

## Τετραδικοί αριθμοί

Απλές πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

A. Mishchenko και Y. Solovyov

**Π**ΡΟΣΦΑΤΑ ΕΧΟΥΜΕ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙ ΑΡΘΡΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Α-  
ναπαράσταση των πραγματικών αριθμών ως συνε-  
χή κλάσματα (Μάρτιος/Απρίλιος 2000) και για τους  
αλγεβρικούς και τους υπερβατικούς αριθμούς (Σε-  
πτέμβριος/Οκτώβριος 2000). Το παρόν άρθρο ολοκληρώ-  
νει αυτή τη σειρά (αν και δεν απαιτεί να έχετε διαβάσει  
τα παραπάνω άρθρα). Το θέμα του είναι οι τετραδικοί α-  
ριθμοί. Σ' αυτούς περιλαμβάνονται οι μιγαδικοί και,  
συνεπώς, όλα τα είδη αριθμών που έχουμε προανα-  
φέρει. Το άρθρο περιέχει μερικές πληροφορίες για  
τις εφαρμογές των τετραδικών και την ιδιόμορφη  
ιστορία τους. Αρχή τους απετέλεσε η επιθυμία να  
εισαχθεί μια αλγεβρική δομή (πρόσθεση και, κυ-  
ρίως, πολλαπλασιασμός) για γεωμετρικά αντικεί-  
μενα (διάφορα σύνολα σημείων).

## Πώς από σημεία μπορούμε να πάρουμε αριθμούς;

Αν αναφερόμαστε σε σημεία μιας ευθείας, είναι απλό. Αν επιλέξουμε μια αρχή («μηδέν») και μια κλίμακα με συγκεκριμένη φορά («μονάδα»), μπορούμε να μετατρέψουμε μια ευθεία σε ευθεία αριθμών. Σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός —η συντεταγμένη του (Σχήμα 1).



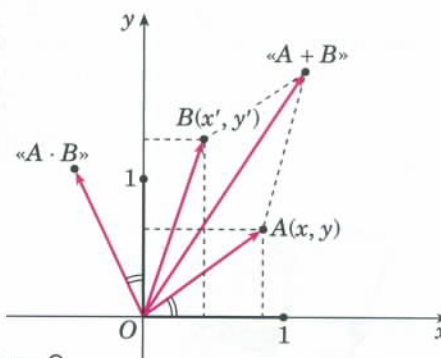
Σχήμα 1

Με τα σημεία του επιπέδου, η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Αν επιλέξουμε μια αρχή («μηδέν») και ένα ζεύγος κάθετων αξόνων, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα ζεύγος συντεταγμένων  $(x, y)$  σε κάθε σημείο του επιπέδου. Για να δημιουργήσουμε αριθμούς από αυτά τα ζεύγη, πρέπει να βρούμε τρόπο να τα «προσθέσουμε» και

να τα «πολλαπλασιάζουμε» έτσι ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: ο αντιμεταθετικός, ο προσεταιριστικός και ο επιμεριστικός νόμος, και η ύπαρξη των αντίστροφων πράξεων, της διαίρεσης και της αφαίρεσης.

Η πρόσθεση είναι εύκολη. Είναι φυσικό να προσθέσουμε τα ζεύγη κατά συντεταγμένες, όπως ακριβώς προσθέτουμε τα διανύσματα (Σχήμα 2):

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad (1)$$



Σχήμα 2

Ο πολλαπλασιασμός είναι λίγο πιο περίπλοκος.<sup>1</sup> Όμως, και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε έναν απλό τύπο:

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y). \quad (2)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτή η πράξη πολ-

1. Ο πολλαπλασιασμός κατά συνεταγμένες —δηλαδή,  $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$ — δεν μας ικανοποιεί, διότι αυτή η πράξη δεν έχει αντιστροφή. (Για παράδειγμα, η διαίρεση με το μη μηδενικό ζεύγος  $(0, 2)$  είναι αδύνατη.)

λαπλασιασμού και η πράξη της πρόσθεσης (1) έχουν όλες τις ιδιότητες που προαναφέραμε. Επομένως, το σύνολο των ζευγών με τις πράξεις (1) και (2) μπορεί να θεωρηθεί αριθμητικό σύνολο.

Στην πραγματικότητα, τα ζεύγη αυτά είναι *μιγαδικοί αριθμοί*. Αντί για  $(x, y)$  συνηθέστερα γράφονται ως  $x + iy$ , όπου  $i$  είναι η φανταστική μονάδα —δηλαδή το ζεύγος  $(0, 1)$ —, η οποία έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα  $i^2 = -1$ . Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να εξαγάγουμε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών (στο σώμα των μιγαδικών).

Μπορούμε να μετατρέψουμε τα σημεία του χώρου σε αριθμούς; Ας εισαγάγουμε, όπως και προηγουμένως, ένα σύστημα συντεταγμένων και ας περιγράψουμε κάθε σημείο ως ένα σύνολο τριών συντεταγμένων:  $(x, y, z)$ . Είναι φυσικό να προσθέσουμε αυτές τις τριάδες κατά συντεταγμένες:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'). \quad (3)$$

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε αριθμούς αυτές τις τριάδες αν βρίσκαμε μια μέθοδο πολλαπλασιασμού τους έτσι ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Ειδικά, πρέπει να υπάρχει η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού (διαίρεση με μη μηδενικά στοιχεία).

Το 1833, ο ιρλανδός μαθηματικός William Rowan Hamilton (1805-1865) ενδιαφέρθηκε γι' αυτό το πρόβλημα. Ακολουθεί η ιστορία της έμμονης ιδέας αυτού του αξιόλογου ανθρώπου με τις τριάδες και τις τετράδες.

### W.R. Hamilton

Ο Hamilton ήταν εξαιρετικά ικανός και πολυμαθής. Σε ηλικία 10 ετών γνώριζε από μνήμης πολλά αποσπάσματα από τον Όμηρο, στο πρωτότυπο, και στα 14 μιλούσε εννέα γλώσσες. Το 1824 δημοσίευσε ένα άρθρο γεωμετρικής οπτικής στα *Πρακτικά της Βασιλικής Ιρλανδικής Ακαδημίας*, και το 1827 έγινε βασιλικός αστρονόμος της Ιρλανδίας.

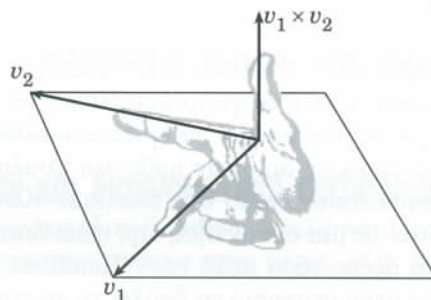
Το 1833, ο Hamilton ήταν διευθυντής του αστεροσκοπίου Dunsink, κοντά στο Δουβλίνο, και είχε δημοσιεύσει πολλά άρθρα οπτικής και αναλυτικής μηχανικής. Με βάση την εργασία του στη γεωμετρική οπτική, ο Hamilton προέβλεψε τη διπλή κωνική διάθλαση στους διαξονικούς κρυστάλλους, φαινόμενο που ανακάλυψε λίγο αργότερα ο συνάδελφός του Lloyd.

Επί δέκα ολόκληρα χρόνια, ο Hamilton προσπάθησε να ανακαλύψει έναν κανόνα πολλα-

πλασιασμού των τριάδων, χωρίς όμως επιτυχία. Αργότερα, σε ένα γράμμα προς το γιο του, θυμόταν ότι «Κάθε πρωί, όταν κατέβαινα για πρωινό, εσύ και ο αδελφός σου με ρωτούσατε: "Μπαμπά, έμαθες πώς να πολλαπλασιάζεις τριάδες;" Και πάντοτε έπρεπε να απαντώ λυπημένα: "Όχι, γνωρίζω μόνο να τις προσθέτω και να τις αφαιρώ."»

### Διανυσματικά γινόμενα

Το πρόβλημα που απασχολούσε τον Hamilton φαίνεται σε πρώτη ματιά απλό. Ο τρόπος ορισμού της διανυσματικής πρόσθεσης είναι προφανής (μέσω του τύπου (3)). Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι ένας τύπος για τον πολλαπλασιασμό —κάτι παρόμοιο με τον τύπο (2). Κανείς όμως από τους τύπους που δοκίμασε ο Hamilton δεν ήταν κατάλληλος —πάντα παραβιαζόταν κάποια από τις ιδιότητες.



Σχήμα 3

Η πράξη του πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων ήταν ήδη πασίγνωστη εκείνη την εποχή: το *διανυσματικό γινόμενο*  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο  $\mathbf{v}_1$  και στο  $\mathbf{v}_2$ , και με διεύθυνση που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (Σχήμα 3). Το μήκος αυτού του διανύσματος ορίζεται ως  $|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \eta\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Ένα βασικό αποτέλεσμα για τα διανυσματικά γινόμενα (που ορισμένες φορές καλούνται «εξωτερικά γινόμενα») είναι ότι αν τα  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  δίνονται από τις συντεταγμένες τους σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς —δηλαδή, αν

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, \gamma_1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, \gamma_2),$$

τότε

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \gamma_1a_2 - \gamma_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1). \quad (4)$$

Όμως, τα διανυσματικά γινόμενα δεν εξυπηρέτούσαν τον Hamilton, διότι με αυτά δεν ισχύει

η αντίστροφη πράξη. Για παράδειγμα, αν  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \neq 0$ , τότε η γωνία μεταξύ αυτών των διανυσμάτων ισούται με μηδέν. Επομένως, το μήκος του διανυσματικού γινομένου  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  είναι μηδέν (αν αντικαταστήσουμε στον τύπο (4), θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα). Αν ίσχυε η διαίρεση με κάθε μη μηδενικό διάνυσμα, θα είχαμε  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \div \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \neq 0$ . Ταυτόχρονα,  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 0$  και, επομένως,  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \div \mathbf{v}_2 = 0$ . Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι η διαίρεση διά του  $\mathbf{v}_2$  είναι αδύνατη.

Παρά τις απογοητεύσεις και τις αποτυχίες, ο Hamilton συνέχισε τις προσπάθειές του με αξιοθαύμαστη επιμονή. Παρόλο που το πρόβλημά του δεν λύθηκε (και δεν ήταν δυνατόν να λυθεί, όπως θα δούμε στη συνέχεια), η δεκάχρονη προσπάθειά του ανταμείφθηκε. Κάποια μέρα του 1843, ο Hamilton αποφάσισε να προσπαθήσει να ορίσει τον πολλαπλασιασμό για τετράδες αντί για τριάδες. Ονόμασε αυτούς τους νέου τύπου αριθμούς τετραδικούς (quaternions). Ιδού πώς συνέβη το γεγονός.

## Το επεισόδιο στη γέφυρα Brougham

Σε ένα γράμμα προς το γιο του, ο Hamilton αναφέρει ότι η ιδέα για το πώς πρέπει να οριστεί ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών αριθμών ήρθε στο μυαλό του την ώρα που περπατούσε δίπλα στο Βασιλικό Κανάλι, ενώ κατευθυνόταν σε μια συνάντηση της ιρλανδικής ακαδημίας. Η ιδέα άρεσε τόσο πολύ στον Hamilton ώστε δεν αντιστάθηκε στον πειρασμό να βγάλει το σουγιά του και να χαράξει τον θεμελιώδη τύπο στη μαλακή πέτρα της γέφυρας Brougham:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

## Ορισμός των τετραδικών

Οι τετραδικοί είναι τετράδες πραγματικών αριθμών  $(x, y, u, v)$  που μπορούν να γραφούν ως

$$q = x + yi + uj + vk,$$

όπου τα  $i, j$ , και  $k$  είναι καινούργιοι αριθμοί, παρόμοιοι με τη φανταστική μονάδα που χρησιμοποιείται στον ορισμό των μιγαδικών αριθμών. Πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (5)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (6)$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή ενός πίνακα «πολλαπλασιασμού»:

|     | $i$  | $j$  | $k$  |
|-----|------|------|------|
| $i$ | -1   | $k$  | $-j$ |
| $j$ | $-k$ | -1   | $i$  |
| $k$ | $j$  | $-i$ | -1   |

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών εκτελούνται, εξ ορισμού, σύμφωνα με τους συμβατικούς κανόνες αφαίρεσης των παρενθέσεων και αναγωγής των

όμοιων όρων, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τους κανόνες που περιέχονται στους τύπους (5) και (6).

Βάσει αυτού του ορισμού, αν  $q_1$  και  $q_2$  είναι δύο τετραδικοί, τότε

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k) + (x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) \\ &= x_1 + y_1i + u_1j + v_1k + x_2 + y_2i + u_2j + v_2k \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1i + y_2i) + (u_1j + u_2j) + (v_1k + v_2k) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (u_1 + u_2)j + (v_1 + v_2)k. \end{aligned} \quad (7)$$

Αυτή είναι η συνήθης πρόσθεση κατά συντεταγμένες, την οποία είδαμε προηγουμένως. Το γινόμενο δύο τετραδικών υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k)(x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i + y_1y_2i^2 \\ &\quad + y_1u_2ij + y_1v_2ik + u_1x_2j + u_1y_2ji + u_1u_2j^2 \\ &\quad + u_1v_2jk + v_1x_2k + v_1y_2ki + v_1u_2kj + v_1v_2k^2 \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i \\ &\quad - y_1y_2 + y_1u_2k - y_1v_2j + u_1x_2j - u_1y_2k \\ &\quad - u_1u_2 + u_1v_2i + v_1x_2k + v_1y_2j - v_1u_2i - v_1v_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + u_1v_2 - v_1u_2)i \\ &\quad + (x_1u_2 + u_1x_2 - y_1v_2 + v_1y_2)j \\ &\quad + (x_1v_2 + y_1u_2 - u_1y_2 + v_1x_2)k. \end{aligned} \quad (8)$$

Δηλαδή, ενεργούμε σαν τα  $i, j$  και  $k$  να ήταν μεταβλητές και εφαρμόζουμε τον επιμεριστικό νόμο. Όμως, παρατηρούμε ότι η σειρά πολλαπλασιασμού των «μεταβλητών»  $i, j$  και  $k$  πρέπει να διατηρείται (ενώ των «συντελεστών»  $x_1, x_2$ , κ.λπ. μπορεί να αλλάξει).

Ένας επίπονος αλλά απλός υπολογισμός μάς δείχνει ότι ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών διαθέτει την προσεταιριστική ιδιότητα:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

Είναι φυσικό να θεωρήσουμε τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς ως ειδικές περιπτώσεις των τετραδικών. Ο πραγματικός αριθμός  $x$  είναι ο τετραδικός

$$x = x + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k.$$

Ο μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$  γράφεται ως ο τετραδικός

$$z = x + iy + 0 \cdot j + 0 \cdot k. \quad (9)$$

Αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τους μιγαδικούς αριθμούς, μπορείτε να θεωρήσετε τον τύπο (9) μαζί με τους τύπους (7) και (8) ως τον ορισμό τους. Γράψτε τον τύπο του πολλαπλασιασμού (8) για την περίπτωση (9), και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον τύπο (2).

Είναι προφανές ότι η πρόσθεση των τετραδικών έχει μια αντίστροφη πράξη —την αφαίρεση. Η διαφορά δύο τετραδικών  $q_1$  και  $q_2$  ορίζεται από τον τύπο

$$q_1 - q_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i + (u_1 - u_2)j + (v_1 - v_2)k.$$

Αν  $q_1 = q_2$ , τότε η διαφορά τους είναι ο μηδενικός τετραδικός:

$$q_1 - q_2 = 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0.$$

## Διαίρεση τετραδικών

Θα εξετάσουμε τη διαίρεση των τετραδικών, την αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Γενικώς, το πηλίκο της διαίρεσης ενός αριθμού  $a$  διά ενός αριθμού  $b \neq 0$  είναι ένας αριθμός  $c$ , τέτοιος ώστε

$$bc = a. \quad (10)$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται το πηλίκο για τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς. Δυστυχώς, ο ορισμός αυτός δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί στους τετραδικούς. Για να δώσει ο τύπος (10) έναν σωστό ορισμό του πηλίκου, ο πολλαπλασιασμός πρέπει να είναι ανεξάρτητος από τη σειρά των παραγόντων. Διαφορετικά, εκτός από το πηλίκο  $c = b^{-1}a$  που ορίζει ο τύπος (10), υπάρχει και το εξίσου ορθό «αριστερό» πηλίκο  $c'$  που ορίζεται από τον τύπο

$$c'b = a.$$

Το αριστερό πηλίκο μπορεί να είναι διαφορετικό από το  $c$  του τύπου (10). Έτσι, εκτός από την υποχρέωση να προχωρήσει πέρα από τον τρισδιάστατο χώρο, ο Hamilton έπρεπε να κάνει ακόμη μια θυσία.

Αποδείχτηκε ότι από τους τετραδικούς λείπει μία ακόμα παραδοσιακή ιδιότητα: το γινόμενο των τετραδικών δεν είναι ανεξάρτητο από τη σειρά των παραγόντων. Πράγματι, από τους τύπους (6) διαπιστώνουμε ότι το πρόσημο του γινομένου αλλάζει όταν μεταβάλλεται η σειρά των παραγόντων.

Άρα, μπορούμε να μιλήσουμε μόνο για «αριστερή διαίρεση» και «δεξιά διαίρεση». Πώς όμως θα βρούμε, ας πούμε, το αριστερό πηλίκο της διαίρεσης του τετραδικού  $q_1$  διά του τετραδικού  $q_2 \neq 0$ ;

Συμβολίζουμε το ζητούμενο πηλίκο ως  $q = x + yi + uj + vk$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού των τετραδικών και τον ορισμό της αριστερής διαίρεσης, καταλήγουμε στην εξής ισότητα:

$$qq_2 = q_1,$$

ή

$$\begin{aligned} (xx_2 - yy_2 - uu_2 - vv_2) + (xy_2 + yx_2 + uv_2 - vu_2)i \\ + (xu_2 + ux_2 - yv_2 + vy_2)j + (xv_2 + vx_2 + yu_2 - uy_2)k \\ = x_1 + y_1i + u_1j + v_1k. \end{aligned}$$

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα  $x, y, u$  και  $v$ :

$$\begin{aligned} x_2x - y_2y - u_2u - v_2v &= x_1, \\ y_2x + x_2y + v_2u - u_2v &= y_1, \\ u_2x - v_2y + x_2u + y_2v &= u_1, \\ v_2x + u_2y - y_2u + x_2v &= v_1. \end{aligned}$$

Αφήνουμε στους αναγνώστες την επίλυση αυτού του συστήματος και την εύρεση του αριστερού πηλίκου της διαίρεσης του  $q_1$  διά του  $q_2$ . Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το δεξιό πηλίκο της διαίρεσης του  $q_1$  διά του  $q_2$ .

Αν ο διαιρετέος  $q_1$  ισούται με τον πραγματικό αριθμό 1, το πηλίκο της αριστερής και της δεξιάς διαίρεσης του

$q_1 = 1$  διά του τετραδικού  $q_2$  είναι ο (ίδιος και στις δύο περιπτώσεις) τετραδικός

$$p = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}$$

(αφήνουμε την απόδειξη για τους αναγνώστες). Γι' αυτό το λόγο, ο τετραδικός  $p$  συμβολίζεται ως

$$q_2^{-1} = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Το δεξιό πηλίκο της διαίρεσης του  $q_1$  διά του μη μηδενικού τετραδικού  $q_2$  γράφεται ως

$$q = q_2^{-1} \cdot q_1,$$

και το αριστερό πηλίκο της διαίρεσης του  $q_1$  διά του  $q_2$  γράφεται ως

$$q = q_1 \cdot q_2^{-1}.$$

Στην πράξη, η διαίρεση των τετραδικών εκτελείται με άλλη μέθοδο, στην οποία χρησιμοποιούνται τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μέρη των τετραδικών.

## Βαθμωτοί και διανυσματικοί τετραδικοί

Όπως οι μιγαδικοί αριθμοί αναλύονται στο πραγματικό και στο φανταστικό τους μέρος, έτσι και ο τετραδικός

$$q = x + yi + uj + vk$$

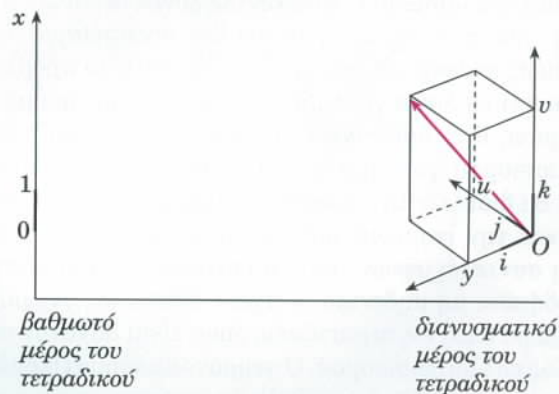
μπορεί να γραφεί ως

$$q = x + (yi + uj + vk).$$

Ο πρώτος όρος αυτής της παράστασης καλείται *βαθμωτό μέρος* του τετραδικού και ο δεύτερος όρος (αυτός στην παρένθεση) καλείται *διανυσματικό μέρος*. Το βαθμωτό μέρος  $x$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, ενώ το διανυσματικό μέρος μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα διάνυσμα

$$\mathbf{r} = yi + uj + vk$$

του τρισδιάστατου χώρου, όπου τα  $i, j$  και  $k$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Επομένως, κάθε τετραδικός  $q$  γράφεται ως το άθροισμα

$$q = x + \mathbf{r},$$

όπου  $x$  είναι το βαθμωτό μέρος του  $q$  και  $\mathbf{r}$  το διανυσματικό του μέρος. Αν  $\mathbf{r} = 0$ , τότε  $q = x$ , και ο  $q$  καλείται *βαθμωτός τετραδικός*. Αν  $x = 0$ , τότε  $q = \mathbf{r}$ , και ο  $q$  καλείται *διανυσματικός τετραδικός*.

Όταν προσθέτουμε τετραδικούς, τα βαθμωτά και τα διανυσματικά τους μέρη προστίθενται ανεξάρτητα.

Ο πολλαπλασιασμός των τετραδικών είναι πιο περίπλοκος. Αν τα  $q_1$  και  $q_2$  είναι βαθμωτοί τετραδικοί, τότε το γινόμενο τους είναι επίσης βαθμωτός τετραδικός. Αν ο  $q_1 = x$  είναι βαθμωτός και ο  $q_2 = \mathbf{r}$  είναι διανυσματικός, το γινόμενο

$$q_1 q_2 = x \cdot (y_i i + y_j j + y_k k) = (xy)i + (xu)j + (xv)k$$

είναι διανυσματικός τετραδικός, και ο πολλαπλασιασμός συμπίπτει με τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος  $\mathbf{r}$  επί τον πραγματικό αριθμό  $x$  στον τρισδιάστατο χώρο.

Τέλος, αν και το  $q_1$  και το  $q_2$  είναι διανυσματικοί τετραδικοί —δηλαδή, αν

$$\begin{aligned} q_1 = \mathbf{r}_1 &= y_1 i + u_1 j + v_1 k \\ q_2 = \mathbf{r}_2 &= y_2 i + u_2 j + v_2 k, \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= -(y_1 y_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_1 v_2 - v_1 u_2) i \\ &\quad + (v_1 y_2 - y_1 v_2) j + (y_1 u_2 - u_1 y_2) k. \end{aligned}$$

Όπως διαπιστώνουμε από αυτό τον τύπο, το βαθμωτό μέρος του  $q_1 q_2$  ισούται με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{r}_1$  και  $\mathbf{r}_2$ , με το πρόσημο αντεστραμμένο. Το διανυσματικό μέρος του  $q_1 q_2$  ισούται με το σύννηθες διανυσματικό γινόμενο  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  εκφρασμένο βάσει των συντεταγμένων του (δείτε τον τύπο (4)).

Αν συνδυάσουμε όλες τις περιπτώσεις, προκύπτει ο γενικός τύπος για τον πολλαπλασιασμό των τετραδικών. Αν  $q_1 = x_1 + \mathbf{r}_1$  και  $q_2 = x_2 + \mathbf{r}_2$ , τότε

$$q_1 q_2 = (x_1 x_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (x_1 \mathbf{r}_2 + x_2 \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

## Τι ισχύει για τις τριάδες;

Γιατί δεν μπόρεσε να βρει ο Hamilton μια εύλογη μέθοδο πολλαπλασιασμού τριάδων; Ο λόγος δεν ήταν η έλλειψη επινοητικότητας ή το ότι δεν προσπάθησε αρκετά. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί για τους «τρισδιάστατους αριθμούς». Πράγματι, έχει αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει πράξη πολλαπλασιασμού για σημεία του τρισδιάστατου χώρου η οποία θα διαθέτει την προσεταιριστική, την αντιμεταθετική και την επιμεριστική ιδιότητα (ως προς την πρόσθεση συντεταγμένων) και να επιτρέπει τη διαίρεση με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο. Επιπλέον, γνωρίζουμε σήμερα όλες τις περιπτώσεις όπου είναι δυνατόν αυτό το είδος πολλαπλασιασμού. Ο γερμανός μαθηματικός F.G. Frobenius (1849-1917) απέδειξε ότι υπάρχει σε *τρεις μόνο περιπτώσεις*: στη μία διάσταση (πραγματικοί αριθμοί),

στις δύο (μιγαδικοί αριθμοί) και στις τέσσερις (τετραδικοί αριθμοί).

## Περαιτέρω εξελιξεις

Ο Hamilton και αρκετοί άλλοι στηρίξαν μεγάλες ελπίδες στους τετραδικούς. Ανέμεναν ότι οι τετραδικοί θα προσέφεραν πλούσια αποτελέσματα, σημαντικότερα και από των μιγαδικών. Πράγματι, οι τετραδικοί χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή κομψών τύπων που περιέγραφαν ένα πλήθος σημαντικών φυσικών φαινομένων. Όμως, τα οράματα για την περαιτέρω ανάπτυξη του αλγεβρικού και του συναρτησιακού λογισμού των τετραδικών δεν έγινε δυνατόν να υλοποιηθούν.

Για τους τετραδικούς, το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας που αφορά την ύπαρξη ριζών οποιουδήποτε πολυωνύμου με τετραδικούς συντελεστές δεν ισχύει. Από την άλλη, για κάθε τετραδικό υπάρχει ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με τετραδικούς συντελεστές το οποίο έχει ως ρίζα τον δεδομένο τετραδικό.

Η αισιοδοξία έδωσε τη θέση της στο σκεπτικισμό. Στις αρχές του 20ού αιώνα, οι μαθηματικοί έχασαν το ενδιαφέρον τους για τους τετραδικούς. Ωστόσο, λίγο αργότερα, στη θεωρητική φυσική ανέκυψε η ανάγκη να βρεθεί ένας μαθηματικός formalism που θα περιέγραφε συγκεκριμένα φαινόμενα τα οποία σχετιζόνταν με το λεγόμενο *σπιν* των στοιχειωδών σωματιδίων. Οι τετραδικοί αριθμοί κέρδισαν και πάλι την αναγνώριση όταν έγινε κατανοητός ο ρόλος τους στην κατασκευή διαφόρων γεωμετρικών μετασχηματισμών του χώρου που ενδιαφέρουν την κβαντική φυσική. Οι γεωμετρικές ιδιότητες των τετραδικών είναι ένα ξεχωριστό και ιδιαίτερα μεγάλο θέμα, στο οποίο ελπίζουμε να αφιερώσουμε ένα ειδικό άρθρο. ■



**κάτοπτρο ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ**

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Πανεπιστημίου & Περικλέους 5, 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785  
Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr) e-mail: [info@katoptro.gr](mailto:info@katoptro.gr)