T τη δύναμη της τριβής ολίσθησης και με Δx_{KM} τη μετατόπιση του κέντρου μάζας, από την εξίσωση 5.6.5 προκύπτει:

$$F \cdot \Delta x_{\text{KM}} - T \cdot \Delta x_{\text{KM}} = 0 \quad (5.6.6)$$

4. Ουσιαστικά, όλα τα εγχειρίδια και οι καθηγητές επισημαίνουν σαφώς (όταν περιγράφουν την ποσότητα $F \cdot \Delta s$ ή $\int F \cdot ds$ ως «το έργο της δύναμης F ») ότι το έργο είναι μηδενικό, όταν η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση δράσης της δύναμης είναι μηδενική. Συνήθως, όταν παρουσιάζουμε το συγκεκριμένο γεγονός, επικαλούμαστε την περίπτωση όπου σπρώχνουμε έναν ακλόνητο τοίχο, οπότε η μετατόπιση είναι μηδενική, ή μεταφέρουμε με σταθερή ταχύτητα μια βαλίτσα, οπότε η μετατόπιση είναι κάθετη στη δύναμη. Κατά το μεγαλύτερο μέρος της, η συγκεκριμένη μελέτη περιέχεται επαρκώς στη διδασκαλία. Είναι απαραίτητο, ωστόσο, να επισημάνουμε ότι οι συγκεκριμένες έννοιες σπάνια, αν όχι ποτέ, μελετώνται στην περίπτωση όπου στο σώμα προσδίδεται κινητική ενέργεια.

Η εξίσωση αυτή σημαίνει ότι το συνολικό έργο που προσφέρθηκε στο κιβώτιο είναι μηδενικό. Ωστόσο, στηριζόμενοι στις βαθύτερες γνώσεις μας για τις μετατροπές της ενέργειας, γνωρίζουμε ότι στο σύστημα κιβώτιο-δάπεδο έχει, όντως, προσφερθεί ποσότητα έργου. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έχει εμφανιστεί ισοδύναμη ποσότητα θερμικής ενέργειας, η οποία συνδέεται με την άνοδο της θερμοκρασίας του κιβωτίου και του δαπέδου. Στο πλαίσιο μιας εισαγωγικής σειράς μαθημάτων, συνήθως ξεπερνάμε πρόχειρα αυτό το παράδοξο: αναφέρουμε, απλώς, ότι το έργο που προσφέρουμε «μετατρέπεται σε θερμότητα», αφήνοντας τους μαθητές με την εντύπωση ότι στο κιβώτιο έχει μεταφερθεί θερμότητα. Γνωρίζουμε, ωστόσο, ότι ουδεμία μεταφορά θερμότητας έχει συμβεί η οποία να είχε αποτέλεσμα την αύξηση της θερμοκρασίας του συστήματος κιβώτιο-δάπεδο: η μόνη μεταφορά θερμότητας που πράγματι συνέβη ήταν από το κιβώτιο και το πάτωμα προς τον περιβάλλοντα αέρα.

Τα προβλήματα πηγάζουν από το ότι οι εξισώσεις 5.6.4 και 5.6.5 είναι όντως εξισώσεις ενέργειας, αλλά μόνο για σύστημα σημειακής μάζας, χωρίς τριβή και εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι εξισώσεις δεν ισχύουν ή ότι είναι λανθασμένες. Συνδέουν τις αριθμητικές τιμές των εξωτερικών δυνάμεων (είτε εκτελούν έργο είτε όχι) με τις αριθμητικές τιμές της μετατόπισης και της ταχύτητας του κέντρου μάζας του συστήματος στο οποίο είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τη σχέση $F_{ολ} = m\gamma$ και τα ολοκληρώματά της. Οι αντιφάσεις οφείλονται, λοιπόν, στη λανθασμένη και ασυνεπή επίκληση των εννοιών που σχετίζονται με την ενέργεια.

Επειδή οι εξισώσεις 5.6.4 και 5.6.5 δεν είναι γνήσιες εξισώσεις ενέργειας (παρά μόνο σε λίγες ειδικές περιπτώσεις), ακολουθώντας τον Sherwood (1983), απορρίπτω την ορολογία «έργο-κινητική ενέργεια»: αναφέρομαι σε αυτές ως εξισώσεις του «κέντρου μάζας» ή εξισώσεις Κ.Μ. Για να προβάλλουμε καλύτερα αυτή την άποψη, είναι καταλληλότερο να γράψουμε τις εξισώσεις με τη μορφή:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_{ολ} ds_{KM} = \frac{1}{2} m v_{2,KM}^2 - \frac{1}{2} m v_{1,KM}^2 = \Delta \left(\frac{1}{2} m v_{KM}^2 \right) \quad (5.6.7)$$

ή

$$F_{ολ} \Delta s_{KM} = \Delta \left(\frac{1}{2} m v_{KM}^2 \right) \quad (5.6.8)$$

Έτσι, αναδεικνύουμε σαφώς το ρόλο των συντεταγμένων και της ταχύτητας

του κέντρου μάζας· τονίζουμε, επίσης, ότι στο αριστερό μέλος δεν υπεισέρχονται οι δυνάμεις και οι μετατοπίσεις που αφορούν τα *όρια* του συστήματος.

5.7 Πραγματικό έργο και ψευδοέργο

Επειδή η έννοια του «έργου» δεν είναι πρωτογενής ή διαισθητική, οι μαθητές έρχονται σε επαφή μ' αυτήν την περιοχή της φυσικής χωρίς κάποια εύλογη και βαθιά ριζωμένη πρωτογενή αντίληψη, στηριγμένη στην καθημερινή εμπειρία — όπως συμβαίνει με τις βασικές έννοιες της δυναμικής. Η αντίληψή τους, λοιπόν, είναι *tabula rasa*. Ωστόσο, δημιουργούνται σ' αυτούς ορισμένες παρανοήσεις, τις οποίες καλλιεργούν οι περισσότερες παρουσιάσεις που υπάρχουν στα εγχειρίδια. Οι παρανοήσεις αυτές «ξεριζώνονται» δύσκολα.

Η κύρια παρανόηση που καλλιεργείται στα εισαγωγικά μαθήματα φυσικής είναι οι εξής: η ποσότητα του «έργου» (το γινόμενο της δύναμης επί τη μετατόπιση του κέντρου μάζας) που εμφανίζεται στο «θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας» (Εξ. 5.6.4 και 5.6.5) και που προκύπτει ολοκληρώνοντας τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, ταυτίζεται με το «έργο» το οποίο εμφανίζεται στον γενικό νόμο διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή στον 1ο Νόμο της Θερμοδυναμικής. (Ο όρος *πραγματικό έργο* που υπάρχει στον τίτλο του εδαφίου αναφέρεται στη δεύτερη ποσότητα και όχι στην πρώτη.)

Η παρανόηση αυτή έχει μελετηθεί σε κάποιο βαθμό τα τελευταία χρόνια [βλ. Erlichon (1977)· Penchina (1978)· Sherwood (1983)· και Sherwood και Bernard (1984)]· ωστόσο, η απαραίτητη πληροφόρηση δεν έχει ακόμα «περάσει» σε πολλά εγχειρίδια.

Για να υπολογίσουμε το έργο που απορροφά ή παράγει ένα σύστημα (εκτός κι αν πρόκειται για μεμονωμένη σημειακή μάζα), πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα των δυνάμεων και των μετατοπίσεων που τις συνοδεύουν σε όλη τη *συνοριακή γραμμή του συστήματος*. Δηλαδή, η ολοκλήρωση πρέπει να γίνει στην *περιοχή εφαρμογής του νόμου διατήρησης*. Ο Bridgman (1941) περιγράφει το λειτουργικό πρόβλημα με χαρακτηριστικό τρόπο:

Ας επιστρέψουμε στη μελέτη του [έργου] W του 1ου Νόμου. Το W συμβολίζει το ολικό μηχανικό έργο που η εσωτερική περιοχή προσλαμβάνει από την εξωτερική [ή το έργο που η εξωτερική περιοχή προσλαμβάνει από την εσωτερική]. Όπως στην περίπτωση της [μεταφερόμενης θερμότητας] Q , το συγκεκριμένο έργο διέρχεται διαμέσου της συνοριακής γραμμής. Για τον υπολογισμό του W , είναι απαραίτητο, λοιπόν, να προσδιορίσουμε τις «εισόδους» και τις «εξόδους» στη

συνοριακή γραμμή και να αθροίσουμε τη συνεισφορά τους. Στις απλές περιπτώσεις που συναντάμε, συνήθως, σε στοιχειώδεις αναλύσεις, το έργο που το εσωτερικό προσλαμβάνει από το εξωτερικό έχει τυπική μορφή: λόγου χάρη, προέρχεται από τεντωμένα νήματα ή από απλά γραμμικά έμβολα. Οι «φύλακες στις εισόδους και τις εξόδους» περιγράφουν τη διαδικασία ως εξής: μια πεπερασμένη δύναμη δρα σε ορισμένο σημείο και συνδέεται με πεπερασμένη μετατόπιση. Παράλληλα, η ύλη της εξωτερικής περιοχής έρχεται, συνήθως, σε επαφή με πεπερασμένες περιοχές της συνοριακής γραμμής. Υπεισέρονται, λοιπόν, οι πιέσεις και οι τάσεις της θεωρίας της ελαστικότητας. [Στη συνέχεια, ο Bridgman περιγράφει «το παράδοξο που εμφανίζεται όταν εφαρμόζουμε την έννοια του έργου στην αμοιβαία ολίσθηση δύο σωμάτων, μεταξύ των οποίων εμφανίζονται τριβές».]

Ο Penchina (1978) μαζί με τον Sherwood (1983) προτείνουν να γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο ποσοτήτων του έργου τις οποίες προαναφέραμε. Υιοθετεί, λοιπόν, τον όρο «ψευδοέργο» για την ποσότητα που συνδέεται με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας και διατηρεί τον όρο «έργο» για την ποσότητα που εμφανίζεται στον 1ο Νόμο της Θερμοδυναμικής. Η συγκεκριμένη ορολογία, βέβαια, δεν έχει καθιερωθεί ακόμα. Ωστόσο, είναι βολική: δεν αποκόπτει απολύτως τη σύνδεση μεταξύ των δύο ποσοτήτων, και δεν είναι απαραίτητο να επινοήσουμε ριζικά νέους όρους. Θα την υιοθετήσω, λοιπόν, στη συνέχεια της συζήτησής μας.

5.8 Ο Νόμος Διατήρησης της Ενέργειας

Ο Νόμος της Διατήρησης της Ενέργειας δεν προκύπτει, βέβαια, από τις δυναμικές εξισώσεις κίνησης: είναι μια αυτόνομη διακήρυξη για την τάξη που υπάρχει στη Φύση. Είναι «αρχή του ανέφικτου», όπως αποκαλούμε, ορισμένες φορές, τους νόμους διατήρησης και τον 2ο Νόμο της Θερμοδυναμικής. Ο γενικός νόμος διατήρησης της ενέργειας (που περιλαμβάνει τη μεταφορά θερμότητας, την κινητική, τη δυναμική και τις άλλες μορφές ενέργειας) είναι μια νέα διακήρυξη η οποία σχετίζεται ελάχιστα με την εξίσωση του Κ.Μ.⁵ Το θέμα αυτό δεν αποσαφηνίζεται αρκετά στους μαθητές, με τον τρόπο που, συνθηθέστατα, παρουσιάζεται η έννοια της ενέργειας σε εισαγωγικά μαθήματα φυσικής.

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, ποιες πλευρές του 1ου Νόμου της Θερμοδυναμικής μπορούμε να εντάξουμε σε έναν κύκλο εισαγωγικών μαθημάτων φυ-

5. Βλ. εδάφιο 5.6 για τον ορισμό της «εξίσωσης του Κ.Μ.».

σικής, ώστε η χρήση των εννοιών της ενέργειας να είναι σωστή και συνεπής. Οι πλευρές αυτές, όμως, δεν πρέπει να περιλαμβάνουν μαθηματικές και άλλες περιπλοκότητες οι οποίες, στο συγκεκριμένο στάδιο, είναι άχρηστες στους μαθητές.

Η συνήθης μορφή του 1ου Νόμου είναι:

$$dE = \delta Q - \delta W \quad (5.8.1)$$

ή

$$\Delta E = Q - W \quad (5.8.2)$$

όπου E είναι η «εσωτερική ενέργεια του συστήματος». Οι συγκεκριμένες εξισώσεις δεν είναι απλώς διακήρυξη διατήρησης ορισμένων ποσοτήτων υπολογιζομένων σύμφωνα με κάποιες οδηγίες που προκύπτουν από τον ορισμό των διαφορετικών μορφών ενέργειας. Στο δεξιό μέλος έχουμε ποσότητες που εξαρτώνται από τη «διαδρομή» (μη τέλεια διαφορικά), και στο αριστερό μέλος μια *συνάρτηση της κατάστασης* (τέλειο διαφορικό). Στην πραγματικότητα, η μαθηματική διατύπωση του 1ου Νόμου είναι δυνατό να θεωρηθεί *ορισμός*. Με βάση τον ορισμό αυτό, ανακαλύπτουμε τελικά ότι στη Φύση: (1) υπάρχει μια *ενεργειακή ποσότητα* που είναι *συνάρτηση της κατάστασης* του συστήματος (οι μεταβολές της είναι ανεξάρτητες από τη «διαδρομή»), και (2) είναι δυνατό να υπολογίσουμε τις μεταβολές του εν λόγω μεγέθους με τη βοήθεια μεταφερόμενων ποσοτήτων ενέργειας· οι ποσότητες αυτές, ωστόσο, εξαρτώνται από την ακολουθούμενη διαδρομή και δεν είναι συναρτήσεις της κατάστασης του συστήματος. (Πρέπει να επισημάνουμε ότι, μέχρι τώρα, έχουμε ορίσει μεταβλητές εξαρτώμενες από την κατάσταση του συστήματος, λόγου χάρη από τη θερμοκρασία, την πίεση, τον όγκο, τη μάζα, την πυκνότητα κ.ά. Δεν μπορούμε, ωστόσο, να συμπεριλάβουμε την ενέργεια σ' αυτές.)

Δεν προτείνω ότι πρέπει να προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε αυτή τη λεπτομερή παρουσίαση στο πλαίσιο εισαγωγικών μαθημάτων φυσικής. Ωστόσο, συμφωνώντας με τον Sherwood (1983), θεωρώ ότι πρέπει να χρησιμοποιούμε κατάλληλη ορολογία, ώστε οι μαθητές μας, μεταφράζοντας τους απαραίτητους όρους, να παρακολουθούν σαφέστερα τι ακριβώς συμβαίνει στις περιπτώσεις που μελετάμε συνήθως.

Αφού δείξουμε ότι η δαπάνη (πραγματικού) έργου προκαλεί θερμικά φαινόμενα ευθέως ανάλογα της ποσότητας του δαπανώμενου έργου (όπως συνέβη στα διάσημα πειράματα του Joule) και αφού αναφέρουμε ότι στο μέλλον θα περιλάβουμε ηλεκτρικά, μαγνητικά και χημικά φαινόμενα μαζί με τα θερμικά και τα μηχανικά, πρέπει να επισημάνουμε ότι: είναι πάντοτε δυνατό να ανακαλύψουμε τρόπους υπολογισμού των αριθμητικών τιμών (ή «επίτευξης ενεργειακού ισοζυγίου»). Αυτός είναι ένας νέος φυσικός νόμος.

Λόγου χάρη, η μεταβολή της «εσωτερικής ενέργειας του συστήματος» είναι αριθμητικά ίση με το άθροισμα των ποσοτήτων της θερμότητας και του έργου που μεταφέρεται στο σύστημα⁶. Η προηγούμενη πρόταση μεταφράζεται συμβολικά ως εξής:

$$\Delta E = Q + W \quad (5.8.3)$$

Παρατηρήστε ότι το πρόσημο του W είναι διαφορετικό από τη συνήθη αμερικανική σύμβαση που περιέχεται στον 1ο Νόμο⁷.

Στο παρόν στάδιο, οι μαθητές δυσκολεύονται ακόμα να ερμηνεύσουν και να χρησιμοποιήσουν τα αλγεβρικά πρόσημα. Προτείνω, λοιπόν, να δεχτούμε, τουλάχιστον προσωρινά, το πρόσημο του W όπως εμφανίζεται στην Εξ. 5.8.3. Αν θεωρήσουμε ότι το έργο μιας δύναμης που επιταχύνει ένα σώμα είναι αρνητικό, θα προκαλέσουμε μεγάλη σύγχυση στους μαθητές. Όταν φτάσουμε στη Θερμοδυναμική — με όσους μαθητές συνεχίσουν ως το στάδιο αυτό —, μπορούμε, χωρίς δυσκολία, να τροποποιήσουμε τη σύμβαση.

Προετοιμαζόμενοι για μελλοντικές εφαρμογές, συντάσσουμε έναν κατάλογο των μεταβολών της ενέργειας που θα μελετήσουμε. Παραθέτουμε, επίσης, τον αντίστοιχο συμβολισμό:

Μεταβολή της εσωτερικής θερμικής ενέργειας: ΔE_{θ}

Μεταβολή της εσωτερικής χημικής ενέργειας: ΔE_{χ}

Μεταβολή της εσωτερικής κινητικής ενέργειας: ΔE_{κ}

Η μεταβολή της εσωτερικής κινητικής ενέργειας είναι δυνατό να περιλαμβάνει υποκατηγορίες, λόγου χάρη, τη μεταφορική ($\Delta E_{\text{εσ,μ}}$) και την ενέργεια περιστροφής ($\Delta E_{\text{εσ,π}}$)

Μεταβολή της εσωτερικής δυναμικής ενέργειας: ΔE_{δ}

Η μεταβολή της εσωτερικής δυναμικής ενέργειας είναι δυνατό να περιλαμβάνει υποπεριπτώσεις, λόγου χάρη τη βαρυτική ($\Delta E_{\delta,β}$), την ενέργεια «ελαστικότητας», κατά τη συμπίεση ή κατά την επιμήκυνση

6. Με παρόμοιο πνεύμα, ο Feynman εισάγει τις έννοιες της ενέργειας στο 4ο Κεφάλαιο του βιβλίου του «The Feynman Lectures on Physics» [Feynman, Leighton και Sands (1963)].

7. Σύμφωνα με τη συνηθέστερη αμερικανική σύμβαση, θεωρούμε το έργο θετικό όταν το σύστημα *προσφέρει* έργο, και όχι όταν *απορροφά*. Αφορμή υπήρξε μάλλον το ότι, όταν ένα ρευστό (ή χημικό σύστημα) εκτονούνται, συνδέουμε, για απλούστευση, μια θετική ποσότητα έργου dW με τη θετική ποσότητα PdV . Στους περισσότερους τύλους της ευρωπαϊκής βιβλιογραφίας που αναφέρεται στη θερμοδυναμική, η σύμβαση είναι αντίστροφη.

$(\Delta E_{\delta, \epsilon\lambda})$, την ηλεκτρική $(\Delta E_{\delta, \eta\lambda})$ κ.ά.

Ποικίλες μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας $(\Delta E_{\text{ποικ.}})$, οι οποίες οφείλονται στην εκπομπή ή την απορρόφηση ήχου, ακτινοβολίας ή σε άλλες πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις.

Έτσι, στον 1ο Νόμο (Εξ. 5.8.3) το σύμβολο ΔE αντιστοιχεί στο αλγεβρικό άθροισμα των μεταβολών της εσωτερικής ενέργειας που περιλαμβάνονται στον κατάλογο:

$$\Delta E = \Delta E_{\theta} + \Delta E_{\chi} + \Delta E_{\kappa} + \Delta E_{\delta} + \dots \quad (5.8.4)$$

Για να αποσαφηνίσουμε την προσέγγιση που μελετήσαμε, ας την εφαρμόσουμε σε μια απλή ειδική περίπτωση, στη μετάφορά μιας ποσότητας θερμότητας Q σε κάποιο σύστημα, χωρίς να εκτελείται έργο και χωρίς να μεταβάλλεται η εσωτερική ενέργεια παρά μόνο η θερμική. Από την εξίσωση (5.8.3), σε συνδυασμό με την (5.8.4), προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} = Q \quad (5.8.5)$$

Μετάφραση: στις συγκεκριμένες συνθήκες, η ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρεται στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή της εσωτερικής θερμικής ενέργειας. Παρατηρήστε ότι στη διατύπωση χρησιμοποιούμε τον όρο «θερμότητα» μόνο σε συνδυασμό με τη *μετάφορά* της, όπως συμβαίνει συστηματικά στη θερμοδυναμική: αποφεύγουμε τις λανθασμένες διατυπώσεις: η θερμότητα «περιέχεται» στο σύστημα ή «είναι ιδιότητα» του συστήματος. (Στο επόμενο εδάφιο, μελετάμε ειδικότερα ζητήματα συνδεδεμένα με την ορολογία που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή. Τα ζητήματα αυτά είναι παρόμοια μ' εκείνα που αναφέραμε στο εδάφιο 5.5.)

Πρέπει να επισημάνουμε σαφώς τη διαφορά μεταξύ του 1ου Νόμου (με τη μορφή της εξίσωσης 5.8.3 ή με την προηγούμενη διατύπωση) και της εξίσωσης του Κ.Μ. Μπορούμε να εφαρμόσουμε έξυπνα και απλά τον 1ο Νόμο σε όλες τις περιπτώσεις που εμφανίζονται σε μια σειρά εισαγωγικών μαθημάτων φυσικής. Μάλιστα, όπως θα προσπαθήσω να δείξω στα επόμενα εδάφια, μια τέτοια εφαρμογή βελτιώνει σημαντικά τη σαφήνεια και τη συνέπεια της μελέτης των μετατροπών της ενέργειας γενικά. Η εφαρμογή αυτή βοηθά εξίσου με τη μελέτη των θερμικών φαινομένων που παρουσιάσαμε.

5.9 Παρέκβαση: η ενθαλπία

Οι κριτικοί αναγνώστες, ιδιαίτερα οι χημικοί, θα παρατήρησαν ότι η

μελέτη στο τέλος του εδαφίου 5.8, που αφορά τη μεταφορά θερμότητας και τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας όταν δεν εκτελείται έργο, δεν είναι απολύτως αυστηρή: υπονοούμε ότι, κατά τη μεταφορά της θερμότητας, ο όγκος του σώματος ή του συστήματος που τη δέχεται, παραμένει σταθερός. Η συγκεκριμένη μεταφορά, αν και είναι απολύτως πραγματοποιήσιμη στα αέρια, είναι εξαιρετικά δύσκολο, αν όχι ακατόρθωτο, να πραγματοποιηθεί στα υγρά και τα στερεά. Για να διατηρήσουμε σταθερό τον όγκο των υγρών και των στερεών, τα οποία διαστέλλονται όταν αυξήσουμε τη θερμοκρασία, πρέπει να τα περιορίσουμε, ασκώντας τεράστια πίεση· στο νερό, το οποίο μεταξύ των 0° και 4° συστέλλεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία του, πρέπει να ασκήσουμε υδροστατική «τάση».

Κάθε μεταφορά θερμότητας η οποία εμφανίζεται στην καθημερινή ζωή συμβαίνει μάλλον υπό σταθερή πίεση παρά υπό σταθερό όγκο: ορισμένη ποσότητα έργου ανταλλάσσεται αναπόφευκτα με την περιβάλλουσα ατμόσφαιρα. Η ποσότητα της μεταφερόμενης θερμότητας, λοιπόν, δεν ισούται ακριβώς με τη μεταβολή της εσωτερικής θερμικής ενέργειας, όπως προσδιορίζεται στο πλαίσιο του 1ου Νόμου. Γι' αυτό το λόγο επινοήθηκε η έννοια της «ενθαλπίας». Ορίζουμε, δηλαδή, μια νέα ενεργειακή ποσότητα, η οποία είναι συνάρτηση της κατάστασης· η μεταβολή της ποσότητας αυτής ισούται ακριβώς με την ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρεται υπό σταθερή πίεση και όχι υπό σταθερό όγκο.

Το επιθυμητό αποτέλεσμα προκύπτει, αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Legendre στην αρχική έκφραση του 1ου Νόμου:

$$dE = dQ - PdV \quad (5.9.1)$$

$$d(PV) = PdV + VdP \quad (5.9.2)$$

Αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις, προκύπτει:

$$d(E + PV) = dQ + VdP \quad (5.9.3)$$

Η νέα συνάρτηση κατάστασης $E + PV$ συμβολίζεται, συνήθως, με H και ονομάζεται «ενθαλπία του συστήματος». Η εξίσωση 5.9.3, λοιπόν, παίρνει τη μορφή:

$$dH = dQ + VdP \quad (5.9.4)$$

Μιλώντας με αυστηρότητα, η ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρεται υπό σταθερή πίεση (όπως στην περίπτωση των καθημερινών φαινομένων) ισούται με τη μεταβολή ΔH της ενθαλπίας και όχι με τη μεταβολή ΔE της εσωτερικής ενέργειας. (Η θερμότητα μιας χημικής αντίδρασης την

οποία χρησιμοποιούμε στη χημεία είναι η μεταβολή της ενθαλπίας μεταξύ συγκεκριμένων αρχικών και τελικών συνθηκών.) Η θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση ορίζεται, λοιπόν, ως εξής:

$$c_p = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (5.9.5)$$

όπου M είναι η μάζα του συστήματος και T η θερμοκρασία του.

Σε συνηθισμένες καταστάσεις συστημάτων εκτός από τα αέρια, η διαφορά μεταξύ του ΔH και του ΔE είναι εξαιρετικά μικρή και αμελείται «νόμιμα». Με τα αέρια πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. (Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι ο Julius Robert Mayer, ο οποίος μοιράζεται με τον Joule τη δόξα για την ανακάλυψη της ποσοτικής ισοδυναμίας μεταξύ έργου και θερμότητας, υπολόγισε το «μηχανικό ισοδύναμο» ως εξής: Δεν μελέτησε τα θερμικά φαινόμενα που προκαλούνται από τη δαπάνη έργου, όπως έκανε ο Joule, αλλά συνέκρινε την ειδική θερμότητα των αερίων υπό σταθερό όγκο (c_v) και υπό σταθερή πίεση (c_p). Κατόπιν, ερμήνευσε σωστά τη διαφορά μεταξύ των δύο μεγεθών ως αντανάκλαση της ποσότητας του έργου η οποία εμφανίζεται κατά την εκτόνωση, καθώς μεταφέρεται θερμότητα υπό σταθερή πίεση.)

Παρουσίασα την έννοια της ενθαλπίας για να αποσαφηνίσω τις δυσκολίες που υπεισέρχονται και όχι για να υποστηρίξω ότι πρέπει να την αναπτύσσουμε στο πλαίσιο μιας σειράς εισαγωγικών μαθημάτων. Στα επόμενα εδάφια θα θεωρήσω ότι η ποσότητα ΔE προσεγγίζει ικανοποιητικά τη ΔH . Είναι απολύτως δυνατό να αφήσουμε την αυστηρή εισαγωγή της ενθαλπίας για την αρχή μιας περισσότερο τυπικής παρουσίασης της θερμοδυναμικής. (Πρόκειται πάλι για παράδειγμα της διαδικασίας εκλέπτυνσης, επαναορισμού και επινόησης των εννοιών, καθώς η γνώση και η κατανόηση βαθαίνουν μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων. Είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε, επίσης, ότι μεσολάβησε περισσότερο από ένας αιώνας μεταξύ της έρευνας του Joseph Black πάνω στη θερμότητα και της επινόησης της ενθαλπίας.)

Ορισμένες φορές εμφανίζονται, κατ' εξαίρεση, λίγοι μαθητές που ενοχλούνται από τη διαφορά μεταξύ των διαδικασιών υπό σταθερό όγκο και πίεση. Μπορούμε, λοιπόν, να τους κατευθύνουμε να εξετάσουν λεπτομερέστερα τις συγκεκριμένες έννοιες χωρίς, ωστόσο, να περιπλέξουν τις υπολογιστικές.

5.10 Έργο και θερμότητα κατά την τριβή ολίσθησης

Για να αντιληφθείτε καλύτερα όσα πρόκειται να υποστηρίξουμε, θεω-

ρήστε ως πρότυπο την κατάσταση που εμφανίζεται στο Σχ. 5.10.1: ένα σώμα, ενώ αρχικά ηρεμεί, επιταχύνεται πάνω στο πάτωμα ή στο τραπέζι υπό την επίδραση δύναμης F , η οποία υπερνικά τη δύναμη της τριβής ολίσθησης T . Συμβολίζουμε με Δx_{KM} τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του σώματος και με $v_{KM,T}$ την τελική ταχύτητά του.

Για τις αλλαγές που συμβαίνουν ισχύουν δύο εξισώσεις:
Η εξίσωση του Κ.Μ.:

$$\mathbf{F}_{ολ} \cdot \Delta \mathbf{x}_{KM} = \Delta \left(\frac{1}{2} m v_{KM}^2 \right) \quad (5.10.1)$$

και η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, την οποία παρουσιάσαμε στο εδάφιο 5.8:

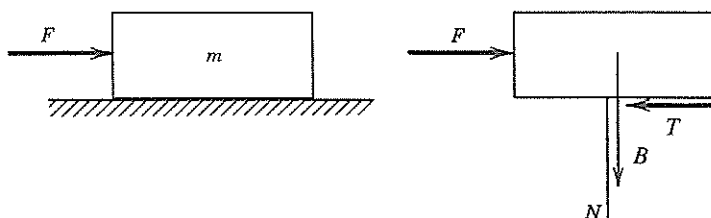
$$\Delta E = Q + W \quad (5.10.2)$$

Στην περίπτωση του Σχ. 5.10.1, οι μόνες μεταβολές εσωτερικών ενεργειών που υπεισέρχονται είναι η μεταβολή της θερμικής και η μεταβολή της κινητικής (λόγω μεταφορικής κίνησης) ενέργειας. Η εξίσωση, λοιπόν, 5.10.2 γίνεται:

$$\Delta E_0 + \Delta E_x = Q + W \quad (5.10.3)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση 5.10.1 του Κ.Μ. στο σώμα, παίρνουμε:

$$(F - T) \Delta x_{KM} = \frac{1}{2} m v_{KM,T}^2 \quad (5.10.4)$$



Σχήμα 5.10.1 Ένα σώμα, ενώ αρχικά ηρεμεί, επιταχύνεται πάνω στο πάτωμα ή στο τραπέζι υπό την επίδραση μιας δύναμης F , η οποία υπερνικά την τριβή ολίσθησης T .

Στο παρόν στάδιο, πρέπει να επιλέξουμε προσεκτικά το σύστημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε την εξίσωση 5.10.3. Η επιλογή μόνο του σώματος είναι *ακατάλληλη*: αν και μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F κατά τη μετακίνηση του κέντρου μάζας, είναι αδύνατο να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης T της τριβής στη διαχωριστική επιφάνεια. Εκεί συμβαίνουν πολύπλοκα φαινόμενα: η μια επιφάνεια χαράσσει την άλλη, οι «ανωμαλίες» τους εξομαλύνονται, οι δύο επιφάνειες κολλάνε και ξεκολλάνε μεταξύ τους, πιέσεις και τάσεις ασκούνται τόσο στο σώμα όσο και στο πάτωμα. Στη διαχωριστική επιφάνεια το έργο πάνω στο σώμα δεν είναι απλώς $T\Delta x_{\text{KM}}$: είναι αδύνατο, λοιπόν να προσδιορίσουμε ακριβώς την ποσότητα W , η οποία εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης 5.10.3⁸.

Σ' αυτήν την περίπτωση, εκμεταλλευόμαστε τη δυνατότητα που διαθέτουμε συχνά κατά την εφαρμογή των νόμων διατήρησης: «σπρώχνουμε την άγνοιά μας κάτω από το χαλί», επιλέγοντας κατάλληλα το σύστημά μας. Στην παρούσα κατάσταση, επιλέγουμε ως σύστημα το *συνδυασμό* του σώματος και του πατώματος. (Είναι, επίσης, δυνατό να συμπεριλάβουμε τον αέρα· ωστόσο, αποκλείοντάς τον μαθαίνουμε κάτι περισσότερο.)

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (5.10.3) στο σύστημα σώμα-πάτωμα, δεν είναι απαραίτητο να ανησυχούμε για την «ανυπότακτη» κατάσταση στη διαχωριστική επιφάνεια: οι δυνάμεις τριβής είναι πλέον εσωτερικές δυνάμεις και δεν ανταλλάσσεται μέσω αυτών έργο με το περιβάλλον· έργο στο σύστημα προσφέρει μόνον η δύναμη F . Επίσης, το σύστημα δεν προσλαμβάνει θερμότητα από το περιβάλλον· η μόνη ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον (δηλαδή, με τον αέρα) συμβαίνει όταν το σύστημα *χάνει* ενέργεια, αφού προηγουμένως αυξηθεί η θερμοκρασία του σώματος και του πατώματος.

Συμβολίζουμε τη συγκεκριμένη απώλεια με $Q_{\text{ατ}}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 5.10.3, παίρνουμε:

$$\Delta E_0 + \frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2 = F\Delta x_{\text{KM}} - Q_{\text{ατ}} \quad (5.10.5)$$

απ' όπου προκύπτει:

8. Ο Sherwood και ο Bernard (1984) μελετούν το πρόβλημα του έργου που εκτελείται στη διαχωριστική επιφάνεια, χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο πρότυπο και αναλύοντας τις συνέπειες. Αναπτύσσουν, μάλιστα, ορισμένες ενδιαφέρουσες απόψεις. Συμβουλεύω, λοιπόν, τον αναγνώστη να διαβάσει το άρθρο τους. Ωστόσο, σε μια σειρά εισαγωγικών μαθημάτων, διασάξω να δαπανήσω χρόνο σε μια τέτοια ανάλυση.

$$\Delta E_{\theta} = F\Delta x_{\text{KM}} - \frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2 - Q_{\text{απ}} \quad (5.10.6)$$

Από την 5.10.6 συμπεραίνουμε ότι: (1) Η αύξηση της εσωτερικής θερμικής ενέργειας του συστήματος πάτωμα-σώμα ισούται ακριβώς με την ποσότητα του έργου της F η οποία δεν μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του σώματος. Και τούτο, με την προϋπόθεση ότι δεν μεταφέρεται θερμότητα στον περιβάλλοντα αέρα. (2) Το εν λόγω «δαπανώμενο» έργο μετατρέπεται απευθείας σε εσωτερική θερμική ενέργεια: η αύξηση της εσωτερικής θερμικής ενέργειας δεν είναι αποτέλεσμα μεταφοράς θερμότητας στο σύστημα. Απ' αυτήν την άποψη, η ποσότητα $F\Delta x_{\text{KM}}$ είναι το πραγματικό έργο που εκτελείται στο σύστημα σώμα-πάτωμα, ενώ το $T\Delta x_{\text{KM}}$ είναι το ψευδοέργο που εκτελείται στο σώμα. Αν η F είναι συμπτωματικά ίση (κατά μέτρο) με την T , οπότε το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, το ψευδοέργο είναι, επίσης, συμπτωματικά ίσο με το πραγματικό έργο· ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι οι δύο ποσότητες ταυτίζονται νοηματικά και ότι το έργο που εκτελείται στο σύστημα είναι μηδενικό.

Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι χρήσιμη, επειδή βοηθά να αποφύγουμε παρανοήσεις και συγχύσεις, λόγου χάρη στη φράση «το έργο μετατρέπεται σε θερμότητα», όταν δεν συμβαίνει μεταφορά θερμότητας. (Κληρονομήσαμε αυτή τη φρασεολογία από τον 19ο αιώνα και ουδέποτε την τροποποιήσαμε, ακόμα και όταν άλλες έννοιες εκλεπτύνθηκαν. Συντελεί, λοιπόν, στην καλλιέργεια της παρανόησης ότι η θερμότητα διαμένει μέσα στα σώματα και ότι, όταν δαπανάται έργο, μεταφέρεται θερμότητα στο σύστημα.) Μπορούμε, λοιπόν, να καταδείξουμε πλέον ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας του συστήματος, η οποία οφείλεται μόνο στη δαπάνη έργου, ισούται με τη μεταβολή της θερμοκρασίας την οποία θα προκαλούσε η μεταφορά ισοδύναμης ποσότητας θερμότητας. Στην πραγματικότητα, ωστόσο, δεν μεταφέρεται θερμότητα.

Με βάση την εξίσωση 5.10.6, μπορούμε να εξιδανικεύσουμε την κατάσταση, θεωρώντας ότι η απώλεια της θερμότητας προς τον αέρα είναι μηδενική και κατανέμοντας με εύλογο τρόπο τη μεταβολή της ολικής θερμικής ενέργειας στο σώμα και στο δάπεδο ή εκτιμώντας προσεγγιστικά τα όρια μεταβολής της θερμοκρασίας του σώματος και του δαπέδου.

Ο αναγνώστης ίσως διαπιστώσει ότι είναι, επίσης, χρήσιμη η ανάλυση της εξής κατάστασης: Στο σύστημα του Σχ. 5.10.1 η δύναμη F έχει αφαιρεθεί και το σώμα κινείται με αρχική ταχύτητα $v_{\text{KM},\alpha}$ ελεύθερα μέχρι να σταματήσει. Η εξίσωση του Κ.Μ. και της διατήρησης της ενέργειας γίνονται αντίστοιχα:

$$-T\Delta x_{\text{KM}} = 0 - \frac{1}{2}mv_{\text{KM},\alpha}^2 \quad (5.10.7)$$

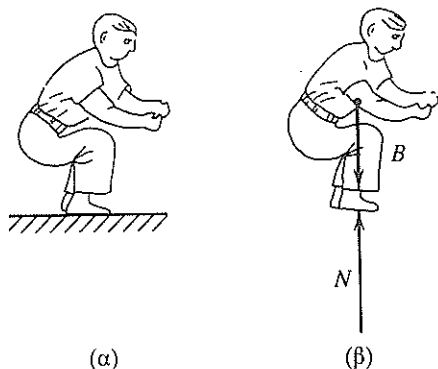
$$\Delta E_{\theta} = \frac{1}{2}mv_{\text{KM},\alpha}^2 - Q_{\text{απ}} \quad (5.10.8)$$

Δεν εκτελείται, λοιπόν, στο σύστημα ή από το σύστημα πραγματικό έργο. Όλη η εσωτερική κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε εσωτερική θερμική ενέργεια, με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει απώλεια θερμότητας προς τον αέρα.

Σχόλιο-συμπέρασμα: Η εξίσωση του Κ.Μ. ενός ιδιαίτερου σώματος μας παρέχει μια απολύτως σωστή αριθμητικά σχέση μεταξύ των δυναμικών μεγεθών. Ορισμένοι όροι της εξίσωσης είναι ποσότητες πραγματικού έργου εκτελούμενου στο σύστημα ή από το σύστημα· ωστόσο, επειδή άλλες ποσότητες δεν αποτελούν πραγματικό έργο, πρέπει να τις περιγράψουμε ως ψευδοέργο. Η ορθή ερμηνεία των μετατροπών της ενέργειας προκύπτει από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας — όχι από την εξίσωση του Κ.Μ. Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας πρέπει να εφαρμόζεται στο *σύστημα* που έχουμε κατάλληλα προσδιορίσει. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αποδεικνύεται μέσω της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας ότι το ψευδοέργο [μια ποσότητα η οποία *μοιάζει* με έργο (π.χ. η ποσότητα $T\Delta x_{\text{KM}}$), αλλά δεν είναι πραγματικό έργο της δύναμης κατά τη συγκεκριμένη μετατόπιση] είναι αριθμητικά ίσο με την ποσότητα του πραγματικού έργου μιας άλλης δύναμης (π.χ. της F), το οποίο, λόγου χάρη, δαπανήθηκε. (Παρατηρήστε ότι η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι ανάλογη μιας άλλης που μελετήσαμε νωρίτερα, στο 3ο Κεφάλαιο: Όταν κρατάμε στο χέρι μας ένα σώμα, η προς τα κάτω δύναμη που ασκείται από το σώμα στο χέρι μας είναι *αριθμητικά ίση* με το βάρος του σώματος· ωστόσο, η δύναμη αυτή δεν ταυτίζεται με το βάρος του σώματος. Η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη στο σώμα και η δύναμη από επαφή που ασκεί το σώμα στο χέρι μας είναι δύο απολύτως διαφορετικές δυνάμεις από νοηματική άποψη, ακόμα κι αν είναι αριθμητικά ίσες μεταξύ τους.)

5.11 Παραμορφώσιμα συστήματα και δυνάμεις μηδενικού έργου

Θεωρήστε την περίπτωση όπου ένας άνθρωπος μάζας m πηδά κατακόρυφα προς τα πάνω (Σχ. 5.11.1). Με $\bar{N}$ συμβολίζουμε τη μέση κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στον άνθρωπο. Τη στιγμή που τα πόδια του ανθρώπου εγκαταλείπουν το έδαφος, το κέντρο μάζας του έχει ανυψωθεί κατά



Σχήμα 5.11.1 Οι δυνάμεις που ασκούνται σε έναν άνθρωπο ο οποίος πηδά κατακόρυφα προς τα πάνω.

Δh_{KM} και έχει αποκτήσει ταχύτητα $v_{\text{KM},\tau}$. Στην περίπτωση αυτή, από την εξίσωση του Κ.Μ. προκύπτει:

$$(\bar{N} - mg)\Delta h_{\text{KM}} = \frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2 \quad (5.11.1)$$

Η ποσότητα $\bar{N}\Delta h_{\text{KM}}$ είναι ψευδοέργο: μοιάζει με έργο που η κάθετη δύναμη $\bar{N}$ εκτέλεσε πάνω στον άνθρωπο, αλλά δεν είναι πραγματικό έργο: η $\bar{N}$ είναι δύναμη μηδενικού έργου. Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας προκύπτει, βεβαίως, ότι η ποσότητα αυτή είναι *αριθμητικά ίση* με το έργο που εκτελεί κάποια άλλη δύναμη· η ερμηνεία προκύπτει, ωστόσο, από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και όχι από την εξίσωση του Κ.Μ. Παράλληλα, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την ποσότητα $mg\Delta h_{\text{KM}}$ ως πραγματική ποσότητα έργου που εκτελεί ο άλτης εις βάρος της δύναμης της βαρύτητας, αν θεωρήσουμε τον άλτη ως το σύστημα το οποίο μελετάμε. Στο σύστημα άλτης-Γη εμφανίζεται μεταβολή της εσωτερικής δυναμικής ενέργειας.

Αρχικά, ας εφαρμόσουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα άλτης-Γη. Στο σύστημα αυτό δεν εκτελείται εξωτερικό έργο, άρα $W = 0$. Η μόνη απώλεια θερμότητας $Q_{\text{ατ}}$ προέρχεται από τον άλτη προς τον περιβάλλοντα αέρα. Οι μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας που υπεισέρχονται είναι: της χημικής (που προκαλεί τα βιολογικά φαινόμενα στους μύς), της θερμικής (όταν εκτελούμε την προσπάθεια αυτή, ζεσταινόμαστε), της κινητικής, που οφείλεται στη μεταφορική ($\frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2$), της κινητικής, λόγω περιστροφής (τινάζουμε τα χέρια μας προς τα κάτω) και της δυναμικής, λόγω της βαρύτητας ($+mg\Delta h_{\text{KM}}$). Έτσι,

$$\Delta E_x + \Delta E_\theta + \frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2 + \Delta E_{\text{κιν,περ}} + mg\Delta h_{\text{KM}} = -Q_{\text{ατ}} \quad (5.11.2)$$

Αν αποφασίσουμε να αμελήσουμε το τίναγμα των χεριών και τα θερμικά φαινόμενα, προκύπτει:

$$\Delta E_x = -\frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2 - mg\Delta h_{\text{KM}} \quad (5.11.3)$$

Συμπέρασμα: η κινητική ενέργεια, λόγω της κίνησης προς τα πάνω, και η αύξηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος άλτης-Γη προέρχονται από τη μείωση της χημικής ενέργειας στο σώμα του άλτη. Η χημική ενέργεια μετατρέπεται στις άλλες μορφές ενέργειας μέσω εσωτερικών δυνάμεων και μετατοπίσεων από τις οποίες παράγεται έργο. Η διαδικασία αυτή, ωστόσο, είναι αδύνατο να περιγραφεί ποσοτικά με λεπτομέρεια. Η εξίσωση 5.11.1 του Κ.Μ. δείχνει ότι το δεξιό μέλος της εξίσωσης 5.11.3 ισούται συμπτωματικά με $-\bar{N}\Delta h_{\text{KM}}$, ανεξάρτητα από το ότι το $\bar{N}$ είναι δύναμη μηδενικού έργου.

Χρήσιμα συμπεράσματα προκύπτουν, επίσης, αν εφαρμόσουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας μόνο στον άλτη και όχι στο σύστημα άλτης-Γη. Σ' αυτήν την περίπτωση, η βαρυτική δύναμη εκτελεί έργο $W = -mg\Delta h_{\text{KM}}$ και η ποσότητα ΔE_s πρέπει να θεωρηθεί ίση με μηδέν· στην αντίθετη περίπτωση, τη συνυπολογίζουμε δύο φορές. Αμελώντας τα θερμικά φαινόμενα και την περιστροφή και εφαρμόζοντας την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, προκύπτει πάλι η εξίσωση 5.11.3:

$$\Delta E_x = -\frac{1}{2}mv_{\text{KM},\tau}^2 - mg\Delta h_{\text{KM}}$$

Η ερμηνεία της, ωστόσο, είναι διαφορετική από εκείνη που προκύπτει, αν θεωρήσουμε το συνδυασμό άλτης-Γη: ο όρος $mg\Delta h_{\text{KM}}$ εμφανίζεται από την αρχή στο δεξιό μέλος της εξίσωσης — είναι το έργο που εκτελεί η βαρυτική δύναμη· δεν εμφανίζεται στο αριστερό μέλος ως αύξηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Έτσι, ενισχύεται, επίσης, η άποψη ότι πρέπει να αναφερόμαστε στη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος αλληλεπιδρώντων σωμάτων (άλτης-Γη) και όχι στη δυναμική ενέργεια την οποία δήθεν διαθέτει ένα ξεχωριστό σώμα σε ορισμένο ύψος.

Συνιστώ στον αναγνώστη να εκτελέσει παρόμοια ανάλυση για την περίπτωση όπου ένας άνθρωπος στέκεται πάνω σε πατίνι και σπρώχνει έναν ακλόνητο τοίχο. Η κάθετη δύναμη $\bar{N}$ που ασκεί ο τοίχος στον πατινέρ, είναι, επίσης, δύναμη μηδενικού έργου. Η κινητική ενέργεια του πατινέρ προέρχεται από τη μεταβολή της χημικής ενέργειάς του, με τη μεσολάβηση του έργου που εκτελούν δυνάμεις και μετατοπίσεις ποσοτικά απροσδιόριστες.

5.12 Κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο

Πολλοί μαθητές συναντούν μεγάλες δυσκολίες στη μελέτη ενός αντικείμενου που κυλά κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου· και τούτο, επειδή εισάγουμε αιφνιδιαστικά την έννοια της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής και δεν αναλύουμε τη συνθήκη της κύλισης χωρίς ολίσθηση. Αποτέλεσμα: απομνημονεύουν τις έννοιες χωρίς να τις κατανοούν. Στο πλαίσιο μιας εισαγωγικής σειράς μαθημάτων, οι δυσκολίες είναι αδύνατο να εκμηδενιστούν· μπορούμε, ωστόσο, να αποσαφηνίσουμε σημαντικά το φυσικό περιεχόμενο της κατάστασης, διαχωρίζοντας σαφώς την εξίσωση του Κ.Μ. από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και ερμηνεύοντας προσεκτικά την τελευταία.

Θεωρήστε τη συνηθισμένη κατάσταση: σφαιρικό ή κυλινδρικό αντικείμενο μάζας m , ακτίνας R και ροπής αδράνειας I , κατρακυλά πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (Σχ. 5.12.1). Το σώμα εκκινεί από την ηρεμία και, όταν το κέντρο μάζας του έχει μετακινηθεί κατά $\Delta s_{\text{ΚΜ}}$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα, λόγω μεταφοράς, $v_{\text{ΚΜ}}$ και γωνιακή ταχύτητα ω . Η δύναμη τριβής μεταξύ του κυλιόμενου σώματος και του επιπέδου συμβολίζεται με T . Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Κ.Μ., προκύπτει:

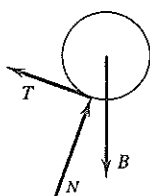
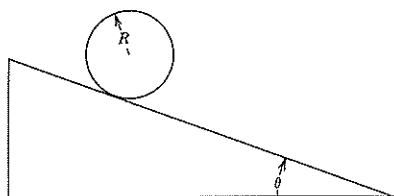
$$(mg\eta\mu\theta - T)\Delta s_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{2}mv_{\text{ΚΜ}}^2 \quad (5.12.1)$$

Επειδή το W και το Q είναι μηδενικά, εφαρμόζοντας την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα αντικείμενο-επίπεδο-Γη, προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} + \Delta E_{\text{κ. μετ}} + \Delta E_{\text{κ. περ}} + \Delta E_{\delta} = 0$$

Αντικαθιστώντας τις κατάλληλες ποσότητες, προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} + \frac{1}{2}mv_{\text{ΚΜ}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\eta\mu\theta\Delta s_{\text{ΚΜ}} = 0 \quad (5.12.2)$$



Σχήμα 5.12.1 Μια σφαίρα ή ένας κύλινδρος κυλά προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. (Θεωρούμε ότι το επίπεδο δεν παραμορφώνεται στην περιοχή επαφής του με το σώμα.)

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 5.12.1 και 5.12.2 και λύνοντας ως προς τη μεταβολή της θερμικής ενέργειας, λαμβάνουμε:

$$\Delta E_0 = T\Delta s_{\text{KM}} - \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.12.3)$$

Οι θερμικές απώλειες, λοιπόν, προσδιορίζονται από τη διαφορά μεταξύ των τιμών των δύο όρων του δεξιού μέλους της εξίσωσης 5.12.3.

Οι απαραίτητες συμπληρωματικές πληροφορίες προκύπτουν από τη δυναμική εξίσωση:

$$M_{\text{ολ}} = I\omega' \quad (5.12.4)$$

όπου $M_{\text{ολ}}$ είναι η ολική ροπή ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του περιστρεφόμενου σώματος και ω' η γωνιακή επιτάχυνση.

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης 5.12.4 ως προς τη μεταβολή της γωνίας φ , προκύπτει για την περιστροφή μια εξίσωση ανάλογη μ' εκείνη της μετατόπισης του Κ.Μ.:

$$M_{\text{ολ}} \Delta\varphi = \Delta \left(\frac{1}{2} I\omega^2 \right) \quad (5.12.5)$$

Για την ειδική περίπτωση του Σχ. 5.12.1, η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$TR\Delta\varphi = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.12.6)$$

όπου $\Delta\varphi$ είναι η συνολική γωνία περιστροφής του σώματος από τη στιγμή που το σώμα άρχισε να κυλά.

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, το νόημα της εξίσωσης 5.12.3 σε διάφορες συνθήκες κύλισης:

1. Αν το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η περιμετρική μετατόπιση (το μήκος του τόξου) $R\Delta\varphi$ ισούται με τη γραμμική μετατόπιση Δs_{KM} .⁹ Όταν, λοιπόν, το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

9. Πολλοί μαθητές εκπλήσσονται όταν διαπιστώνουν ότι στην περίπτωση που το σώμα κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει ότι $v_{\text{KM}} = R\omega$. Το μεγαλύτερο μέρος της δυσκολίας οφείλεται στο ότι δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια της ταχύτητας. Τους βοηθάμε, λοιπόν, αν τους κατευθύνουμε να μελετήσουν συγκεκριμένα το πρόβλημα, προσδιορίζοντας τη συνολική μετατόπιση και συγκρίνοντας τη γραμμική μετατόπιση Δs_{KM} του κέντρου μάζας με το μήκος $R\Delta\varphi$ του τόξου. Πολλοί μαθητές δεν μπορούν να συλλάβουν αφηρημένα τη συγκεκριμένη σχέση· πρέπει, λοιπόν, να τους κατευθύνουμε να κυλήσουν οι ίδιοι ένα κυλινδρικό αντικείμενο.

$$\Delta s_{\text{KM}} = R\Delta\varphi \quad (5.12.7)$$

και η εξίσωση 5.12.6 γίνεται:

$$T\Delta s_{\text{KM}} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.12.8)$$

Θέτοντας την εξίσωση 5.12.8 στην 5.12.3, λαμβάνουμε:

$$\Delta E_{\theta} = 0 \quad (5.12.9)$$

Συμπέρασμα: στην περίπτωση της κύλισης χωρίς ολίσθηση, δεν υπάρχουν θερμικές απώλειες. Η μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος συνδέεται μόνο με την ολική κινητική ενέργεια του κυλιόμενου αντικειμένου. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε αλγεβρικά αυτό το συμπέρασμα, επιστρέφοντας στις προηγούμενες σχέσεις.

2. Θεωρούμε ότι το σώμα ολισθαίνει μερικώς πάνω στο επίπεδο (στην 1η περίπτωση μόνον κυλούσε). Ισχύει:

$$\Delta s_{\text{KM}} > R\Delta\varphi \quad (5.12.10)$$

Η εξίσωση 5.12.6 ισχύει, επίσης. Προκύπτει, λοιπόν, ότι:

$$T\Delta s_{\text{KM}} > \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.12.11)$$

Στις δεδομένες συνθήκες, από την εξίσωση 5.12.3 προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} > 0 \quad (5.12.12)$$

Συμπέρασμα: μέρος της μείωσης της δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια. Αυτό το στοιχείο χαρακτηρίζει τη φυσιολογική κύλιση στην οποία υπεισέρχεται, μερικώς, ολίσθηση.

3. Θεωρήστε, τώρα, την περίπτωση όπου:

$$\Delta s_{\text{KM}} < R\Delta\varphi \quad (5.12.13)$$

(Αυτό σημαίνει ότι το αντικείμενο περιστρέφεται γρηγορότερα απ' όσο πε-

ριοστρέφεται όταν κυλά χωρίς να ολισθαίνει.) Στο πλαίσιο της προηγούμενης ανάλυσης, προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} < 0 \quad (5.12.14)$$

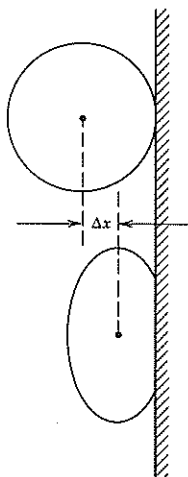
Βέβαια, το αποτέλεσμα αυτό απαγορεύεται από τον 2ο Νόμο της Θερμοδυναμικής: Το αντικείμενο είναι δυνατό να περιστρέφεται με τον συγκεκριμένο τρόπο μόνον αν διοχετεύσουμε έργο. Η απαίτηση αυτή, ωστόσο, δεν περιλαμβάνεται στις προδιαγραφές του συστήματος που μελετάμε.

Μη ελαστική (Αγχυσίω 7239405) 5.13 Ηλαστική κρούση

Θεωρήστε την ακόλουθη περίπτωση: μια σφαίρα χτυπά και αναπηδά πάνω σε ακλόνητο τοίχο. Υποθέστε, επίσης, ότι οι κατακόρυφες επιδράσεις είναι αμελητέες και ότι η σφαίρα δεν περιστρέφεται καθόλου (Σχ. 5.13.1). Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις του Κ.Μ. και της διατήρησης της ενέργειας για το χρονικό διάστημα μεταξύ της στιγμής που η σφαίρα έρχεται σε επαφή με τον τοίχο και της στιγμής κατά την οποία η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι μηδενική. Παραλείποντας το δείκτη που χαρακτηρίζει τη μετατόπιση και την ταχύτητα του κέντρου μάζας ως ευκόλως εννοούμενο, από την εξίσωση του Κ.Μ. προκύπτει:

$$-\bar{N}\Delta x = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.13.1)$$

όπου $\bar{N}$ είναι η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στην μπάλα, Δx η μετατό-



Σχήμα 5.13.1 Πλαστική κρούση σφαίρας σε τοίχο.

πιση του κέντρου μάζας της μπάλας στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της επαφής μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή της αρχικής επαφής.

Ο όρος $\bar{N}\Delta x$ είναι ψευδοέργο: δεν υπάρχει τρόπος να υπολογίσουμε το έργο που εκτελεί ο τοίχος στην μπάλα κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης που συμβαίνει λόγω της κρούσης. Ωστόσο, αν μελετήσουμε το σύστημα μπάλα-τοίχος, τόσο το W όσο και το Q είναι μηδενικά· έτσι από τη γενική εξίσωση διατήρησης της ενέργειας προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} + \Delta E_{\kappa, \text{μετ}} + \Delta E_{\delta} = 0 \quad (5.13.2)$$

όπου ΔE_{δ} είναι η δυναμική ενέργεια συμπίεσης που αποθηκεύεται στις παραμορφώσεις του συστήματος μπάλα-τοίχος.

Αναδιατάσσοντας την εξίσωση 5.13.2, προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta} = \frac{1}{2}mv^2 - \Delta E_{\delta} \quad (5.13.3)$$

Αν και η εξίσωση 5.13.1 δεν μας πληροφορεί άμεσα για οτιδήποτε, η εξίσωση 5.13.3 περιέχει πλούτο πληροφοριών. Μας πληροφορεί ότι στην περίπτωση που η αύξηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, λόγω συμπίεσης, ισούται με την αρχική κινητική ενέργεια της μπάλας, δεν υπάρχει οποιαδήποτε αύξηση στην εσωτερική θερμική ενέργεια· δεν εμφανίζονται, δηλαδή, θερμικές απώλειες. Μ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται η τέλεια ελαστική κρούση (όπου ο συντελεστής απόδοσης ισούται με μονάδα): η ταχύτητα του κέντρου μάζας (οπότε και η κινητική ενέργεια) αποκαθίσταται μόλις η κίνηση αντιστραφεί (μπορούμε να μελετήσουμε την αντίστροφη διαδικασία, γράφοντας τις ίδιες εξισώσεις, όπως προηγουμένως, με κατάλληλη, ωστόσο, τροποποίηση των αλγεβρικών προσήμων).

Στην άλλη ακραία περίπτωση, όπου δεν αυξάνεται η δυναμική ενέργεια (λόγου χάρη, όταν μια μπάλα από στόκο χτυπά στον τοίχο), η αύξηση της θερμικής εσωτερικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με την κινητική ενέργεια της μπάλας (με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας από ή προς το σύστημα μπάλα-τοίχος). Μ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται η ιδανική πλαστική κρούση με μηδενικό συντελεστή απόδοσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αν θέλουμε να διερευνήσουμε περισσότερο το φαινόμενο (λόγου χάρη, να εξετάσουμε αν ένα βλήμα από μόλυβδο με δεδομένη μάζα και αρχική ταχύτητα θα λιώσει, χτυπώντας σε κάποιο τοίχο) είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε ακριβείς υποθέσεις για την κατανομή της θερμικής ενέργειας μεταξύ των τμημάτων του συστήματος. Οι συγκεκριμένες υποθέσεις διατυπώνονται με μεγαλύτερη σαφήνεια και ευκολία

αν ορίσουμε με ακρίβεια το σύστημα και γράψουμε μια εξίσωση παρόμοια με την 5.13.3. Αντίθετα, η εξίσωση του Κ.Μ. δεν βοηθά καθόλου.

Αν δοθούν οι κατάλληλες πληροφορίες ή αν διατυπώσουμε τις κατάλληλες υποθέσεις, η εξίσωση 5.13.3 βοηθά, επίσης, στη μελέτη της ημιελαστικής κρούσης. (Πρόκειται για ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ των δύο ακραίων περιπτώσεων που μελετήσαμε.)

5.14 Διευκρινιστικές ασκήσεις

Η κίνηση του αυτοκινήτου είναι μια συνηθισμένη εμπειρία. Η εξέταση, λοιπόν, του πραγματικού έργου, του ψευδοέργου και των ενεργειακών μετατροπών που υπεισέρχονται σ' αυτό το φαινόμενο είναι πολύτιμη άσκηση για τους μαθητές. Επιταχύνουμε ένα αυτοκίνητο, που αρχικά ηρεμεί, μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα v . Από την εξίσωση του Κ.Μ. (για την οριζόντια διεύθυνση), προκύπτει:

$$(F_{\tau\phi} - F_{\text{υπ}})\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.14.1)$$

$F_{\tau\phi}$ είναι η δύναμη της τριβής που ασκείται από το οδόστρωμα στους κινητήριους τροχούς. Η $F_{\text{υπ}}$ περιλαμβάνει τις υπόλοιπες δυνάμεις που αντιστέκονται στην κίνηση. (Ο δείκτης Κ.Μ., ο οποίος δηλώνει ότι πρόκειται για μετατόπιση και ταχύτητα του κέντρου μάζας, παραλείπεται ως ευκόλως εννοούμενος.) Αν και η δύναμη $F_{\tau\phi}$ προσδίδει επιτάχυνση, είναι δύναμη μηδενικού έργου. Οι όροι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης 5.14.1 είναι ψευδοέργα και όχι πραγματικά έργα.

Θεωρούμε το αυτοκίνητο ως το σύστημα που μελετάμε και εφαρμόζουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, θέτοντας $W = 0$:

$$\Delta E_{\theta} + \Delta E_x + \Delta E_{\kappa, \text{μετ}} + \Delta E_{\kappa, \text{εσ}} + \Delta E_{\text{ποικ}} = -Q_{\text{ατ}} \quad (5.14.2)$$

Στο δεξιό μέλος εμφανίζεται η απώλεια της θερμότητας στον περιβάλλοντα αέρα. Μπορούμε, λοιπόν, να προχωρήσουμε σε εξιδανικεύσεις και να προσδιορίσουμε τη σημασία κάθε όρου. Είναι, ωστόσο, σημαντικό να επισημάνουμε ότι η εσωτερική χημική ενέργεια, που αρχικώς βρισκόταν αποθηκευμένη στο καύσιμο, μετατρέπεται, μέσω εσωτερικών δυνάμεων, σε κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου, σε αύξηση της θερμικής ενέργειας κτλ. Παράλληλα, πρέπει να τονίσουμε ότι κανένα εξωτερικό έργο δεν εκτελείται στο σύστημα, αν και υπάρχει δύναμη που προσδίδει επιτάχυνση.

Ο Sherwood (1983) προτείνει μια σειρά άλλων απλών προβλημάτων

που βοηθούν στην αποσαφήνιση του εννοιολογικού περιεχομένου των εξισώσεων του Κ.Μ. και της διατήρησης της ενέργειας. Βοηθούν, επίσης, στην αποσαφήνιση της διαφοράς μεταξύ των δύο εξισώσεων. Από το άρθρο αυτό δανεισθήκα τα επόμενα προβλήματα:

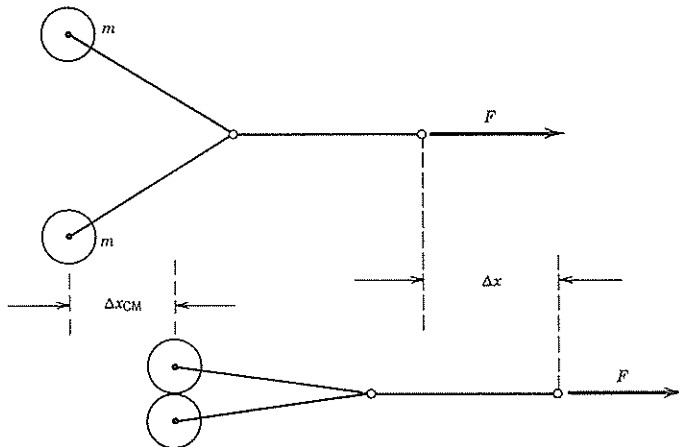
1. Ο Sherwood αποδίδει το επόμενο πρόβλημα στον Michael Weissman. Θεωρήστε την περίπτωση του σχήματος 5.14.1: επιταχύνουμε, μέσω μιας δύναμης F , δύο δίσκους συνδεδεμένους με νήμα. Οι δίσκοι κινούνται χωρίς τριβή. (Παρατηρήστε ότι πρόκειται για σύστημα μεταβλητού σχήματος και ότι η δύναμη μετατοπίζεται περισσότερο από το κέντρο μάζας. Θεωρούμε, επίσης, ότι μόλις οι δίσκοι έρθουν σε επαφή, η κρούση είναι πλαστική.)

Αν οι δίσκοι εκκινούν από την ηρεμία, από την εξίσωση του Κ.Μ., προκύπτει:

$$F\Delta x_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{2} (2m)v^2 \quad (5.14.3)$$

Θεωρώντας ως σύστημα τους δύο δίσκους, το εξωτερικό έργο που εκτελείται σ' αυτό το σύστημα είναι $F\Delta x$. Συνεπώς, από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας), προκύπτει:

$$\Delta E_0 + \Delta E_{\text{κ, μετ}} = F\Delta x \quad (5.14.4)$$



Σχήμα 5.14.1 Κάτοψη δύο δίσκων που κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε στρώμα αέρα. Οι δίσκοι συνδέονται με νήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η εξωτερική δύναμη F επιταχύνει το σύστημα.

η οποία αναδιατάσσεται ως εξής:

$$\Delta E_0 = F\Delta x - \frac{1}{2}(2m)v^2 \quad (5.14.5)$$

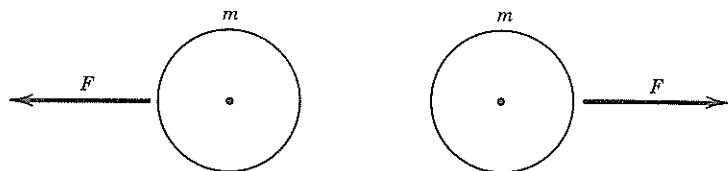
Παρατηρούμε ότι η μετατόπιση Δx της δύναμης F είναι μεγαλύτερη από τη μετατόπιση Δx_{KM} του κέντρου μάζας και ότι το πραγματικό έργο που εκτελείται στο σύστημα είναι μεγαλύτερο από το ψευδοέργο που εμφανίζεται στην εξίσωση του Κ.Μ. Η διαφορά των έργων καταναλώνεται στα φαινόμενα πλαστικής παραμόρφωσης και ισούται με την αύξηση της εσωτερικής θερμικής ενέργειας. (Μπορούμε να διατυπώσουμε ένα σχετικό αριθμητικό πρόβλημα, στο οποίο θα ζητείται η τελική ταχύτητα v και η ποσότητα της ενέργειας που καταναλώθηκε, αν δοθούν η F , η Δx , η m και το μήκος του νήματος που συνδέει τους δίσκους.)

Παραλλαγή του προβλήματος είναι η περίπτωση μιας αλυσίδας που αρχικώς βρίσκεται «κουλουριασμένη» πάνω στο τραπέζι. Ασκώντας οριζόντια δύναμη στο ένα άκρο της αλυσίδας, η αλυσίδα τεντώνεται και επιταχύνεται πάνω στο τραπέζι. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επίσης, η μετατόπιση της ασκούμενης δύναμης είναι μεγαλύτερη από τη μετατόπιση του κέντρου μάζας της αλυσίδας. Η εσωτερική θερμική ενέργεια αυξάνεται, λόγω πλαστικής παραμόρφωσης, ακόμα κι αν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ της αλυσίδας και του τραπεζιού.

2. Θεωρήστε δύο πανομοιότυπα σώματα μάζας m που αρχικώς ηρεμούν πάνω σε ένα τραπέζι χωρίς τριβές. Απομακρύνουμε τα σώματα μεταξύ τους, ασκώντας πάνω τους ίσες δυνάμεις F (Σχ. 5.14.2). Αν θεωρήσουμε ότι στο σύστημα περιλαμβάνονται *μόνο* τα δύο σώματα, από την εξίσωση του Κ.Μ. προκύπτει:

$$(F - F)\Delta x_{\text{KM}} = \frac{1}{2}(2m)v_{\text{KM}}^2 = 0 \quad (5.14.6)$$

Επειδή στο δεξιό μέλος υπάρχει το μηδενικό, ίσως το αποτέλεσμα φανεί τετριμμένο· ωστόσο, για τους μαθητές δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο. Στην εξίσωση δίνεται έμφαση στο ότι το κέντρο μάζας του συστήματος δεν μετατοπίζεται ούτε αποκτά ταχύτητα. Στο σύστημα, ωστόσο, εκτελείται έργο και τα ιδιαίτερα τμήματά του αποκτούν κινητική ενέργεια. Στη μελέτη αυτής της κατάστασης εφαρμόζουμε διαισθητικά, και όχι τυπικά, την εξίσωση διατή-



Σχήμα 5.14.2 Κάτοψη συστήματος δύο σωμάτων που κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε στρώμα αέρα. Δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις F επιταχύνουν τα σώματα.

ρησης της ενέργειας. Ωστόσο, η τυπική μελέτη απλών περιπτώσεων βοηθά στην αποσαφήνιση της μεθόδου που χρησιμοποιούμε κατόπιν, σε σύνθετες καταστάσεις, όπου η διαίσθηση αποτυγχάνει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, εφαρμόζοντας τυπικά την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, προκύπτει:

$$\Delta E_{\text{κ. μετ}} = W = 2F\Delta x \quad (5.14.7)$$

όπου Δx είναι το μήκος της μετατόπισης κάθε σώματος.

Η εξίσωση 5.14.7 λαμβάνει τη μορφή

$$2F\Delta x = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (5.14.8)$$

όπου v είναι η ταχύτητα που αποκτά κάθε σώμα. Μπορούμε, βέβαια, να γράψουμε διαισθητικά κατευθείαν το αποτέλεσμα αυτό· μπορούμε, ωστόσο, να δικαιολογήσουμε μόνο την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.

5.15 Σπειροειδής επανάληψη

Στην παρούσα μελέτη του τρόπου διδασκαλίας της φυσικής επανειλημμένα επισημάναμε την ανάγκη να επανερχόμαστε, «σπειροειδώς», στις έννοιες. Έτσι, οι μαθητές επαναλαμβάνουν και συναντούν πάλι τις σημαντικές ιδέες και τις μεθόδους συλλογισμού σε πλουσιότερο και πιο εκλεπτυσμένο πλαίσιο. Στο παρόν εδάφιο παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα σπειροειδούς επανάληψης. Στο παράδειγμα αυτό εφαρμόζουμε τον τρόπο υπολογισμού της ορμής σε μια ελαστική κρούση δύο διαστάσεων.

Ο τύπος της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός σωματιδίου κινούμενου με γραμμική ταχύτητα v , σε κύκλο ακτίνας R , είναι:

$$\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{R} \quad (5.15.1)$$

Συνήθως, ο τύπος προκύπτει αρχικά από κινηματική μελέτη. Υπολογίζουμε, δηλαδή, την επιτάχυνση που συνδέεται με τη συνεχή απόκλιση από την εφαπτομένη του κύκλου ή σχεδιάζουμε τη μεταβολή του διανύσματος της γραμμικής ταχύτητας μεταξύ δύο θέσεων του σωματιδίου πάνω στο τόξο. Κατόπιν, υπολογίζουμε τη μεταβολή της ταχύτητας, όταν το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν.

Στην Πρόταση IV του βιβλίου I των «Principia», ο Νεύτων παραθέτει μια απλή απόδειξη με τη βοήθεια της δυναμικής. Η απόδειξη του Νεύτωνα έχει προσεχτεί ελάχιστα, ίσως επειδή είναι διατυπωμένη απολύτως περιφραστικά και δεν συνοδεύεται με γεωμετρικά σχήματα ή αλγεβρικές εξισώσεις. (Στο σχόλιο που υπάρχει μετά τα πορίσματα της πρότασης, ο Νεύτων αναφέρει ότι «... με παρόμοια θεωρήματα, ο κ. Huygens, στο άριστο βιβλίο του "De Horologio Oscillatorio", συνέκρινε τη δύναμη της βαρύτητας με την κεντρομόλο δύναμη των περιστρεφόμενων σωμάτων». Ο ίδιος ο Νεύτων, λοιπόν, δεν έδωσε τόση σημασία στην απόδειξη, ίσως επειδή είχε προηγηθεί ο Huygens.)

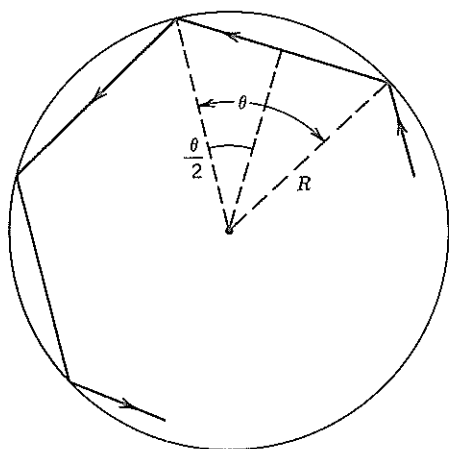
Η απόδειξη του Νεύτωνα (αν τη μεταφράσουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά) αναφέρει τα εξής (βλ. Σχ. 5.15.1): Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m , που κινείται με ταχύτητα v μέσα σε έναν ακλόνητο κύλινδρο ακτίνας R . Αρχικά, υποθέστε ότι το σωματίδιο κινείται κατά μήκος των πλευρών του εγγεγραμμένου στον κύλινδρο πολυγώνου και συγκρούεται ελαστικά με το τοίχωμα του κυλίνδρου σε κάθε κορυφή του πολυγώνου. Σε κάθε κρούση, η μεταβολή ΔJ της ορμής δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta J = 2mv\eta\mu\frac{\theta}{2} \quad (5.15.2)$$

Ο χρόνος Δt που χρειάζεται για να διανύσει το σωματίδιο τη μια πλευρά του πολυγώνου, δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta t = \frac{2R}{v}\eta\mu\frac{\theta}{2} \quad (5.15.3)$$

Επειδή Δt είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων,



Σχήμα 5.15.1 Σωματίδιο μάζας m κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος των πλευρών ενός πολυγώνου. Το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο ακτίνας R . Σε κάθε κορυφή του πολυγώνου το σωματίδιο συγκρούεται ελαστικά με το τοίχωμα του κυλίνδρου. Δεν υπεισέρχονται βαρυτικά φαινόμενα.

ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής προκύπτει διαιρώντας την Εξ. 5.15.2 με την Εξ. 5.15.3. Η μέση δύναμη $\bar{F}$ που δρα στο σωματίδιο ισούται με τον μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής (2ος Νόμος). Προκύπτει, λοιπόν, η σχέση:

$$\bar{F} = \frac{mv^2}{R} \quad (5.15.4)$$

(Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι δεν είναι απαραίτητη οποιαδήποτε προσέγγιση μικρής γωνίας.) Ο Νεύτων θεωρεί ότι η συχνότητα των συγκρούσεων αυξάνει συνεχώς, μέχρις ότου η δύναμη που ασκείται από το τοίχωμα στο σωματίδιο γίνεται, οριακά, συνεχής: δεν αποτελείται πλέον από σειρά ευδιάκριτων ωθήσεων.

Η ανάλυση έχει μεγάλη παιδαγωγική αξία, όχι επειδή αντικαθιστά την απόδειξη που προκύπτει (νωρίτερα) στο πλαίσιο της κινηματικής αλλά επειδή τη συμπληρώνει σημαντικά. Μας δίνεται η ευκαιρία να επιστρέψουμε στην ιδέα της κεντρομόλου επιτάχυνσης και της κεντρομόλου δύναμης από μια απολύτως νέα σκοπιά: έχει ήδη παρέλθει ορισμένο χρονικό διάστημα και έχουμε ήδη αναπτύξει την έννοια της ορμής και τον διανυσματικό χαρακτήρα της. Το παρόν πλαίσιο, λοιπόν είναι πλούσιο και σημαντικό από εννοιολογική άποψη για τους εξής λόγους: (1) Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική μεταβολή της ορμής κατά την αναπήδηση στον τοίχο, προκύπτει ένα σημαντικό αποτέλεσμα, και, ταυτόχρονα, εμβαθύνουμε στο φυσικό περιεχόμενο του προβλήματος· (2) η αναπήδηση δεν γίνεται κάθετα στο τοίχωμα· (3) το παράδειγμα δεν είναι στείρα άσκηση στο πλαίσιο της εργασίας για το σπίτι, όπως οι ασκήσεις που υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου, χωρίς να συνδέονται με άλλα φαινόμενα· (4) αν εμβαθύνουμε στη μελέ-

τη αυτή, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε αργότερα τη γνώση μας για τη μεταβολή της ορμής στη διατύπωση της κινητικής θεωρίας του ιδανικού αερίου.

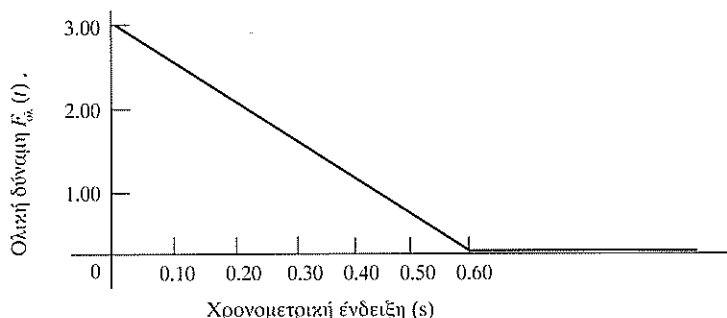
Η *προτεραιότητα* που θα δώσουμε στην παρουσίαση ενός από τους τρόπους υπολογισμού της κεντρομόλου δύναμης ή της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι, ίσως, λιγότερο σημαντική από τη σπειροειδή επανάληψη. Αν αναπτύξουμε την έννοια της ορμής πριν από τη μελέτη της κυκλικής κίνησης, είναι δυνατόν, αρχικά, να παρουσιάσουμε την απόδειξη του παρόντος εδαφίου και κατόπιν να την εμπλουτίσουμε, μελετώντας το ίδιο θέμα από κινηματική άποψη. Δεν είναι απαραίτητο να δαπανήσουμε πολύτιμο χρόνο από το μάθημα στην παρουσίαση του δεύτερου τρόπου: μπορούμε να αναθέσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα ως εργασία για το σπίτι και να κατευθύνουμε τους μαθητές στη λύση του, μέσω σωματικών ερωτήσεων.

Οι συγκεκριμένες ερωτήσεις είναι απαραίτητες στους περισσότερους μαθητές. Στο παρόν στάδιο, ελάχιστοι είναι έτοιμοι να προχωρήσουν στην ανάλυση, χωρίς καθοδήγηση. Αν η παρουσίαση του προβλήματος είναι δυσνόητη, οι μαθητές κάθονται απλώς και «ατενίζουν» το πρόβλημα, χωρίς ούτε καν να ακουμπήσουν το μολύβι τους στο χαρτί. Η ανικανότητά τους οφείλεται, κυρίως, στο ότι δεν είχαν την ευκαιρία να ασκηθούν στον συγκεκριμένο τρόπο σκέψης. Δεν είναι εύκολο να βρεθούν περιπτώσεις όπου το πρόβλημα να είναι αρκετά εύκολο από την άποψη της ανάλυσης, αλλά μη τετριμμένο από εννοιολογική άποψη. Σ' αυτό συνίσταται η αξία του παραδείγματος που περιγράψαμε στο παρόν εδάφιο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5Α

Ενδεικτικά προβλήματα για το σπίτι και ερωτήσεις για τεστ

1. Η συνολική δύναμη η οποία δρα σε ένα βαγονάκι κινούμενο (ουσιαστικά χωρίς τριβές) πάνω σε στρώμα αέρος μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Το βαγονάκι έχει μάζα 0,850 kg. Τη στιγμή που η χρονομετρική ένδειξη είναι $t = 0,00$ s, το βαγονάκι έχει αρχική στιγμιαία ταχύτητα 0,150 m/s προς τη θετική κατεύθυνση.

(α) Περιγράψτε περιφραστικά τι συμβαίνει στο βαγονάκι στο χρονικό διάστημα μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0,00$ s και $t = 0,60$ s (χρησιμοποιήστε τους όρους ώθηση, ορμή, έργο και κινητική ενέργεια και όχι τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα).

Εκτελέστε τους επόμενους υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας τις έννοιες και τις σχέσεις που αναφέρατε στην περιφραστική περιγραφή σας. Σε κάθε υπολογισμό περιγράψτε εν συντομία το σύλλογισμό σας.

(β) Υπολογίστε την ορμή του βαγονιού τη στιγμή $t = 0,00$ s (δηλαδή την αρχική ορμή).

(γ) Υπολογίστε τη συνολική ώθηση που προσλαμβάνει το βαγόνι λόγω της εφαρμοζόμενης συνολικής δύναμης μεταξύ των στιγμών $t = 0,00$ s και $t = 0,60$ s.

(δ) Υπολογίστε τη μεταβολή της ορμής του βαγονιού στο εν λόγω χρονικό διάστημα.

(ε) Υπολογίστε την ορμή του βαγονιού στη χρονομετρική ένδειξη $t = 0,60$ s (δηλαδή την τελική ορμή).

(στ) Υπολογίστε τη στιγμιαία ταχύτητα του βαγονιού στη χρονομετρική ένδειξη $t = 0,60$ s.

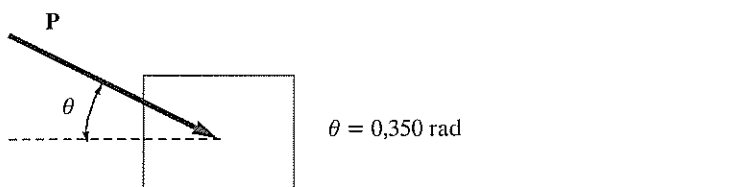
(ζ) Υπολογίστε την αρχική και τελική τιμή της κινητικής ενέργειας του βαγονιού.

(η) Υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του βαγονιού.

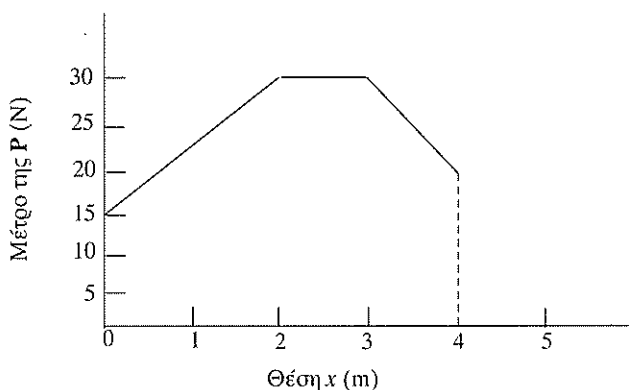
(θ) Υπολογίστε το έργο που εκτέλεσε η δύναμη πάνω στο βαγόνι.

(ι) Υπολογίστε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος βαγόνι-Γη στο χρονικό διάστημα που εξετάζουμε.

2. Πάνω σε οριζόντιο δάπεδο ωθούμε με δύναμη $\mathbf{P}$ ένα ογκώδες σώμα, μάζας 12 kg, όπως φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα. Η δύναμη της τριβής ολίσθησης που αντιτίθεται στην κίνηση ισούται με 15 N και παραμένει σταθερή. Στη χρονομετρική ένδειξη $t = 0,00$ s και στη θέση $x = 0,00$ m, το σώμα έχει αρχική ταχύτητα 2,00 m/s.



Η δύναμη $\mathbf{P}$ ασκείται στο σώμα τη στιγμή που αυτό βρίσκεται στη θέση $x = 0,00$ m. Η διεύθυνση της $\mathbf{P}$ παραμένει σταθερή· ωστόσο, το μέτρο της μεταβάλλεται ως προς την απόσταση, όπως φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα.



Υπολογίστε τα μεγέθη που ζητούνται στη συνέχεια. Στα επιχειρήματά σας χρησιμοποιήστε τις έννοιες του έργου, της κινητικής ενέργειας και της ώθησης· *μη* χρησιμοποιήσετε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα. Σε κάθε περίπτωση, δώστε μια σύντομη ερμηνεία του υπολογισμού σας.

(α) Υπολογίστε το συνολικό έργο της δύναμης $\mathbf{P}$, κατά τη μετατόπιση από τη θέση $x = 0,00 \text{ m}$ στη θέση $x = 4,00 \text{ m}$.

(β) Κατά την ίδια μετατόπιση, υπολογίστε το έργο που δαπανά η δύναμη της τριβής.

(γ) Υπολογίστε το έργο της *συνισταμένης* δύναμης που ασκείται στο σώμα, κατά τη διάρκεια της εν λόγω μετατόπισης.

(δ) Υπολογίστε τη *μεταβολή* της κινητικής ενέργειας του σώματος.

(ε) Υπολογίστε την *τελική* κινητική ενέργεια του σώματος, δηλαδή τη συνολική κινητική ενέργεια την οποία το σώμα κατέχει, όταν πλησιάζει στη θέση $x = 4,00 \text{ m}$.

(στ) Αν μετά τη θέση $x = 4,00 \text{ m}$ η δύναμη $\mathbf{P}$ μηδενιστεί απότομα και παραμένει συνεχώς μηδενική, υπολογίστε για πόσο επιπλέον διάστημα θα συρθεί το σώμα μέχρι να σταματήσει.

(ζ) Υπολογίστε και περιγράψτε κάθε μεταβολή της εσωτερικής *δυναμικής* ενέργειας του συστήματος σώμα-Γη, που συμβαίνει κατά τη διάρκεια όλης της εξέλιξης της κίνησης.

(η) Υπολογίστε και περιγράψτε κάθε μεταβολή της εσωτερικής *θερμικής* ενέργειας του συστήματος σώμα-δάπεδο, που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της συνολικής κίνησης.

(θ) Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος στη θέση $x = 4,00 \text{ m}$.

(ι) Υπολογίστε την ορμή του σώματος στη θέση $x = 4,00 \text{ m}$.

(ια) Υπολογίστε τη *μεταβολή* της ορμής που προσδίδεται στο σώμα στο διάστημα μεταξύ της θέσης $x = 0,00 \text{ m}$ και $x = 4,00 \text{ m}$.

(ιβ) Υπολογίστε τη *συνολική* ώθηση που δέχτηκε το σώμα στο εν λόγω διάστημα.

Παρατήρηση: Στις επόμενες παραγράφους προτείνουμε μια επίδειξη, η οποία αποσκοπεί στο να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν συγκεκριμένη αντίληψη της σύνδεσης μεταξύ των παρατηρούμενων κινήσεων και των εννοιών που περιέχονται με συμβολικό τρόπο στα θεωρήματα της ώθησης-ορμής και του έργου-κινητικής ενέργειας. [Σε άρθρο τους, οι Lawson και McDermott (1987) αναφέρουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την εν λόγω σύνδεση και περιγράφουν τις συσκευές που χρησιμοποίησαν στις συνεντεύξεις.]

3. Με τη βοήθεια ρεύματος αέρα που βγαίνει από το σωλήνα της ηλεκτρικής σκούπας (αν αναστρέψουμε τη λειτουργία της) μπορούμε να επιταχύνουμε με σχετικά βραδύ ρυθμό βαγονάκια ή άλλα σώματα διαφορετικής μάζας μεταξύ τους, πάνω σε στρώμα αέρα. Μπορούμε, επίσης, να επιταχύνουμε κύβους ξηρού πάγου πάνω σε μια γυάλινη πλάκα. (Η επιτάχυνση πρέπει να είναι μικρή, ώστε τα διαδοχικά γεγονότα να είναι ευδιάκριτα και κατανοητά.) Στο άνοιγμα του σωλήνα προσαρμόζουμε μικρές χάρτινες λωρίδες: όταν το ρεύμα του αέρα τις φυσά, παίζουν το ρόλο φράγματος, και η

απόσταση μεταξύ του σωλήνα και των σωμάτων διατηρείται σταθερή. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ασκήσουμε ίδια δύναμη σε διαφορετικά αντικείμενα.

(α) Για δεδομένο χρονικό διάστημα, κατευθύνουμε το ρεύμα του αέρα σε ένα βαγονάκι· επαναλαμβάνουμε την επίδειξη μία ή δύο φορές, για να αποκτήσουν οι μαθητές σαφή εντύπωση του χρονικού διαστήματος που διαρκεί το φαινόμενο και της ταχύτητας που αποκτά το βαγονάκι. Κατόπιν, εξασκούμε το ρεύμα αέρα στο ίδιο βαγονάκι, για μικρότερο ή μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Ζητάμε από τους μαθητές να συγκρίνουν τις ωθήσεις που δέχεται το βαγονάκι και τις μεταβολές της ορμής του. (Πρέπει να τους επισημάνουμε ότι «συγκρίνω» σημαίνει «προσδιορίζω αν ένα μέγεθος είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από κάποιο άλλο, χωρίς να υπολογίσω την αριθμητική τιμή των δύο μεγεθών».)

(β) Για ίδιο χρονικό διάστημα, κατευθύνουμε το ρεύμα αέρα σε δύο βαγονάκια με σαφώς διαφορετική μάζα. Όπως μπορούμε να αντιληφθούμε ακόμα και με το μάτι, τα βαγονάκια αποκτούν διαφορετική ταχύτητα. Ζητάμε από τους μαθητές να συγκρίνουν τις ωθήσεις που δέχονται τα σώματα και τις μεταβολές της ορμής τους.

(γ) Ωθούμε με το ρεύμα αέρα τα βαγονάκια, έτσι ώστε να διανύουν διαφορετικές αποστάσεις.

Ζητάμε από τους μαθητές να συγκρίνουν την ποσότητα του έργου που εκτελείται στα βαγονάκια με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειάς τους.

(δ) Οι Lawson και McDermott (1987) εφάρμοσαν την ίδια δύναμη σε δύο βαγονάκια πολύ διαφορετικής μάζας, για το ίδιο διάστημα μεταξύ δύο γραμμών πάνω στο τραπέζι. Κατόπιν, ζήτησαν από μαθητές (που προέρχονταν από τμήματα όπου η φυσική διδασκόταν με τη βοήθεια άλγεβρας ή απειροστικού λογισμού) να συγκρίνουν τις ορμές και τις κινητικές ενέργειες των βαγονίων. Τα αποτελέσματά τους καταδεικνύουν ότι οι μαθητές είναι απαραίτητο να εξοικειωθούν με τις ιδέες που περιέχονται στην άσκηση.

Το να συζητήσουμε ορισμένες τουλάχιστον παρατηρήσεις και τρόπους ερμηνείας των πειραματικών επιδείξεων είναι τόσο χρήσιμο όσο και το να αφήσουμε κάποιες ερωτήσεις να απαντηθούν ως εργασία για το σπίτι. Πολλοί μαθητές χρειάζονται χρόνο για να επεξεργαστούν τις παρατηρήσεις τους και να σκεφτούν τη σύνδεση μεταξύ των παραστάσεών τους και των *σύνθετων* εννοιών (της ώθησης, της ορμής, του έργου και της κινητικής ενέργειας) με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι και στις οποίες καλούνται να αποδώσουν φυσικό νόημα.