

Η διαστατική μέθοδος. Γενική μαθηματική διερεύνηση και μια μη τετριμμένη εφαρμογή

1. Γενική διερεύνηση της περιπτώσεως όπου ένα φυσικό μέγεθος εξαρτάται μόνο από τρία άλλα

Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι τα δεδομένα Φυσικά Μεγέθη (ΦΜ) A, B, C και το ζητούμενο D έχουν γνωστές φυσικές διαστάσεις L, M, T που περιγράφονται από τους εκθέτες των L, M και T στις σχέσεις

$$[A] = L^{a_1} M^{a_2} T^{a_3}, \quad [B] = L^{\beta_1} M^{\beta_2} T^{\beta_3}, \quad [C] = L^{\gamma_1} M^{\gamma_2} T^{\gamma_3}, \quad [D] = L^{d_1} M^{d_2} T^{d_3} \quad (1)$$

όπου η λογική του συμβολισμού είναι μάλλο προφανής. Για λόγους συντομίας περιγράφουμε συχνά τις διαστάσεις ενός ΦΜ δίνοντας μόνο τους εκθέτες των L, M, T στη συγκεκριμένη σειρά. (Πρώτα του L , μετά του M και μετά του T .) Γράφουμε δηλαδή

$$[A] = (a_1, a_2, a_3) \text{ κ.λπ.}$$

Ενόψει των παραπάνω η (1) θα γράφεται τώρα ως

$$[D] = [A]^\mu [B]^\nu [C]^\lambda \Rightarrow L^{d_1} M^{d_2} T^{d_3} = (L^{a_1} M^{a_2} T^{a_3})^\mu (L^{\beta_1} M^{\beta_2} T^{\beta_3})^\nu (L^{\gamma_1} M^{\gamma_2} T^{\gamma_3})^\lambda. \quad (2)$$

Εξισώνοντας τώρα τις διαστάσεις L, M, T στα δύο μέλη της (2) παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} a_1\mu + \beta_1\nu + \gamma_1\lambda &= d_1 \\ a_2\mu + \beta_2\nu + \gamma_2\lambda &= d_2 \\ a_3\mu + \beta_3\nu + \gamma_3\lambda &= d_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

που είναι βεβαίως ένα γραμμικό μη ομογενές σύστημα με γνωστούς συντελεστές και γνωστούς σταθερούς όρους –τα a_i, β_i, γ_i και d_i αντίστοιχα– και αγνώστους τους ζητούμενους εκθέτες μ, ν, λ . Τα περαιτέρω είναι γνωστά από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων. Για να έχει πάντα λύση το σύστημα (3) –δηλαδή για τυχόν δεύτερο μέλος (d_1, d_2, d_3) – θα πρέπει η ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών του να είναι διάφορη του μηδενός. Δηλαδή

$$\mathcal{D} \equiv \det \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Και αν συμβαίνει αυτό, η λύση είναι μοναδική. Αν όμως η ορίζουσα μηδενίζεται τότε οι λύσεις μπορούν να είναι από άπειρες έως καμία, ανάλογα με τις τιμές των d_1, d_2, d_3 . Μην σπεύσετε όμως να ανησυχήσετε για τις φυσικές συνέπειες της δεύτερης περίπτωσης ($\mathcal{D} = 0$) διότι αυτό που συμβαίνει τότε είναι τούτο: Οι γραμμές και οι στηλες της μήτρας (4) είναι γραμμικά εξαρτημένες και αυτό σημαίνει φυσικά ότι τα δεδομένα μεγέθη A, B, C δεν είναι διαστατικώς ανεξάρτητα και επομένως το ένα από αυτά –π.χ. το C – μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άλλων δύο, δηλαδή ως

$$\begin{aligned} C &= A^\rho B^\sigma \Rightarrow L^{\gamma_1} M^{\gamma_2} T^{\gamma_3} = (L^{a_1} M^{a_2} T^{a_3})^\rho (L^{\beta_1} M^{\beta_2} T^{\beta_3})^\sigma \\ \Rightarrow \quad \gamma_1 &= \rho a_1 + \sigma \beta_1 \\ \gamma_2 &= \rho a_2 + \sigma \beta_2 \quad \text{ή, ισοδύναμα} \quad \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} &= \rho \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \rho a_3 + \sigma \beta_3 \end{aligned} \quad (5)$$

που σημαίνει ότι πράγματι η τρίτη στήλη της μήτρας (4) είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων, όπως προείπαμε.

Καταλήξαμε βεβαίως στο *φυσικά αυτονόητο*. Δηλαδή το εξής. Ότι για να μπορεί πάντα ένα τυχόν ΦΜ D να εκφραστεί συναρτήσει τριών άλλων A, B, C πρέπει αυτά να είναι διαστατικώς ανεξάρτητα. Να μην μπορεί κάποιο από αυτά να εκφραστεί συναρτήσει των δύο άλλων. Και αν πληρούται αυτή η αυτονόητη συνθήκη, τότε υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος να εκφραστεί συναρτήσει αυτών –δηλαδή των A, B, C – το τυχόν άλλο ΦΜ D . Και γι' αυτόν ακριβώς το λόγο λέμε ότι μια τέτοια τριάδα φυσικών μεγεθών αποτελούν ένα *διαστατικά πλήρες σύστημα*. Καταλάβαμε όμως με τα προηγούμενα και κάτι άλλο: Ότι η έννοια της διαστατικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας κάποιων φυσικών μεγεθών είναι ισοδύναμη με την αντίστοιχη έννοια (γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας) μεταξύ των στηλών που περιγράφουν τις φυσικές τους διαστάσεις.

Τα παραπάνω θα γίνουν όμως πολύ πιο διαυγή αν θεωρήσουμε τα δεδομένα μεγέθη A, B, C και το ζητούμενο D ως διανύσματα σε έναν υποθετικό τριδιάστατο χώρο με συντεταγμένες τις φυσικές τους διαστάσεις L, M, T . Να γράψουμε δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

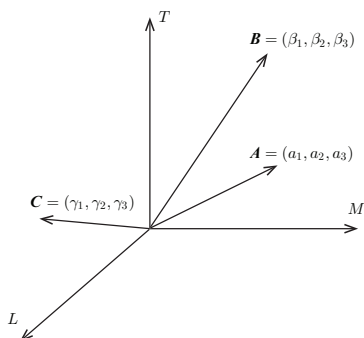
οπότε, με αυτόν τον συμβολισμό, η σχέση (3) για τον προσδιορισμό των εκθετών μ, ν, λ της (1) θα γράφεται ως

$$D = \mu A + \nu B + \lambda C. \quad (7)$$

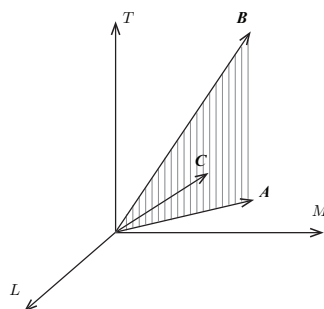
Οι ζητούμενοι εκθέτες μ, ν, λ δεν είναι λοιπόν τίποτε άλλο παρά οι συντελεστές του *μοναδικού* γραμμικού συνδυασμού των A, B, C που δίνει το (επίσης δεδομένο) διάνυσμα D . Όπου ο συνδυασμός θα είναι πράγματι μοναδικός αν τα διανύσματα A, B, C *δεν είναι συνεπίεδα* οπότε θα μπορεί να εκφραστεί μέσω αυτών και το τυχόν άλλο διάνυσμα D . Αν είναι συνεπίεδα, τότε το ένα από αυτά –ας πούμε το C – θα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων, δηλαδή ως

$$C = \rho A + \sigma B \quad (8)$$

που είναι, βεβαίως, η σχέση (5) της προηγούμενης συζήτησής μας. Αν θέλετε και μια γραφική απεικόνιση των παραπάνω –σε ένα νοητό σύστημα αξόνων L, M, T όπου οι «προβολές» των διανυσμάτων θα είναι οι διαστάσεις τους ως φυσικών μεγεθών– τότε οι σχετικές «εικόνες» θα είναι ως εξής:



Σχ. 1: Τα διανύσματα A, B, C των φυσικών μεγεθών A, B, C *δεν είναι συνεπίεδα* και επομένως τα μεγέθη είναι διαστατικώς ανεξάρτητα. Αποτελούν δηλαδή ένα *διαστατικά πλήρες σύστημα* οπότε κάθε άλλο ΦΜ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει αυτών.



Σχ. 2: Τα διανύσματα A, B, C *είναι συνεπίεδα* και επομένως τα ΦΜ A, B, C είναι διαστατικώς εξαρτημένα και άρα δεν αποτελούν πλήρες σύστημα. Αν πάρουμε τα δύο από αυτά –π.χ. τα A και B – τότε μπορούν να εκφραστούν μέσω αυτών μόνο εκείνα τα ΦΜ D των οποίων το διάνυσμα D βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα A και B .

Μια απλή άσκηση θα μας βοηθήσει να εμπεδώσουμε καλύτερα τα παραπάνω.

2. Μια απλή άσκηση

ΑΣΚΗΣΗ: Εξετάστε τις ακόλουθες τριάδες φυσικών μεγεθών

$$(\hbar, m, e^2), \quad (\hbar, c, G), \quad (\hbar, c, e^2)$$

και αποφανθείτε ποιες αποτελούν διαστατικά πλήρες σύστημα και ποια(-ες) όχι. Το G στη μεσαία τριάδα είναι, βεβαίως, η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, ενώ αντί του ηλεκτρονικού φορτίου e χρησιμοποιήσαμε το τετράγωνό του που έχει απλούστερες φυσικές διαστάσεις. (Λόγω της σχέσης ορισμού $F = e^2/r^2$ θα είναι $[e^2] = [F]r^2 = [ma] \cdot L^2 = (MLT^{-2}) \cdot L^2 = L^3MT^{-2} \Rightarrow [e^2] = (3, 1, -2)$ ενώ για το ίδιο το e θα είχαμε $[e] = (3/2, 1/2, -1)$.)

Αύση: Θέτοντας, για λόγους απλότητας, $g = e^2$ τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα $\hbar, m$ και g της πρώτης τριάδας μεγεθών $\hbar, m$ και g θα είναι τα

$$[\hbar] = [E \cdot T] = (ML^2T^{-2}) \cdot T = L^2MT^{-1} \Rightarrow \hbar = (2, 1, -1),$$

$$m = (0, 1, 0), \quad g = (3, 1, -2).$$

Και για να δούμε αν είναι συνεπίπεδα ή όχι –χωρίς να τα σχεδιάσουμε– υπολογίζουμε την ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει βάζοντας τις συντεταγμένες τους στις διαδοχικές της στήλες. Θα είναι λοιπόν

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (+1)(2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3) = -1$$

όπου η ορίζουσα υπολογίστηκε αναπτύσσοντας ως προς τη μεσαία στήλη που έχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Συμπέρασμα: Τα μεγέθη $\hbar, m$ και e^2 είναι διαστατικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν ένα διαστατικά πλήρες σύστημα. Κάθε άλλο φυσικό μέγεθος μπορεί να εκφραστεί μέσω αυτών.

Ως επαλήθευση ας δούμε σε διανυσματική γραφή τη σχέση $a_0 = \hbar^2/me^2 = \hbar^2m^{-1}g^{-1}$ που δίνει την ακτίνα του Bohr, δηλαδή ένα μέγεθος με διαστάσεις μήκους. Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι εκθέτες μ, ν, λ στη σχέση $D = A^\mu B^\nu C^\lambda$ δεν είναι παρά οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων A, B, C που δίνει το διάνυσμα D . Εδώ λοιπόν όπου $a_0 = \hbar^2m^{-1}g^{-1}$ θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$a_0 = 2\hbar + (-1)m + (-1)g$$

δηλαδή η

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

η οποία πράγματι ισχύει όπως είναι εύκολο να δείτε.

Για τη δεύτερη τριάδα θα έχουμε

$$\begin{aligned} F &= G \frac{M^2}{r^2} \Rightarrow [G] = [Fr^2]M^{-2} = (ML^3T^{-2})M^{-2} = L^3M^{-1}T^{-2} \\ &\Rightarrow \hbar = (2, 1, -1), \quad c = (1, 0, -1), \quad G = (3, -1, -2) \\ &\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

οπότε κι εδώ τα αντιπροσωπευτικά διανύσματα της τριάδας δεν είναι συνεπίπεδα και άρα αποτελούν ένα διαστατικά πλήρες σύστημα. Αν παραδείγματος χάριν θέλουμε να κα-

τασκευάσουμε από αυτά ένα μέγεθος με διαστάσεις μάζας –και άρα με αντίστοιχο διάνυσμα $\mathbf{M} = (0, 1, 0)$ – τότε θα πρέπει να λύσουμε ως προς μ, ν, λ τη διανυσματική σχέση

$$\mathbf{M} = \mu \mathbf{h} + \nu \mathbf{c} + \lambda \mathbf{g} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= 2\mu + \nu + 3\lambda \\ 1 &= \mu - \lambda \\ 0 &= -\mu - \nu - 2\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = \nu = 1/2, \lambda = -1/2$$

Θα είναι επομένως $M = \sqrt{\hbar c/G}$ και η μάζα αυτή είναι γνωστή ως *μάζα του Planck* (σύμβολο M_P) και αντιπροσωπεύει την κλίμακα «μικροσκοπικών» μαζών όπου η κβαντική βαρύτητα γίνεται σημαντική. Και αν θυμηθούμε ότι η ποσότητα $\hbar/mc$ έχει διαστάσεις μήκους –είναι το μήκος κύματος Compton– και θέσουμε $m = M_P$ τότε, από τα $\hbar, c$ και G , φτιάχνουμε και την ποσότητα

$$\ell_P = \frac{\hbar}{M_P c} = \frac{\hbar}{\sqrt{\hbar c/G} \cdot c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

που έχει διαστάσεις μήκους και είναι γνωστή ως *μήκος Planck* με ανάλογο, όπως πριν, φυσικό νόημα.

Ως προς την τριάδα $\hbar, c$ και $g (= e^2)$ θα έχουμε

$$\mathbf{h} = (2, 1, -1), \quad \mathbf{c} = (1, 0, -1), \quad \mathbf{g} = (3, 1, -2)$$

από όπου φαίνεται αμέσως ότι θα είναι $\mathbf{g} = \mathbf{h} + \mathbf{c}$ και άρα τα μεγέθη $\hbar, c$ και g είναι διαστατικώς εξαρτημένα και μάλιστα –λόγω της $\mathbf{g} = \mathbf{h} + \mathbf{c}$ – θα είναι $g = (\text{αδιάστατη σταθερά}) \hbar c$ που μας είναι βέβαια πολύ γνωστό αφού το πηλίκο $g/\hbar c = e^2/\hbar c$ δεν είναι παρά η περίφημη σταθερά της λεπτής υφής $\alpha = e^2/\hbar c$ που είναι πράγματι αδιάστατος αριθμός. Διευκρινίζουμε έτσι επ' ευκαιρία και τούτο. Ότι αν μια τριάδα μεγεθών είναι διαστατικώς εξαρτημένα τότε από αυτά μπορεί πάντα να κατασκευαστεί μια αδιάστατη ποσότητα. Και αντίστροφα: Αν έχουμε βρει έναν τέτοιο αδιάστατο συνδυασμό τους, τότε τα μεγέθη είναι διαστατικώς εξαρτημένα. Πράγματι, όπως είχαμε δει νωρίτερα, σε αυτή την περίπτωση θα είναι $\mathbf{c} = \rho \mathbf{A} + \sigma \mathbf{B}$, δηλαδή $C = A^\rho B^\sigma$ οπότε το πηλίκον $c/A^\rho B^{\sigma(*)}$ θα είναι σίγουρα μια αδιάστατη ποσότητα.

3. Γενική διερεύνηση της περιπτώσεως όπου το ζητούμενο μέγεθος εξαρτάται από περισσότερα των τριών δεδομένα μεγέθη

Για λόγους απλότητας θα περιορίσουμε τη διερεύνηση στην περίπτωση των *τεσσάρων* δεδομένων μεγεθών –ας τα πούμε A, B, C και D – οπότε το ζητούμενο μέγεθος –ας το πούμε E – θα γράφεται ως

$$E = f(A, B, C, D) \quad (9)$$

μόνο που τώρα δεν υπάρχει κανένας λόγος να έχει η συνάρτηση f τη μορφή ενός γινομένου δυνάμεων των A, B, C και D , και ο σκοπός μας εδώ είναι να δούμε αν η απαίτηση της διαστατικής ομοιογένειας των δύο μελών της (9) θέτει, παρ' όλα αυτά, κάποιους περιορισμούς στις δυνατές μορφές της f .

Μια βασική προϋπόθεση για τα περαιτέρω είναι ότι τουλάχιστον μία τριάδα από τα τέσσερα μεγέθη A, B, C, D είναι διαστατικά πλήρης, και ας πούμε ότι μία από αυτές είναι η

(*) Υπενθυμίζουμε τη σύμβαση: Όταν γράφουμε $D = A^\mu B^\nu C^\lambda$ ή $C = A^\rho B^\sigma$ όπως εδώ, εννοούμε πάντα μια ισότητα με απροσδιοριστία μιας αδιάστατης πολλαπλασιαστικής σταθεράς.

A, B, C . Θα επιχειρηματολογήσουμε τότε ότι η συνάρτηση f θα μπορεί πάντα να γραφεί ως

$$E = E_0 g(\omega) \quad (10)$$

όπου E_0 ο μοναδικός συνδυασμός των A, B, C με τις διαστάσεις του E και $g(\omega)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου ω που κατασκευάζεται από τα διδόμενα μεγέθη. Η σχέση (10) είναι, με μια έννοια, προφανής. Αφού το E_0 δίνει τη σωστή φυσική διάσταση στο δεύτερο μέλος –δηλαδή την ίδια με το πρώτο– η απομένουσα συνάρτηση $g(A, B, C, D)$ πρέπει να είναι αδιάστατη και άρα θα μπορεί να εξαρτάται μόνο από έναν αδιάστατο συνδυασμό των A, B, C και D που τον συμβολίσουμε με το γράμμα ω . Μήπως όμως υπάρχουν πολλοί τέτοιοι συνδυασμοί ω_i ($i = 1, 2, \dots$) οπότε η συνάρτηση g θα πρέπει να έχει τη γενικότερη μορφή $g = g(\omega_1, \omega_2, \dots)$; Η απάντηση περιέχεται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Από μια τετράδα φυσικών μεγεθών που περιέχει τουλάχιστον μία τριάδα της οποίας τα μεγέθη είναι διαστατικώς ανεξάρτητα, μόνο ένας αδιάστατος συνδυασμός τους ω μπορεί να κατασκευαστεί. (Και βέβαια δεν θεωρείται ως άλλος αδιάστατος συνδυασμός μια τυχούσα συνάρτηση $\phi(\omega)$ που επίσης είναι αδιάστατη ποσότητα.)

Η απόδειξη συνίσταται στην τετριμμένη διαπίστωση ότι αφού υπάρχει τουλάχιστον μία τριάδα μεγεθών που δεν είναι διαστατικά εξαρτημένα, τότε μεταξύ των τεσσάρων διανυσμάτων A, B, C και D θα υπάρχει μόνο μία σχέση γραμμικής εξάρτησης της γενικής μορφής

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0 \quad (11)$$

που είναι ισοδύναμο με τη διατύπωση ότι η 3×4 μήτρα

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

έχει τάξη (rank) τρία. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι τα A, B και C είναι γραμμικά ανεξάρτητα –δηλαδή μη συνεπίπεδα– διανύσματα, τότε θα είναι σίγουρα $\delta \neq 0$ και η (11) θα μπορεί πάντα να γραφεί ως $D = \mu A + \nu B + \lambda C$ ή αλλιώς $D = \text{σταθερά} \times A^\mu B^\nu C^\lambda$ από όπου προκύπτει αμέσως ότι ο αδιάστατος συνδυασμός των A, B, C και D που ζητάμε, είναι ο

$$\omega = \frac{D}{D_0} \quad (13)$$

όπου D_0 ο μοναδικός συνδυασμός των A, B και C που έχει τη διάσταση του τέταρτου μεγέθους D . Από φυσικής πλευράς μπορούμε λοιπόν να δούμε την (10) ως εξής. Από την τετράδα των δεδομένων φυσικών μεγεθών διαλέγουμε μια διαστατικώς ανεξάρτητη τριάδα –ας την πούμε A, B, C – η οποία ορίζει και ένα πλήρες σύστημα μονάδων για τη μέτρηση και όλων των άλλων μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Δηλαδή των D και E στην περίπτωση μας. Έτσι η (10) –σε συνδυασμό με την (13)– γράφεται στην ακόμα πιο διαυγή μορφή

$$\frac{E}{E_0} = g\left(\frac{D}{D_0}\right) \quad (14)$$

όπου D_0 και E_0 οι μονάδες μέτρησης των μεγεθών D και E όπως ορίζονται (μονοσήμαντα) από τη βασική τριάδα μεγεθών A, B και C . Δηλαδή ως οι μοναδικοί συνδυασμοί των A, B, C με τις διαστάσεις των D και E αντίστοιχα.

Για τους πιο έμπειρους στη χρήση της διαστατικής ανάλυσης τα παραπάνω είναι μάλλον προφανή. Αφού υπάρχουν μόνο τρεις βασικές μονάδες –μήκος, μάζα, χρόνος– μπορούμε πάντα, με κατάλληλη εκλογή αυτών των βασικών μονάδων, να δώσουμε οποιεσδήποτε τιμές επιθυμούμε σε μια οποιαδήποτε τριάδα διαστατικά ανεξάρτητων μεγεθών. Και ειδικότερα μπορούμε να τις κάνουμε και τις τρεις μονάδα. Στην περίπτωση μας μπορούμε λοιπόν πάντα να διαλέξουμε ένα σύστημα μονάδων –ας το πούμε το *φυσικό*

σύστημα μονάδων του προβλήματος— τέτοιο ώστε να είναι $A = B = C = 1$. Το οποίο σημαίνει στην πραγματικότητα ότι ως μονάδες μήκους, μάζας και χρόνου έχουμε πάρει τους μοναδικούς εκείνους συνδυασμούς των A, B και C με διαστάσεις μήκους, μάζας και χρόνου. Οπότε βέβαια οι μονάδες μέτρησης των D και E θα είναι επίσης —όπως είπαμε και πριν— οι μοναδικοί εκείνοι συνδυασμοί των A, B, C με τις διαστάσεις των D και E αντίστοιχα. Σε αυτό λοιπόν το φυσικό σύστημα μονάδων του προβλήματος η (9) θα γράφεται ως

$$E = f(1, 1, 1, D) \equiv f(D) \quad (15)$$

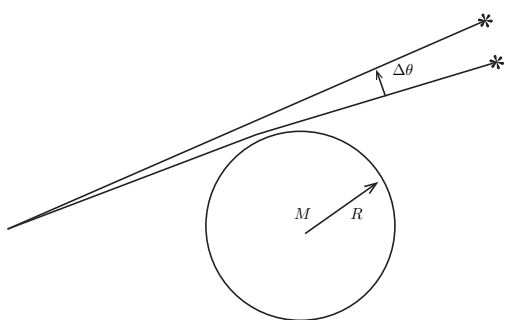
όπου βέβαια τα βασικά μεγέθη A, B και C πήραν την τιμή μονάδα ενώ τα D και E θεωρείται ότι μετρούνται με τις φυσικές μονάδες D_0 και E_0 που ορίζονται μονοσήμαντα από τα A, B, C . Έτσι η (15) είναι προφανώς ταυτόσημη με την (14) αφού τα πηλίκια E/E_0 και D/D_0 δεν είναι παρά οι τιμές των μεγεθών E και D στο φυσικό σύστημα μονάδων του προβλήματος.

Από τα όσα είπαμε νωρίτερα προκύπτει επίσης ότι δεν έχει σημασία ποια τριάδα διαστατικά ανεξάρτητων μεγεθών θα επιλέξουμε ως βασική, όπως δηλαδή η A, B, C στην προηγούμενη γενική συζήτηση. Με μια άλλη επιλογή βασικής τριάδας, απλώς θα αλλάξει η συνάρτηση $g(\omega)$ αφού η αδιάστατη μεταβλητή ω θα έχει αντικατασταθεί με μια άλλη —ας την πούμε Ω — που όμως θα είναι συνάρτηση της ω ($\Omega = \phi(\omega)$) όπως εξηγήσαμε νωρίτερα. Έτσι η μόνη αλλαγή στην (15) είναι ότι η αυθαίρετη συνάρτηση g θα έχει αντικατασταθεί με κάποια άλλη επίσης αυθαίρετη και άρα χωρίς φυσικές συνέπειες. (Στην ουσία έγινε απλώς η αλλαγή μεταβλητής $\Omega = \phi(\omega)$).

Το συμπέρασμα είναι σαφές. Παρότι η διαστατική μέθοδος δεν έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει έναν φυσικό τύπο όταν το ζητούμενο μέγεθος εξαρτάται από περισσότερες των τριών φυσικές παραμέτρους —π.χ. από τέσσερις— εντούτοις περιορίζει σοβαρά τον αριθμό των μεταβλητών της σχετικής συνάρτησης —π.χ. από τέσσερις τις έκανε μία— και έτσι μπορεί να διευκολύνει σημαντικά περαιτέρω προσπάθειες όπως π.χ. αριθμητικούς υπολογισμούς ή άλλου είδους προσεγγιστικές μεθόδους.

4. Πώς η διαστατική μέθοδος μπορεί να έχει χρήσιμες εφαρμογές ακόμα και όταν ο αριθμός των παραμέτρων του προβλήματος είναι μεγαλύτερος του τρία

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η κάμψη των φωτεινών ακτίνων που περνάνε κοντά στην επιφάνεια ενός μαζικού αστρικού αντικειμένου —ζωντανό άστρο, λευκός νάνος, αστέρας νετρονίων κ.λπ.— και φτάνουν έως εμάς.



Ο υπολογισμός αυτής της κάμψης —η οποία μετρήθηκε πειραματικά το 1919 στη διάρκεια μιας ολικής έκλειψης που έκρυβε το φως του ήλιου και έτσι μας επέτρεψε να δούμε για λίγο το φως κάποιων άστρων που πέρναγε «ξυστά» από τον ήλιο— ο υπολογισμός λοιπόν αυτής της κάμψης απαιτεί τη χρήση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και είναι επομένως εκτός συζητήσεως για οποιονδήποτε δεν είναι μυημένος στα πολύ απαιτητικά μαθηματικά αυτής της θεωρίας.

Υποθέστε όμως ότι είστε ένας καλός πειραματικός που θέλει να παρατηρήσει το φαινόμενο και διερωτάται πρώτα απ' όλα αν είναι καταρχήν παρατηρήσιμο με την παρατηρησιακή ακρίβεια των ημερών του. Υποθέστε επίσης ότι βρίσκεστε στο σωτήριο έτος 1916 —δηλαδή το έτος γέννησης της γενικής σχετικότητας— οπότε ούτε ο ίδιος ο Einstein την έχει μάθει αρκετά καλά ώστε να μπορεί να κάνει «στα γρήγορα» έναν υπολογισμό σαν αυτόν που θέλετε. Να βρείτε δηλαδή τη θεωρητική πρόβλεψη για τη γωνία κάμψης $\Delta\theta$ (δείτε σχήμα) συναρτήσει των παραμέτρων του προβλήματος. Που είναι, βεβαίως, οι M και R (μάζα και ακτίνα του αστρικού αντικειμένου) και επίσης οι βασικές σταθερές των φυσικών νόμων που διέπουν το φαινόμενο. Δηλαδή οι c και G , αφού πρόκειται

αφενός για ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο —για *φως* μιλάμε— και αφετέρου για βαρυτικό αφού η βαρύτητα είναι που προκαλεί την κάμψη. Θα είναι επομένως

$$\Delta\theta = F(M, R, G, c). \quad (16)$$

Μια στιγμή όμως. Γιατί αποκλείσαμε το ενδεχόμενο να εξαρτάται το $\Delta\theta$ και από το μήκος κύματος του φωτός; Για έναν λόγο πολύ «χονδροειδή». Θεωρήσαμε ότι η κυματική φύση του φωτός δεν θα παίζει κυρίαρχο ρόλο στο πρόβλημα διότι οι ανομοιογένειες που δημιουργεί στο χώρο το πεδίο βαρύτητας είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του (ορατού) φωτός και επομένως τα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης θα είναι μάλλον ανεπαίσθητα.

Δεδομένου τώρα ότι το $\Delta\theta$ στην (16) είναι αδιάστατη ποσότητα, η γενική θεωρία που αναπτύξαμε προηγουμένως μας λέει αμέσως ότι θα είναι

$$\Delta\theta = g(\omega), \quad (17)$$

όπου ω ο μοναδικός αδιάστατος συνδυασμός των M, R, G και c . Ο οποίος βρίσκεται πολύ εύκολα αν σκεφτούμε ότι οι ποσότητες GM^2/R και Mc^2 έχουν και οι δύο διαστάσεις ενέργειας (η πρώτη αντιπροσωπεύει τη βαρυτική ενέργεια του άστρου και η δεύτερη την ενέργεια ηρεμίας της μάζας του) οπότε το πηλίκό τους $(GM^2/R)/Mc^2 = GM/c^2R$ θα είναι ο ζητούμενος αδιάστατος συνδυασμός. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\omega = \frac{GM}{c^2R}. \quad (18)$$

Όμως επειδή η ενέργεια ηρεμίας της μάζας M είναι σίγουρα πολύ μεγαλύτερη από τη βαρυτική ενέργεια του άστρου, το πηλίκό τους —δηλαδή ο αδιάστατος αριθμός ω — θα είναι πολύ μικρότερος της μονάδας οπότε θα μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $g(\omega)$ μόνο με τους λίγους πρώτους όρους —ή μόνο τον πρώτο— του αναπτύγματός της σε σειρά Taylor. Έστω λοιπόν ότι

$$\Delta\theta = g(\omega) = c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2 + \dots \quad (19)$$

Δεδομένου όμως ότι για $M = 0$ ($\Rightarrow \omega = 0$) θα πρέπει να είναι επίσης και $\Delta\theta = 0$ (αν δεν υπάρχει μάζα, δεν υπάρχει κάμψη) ο σταθερός όρος c_0 στην (19) θα πρέπει να μηδενίζεται, οπότε η σειρά (19) θα μπορεί να προσεγγιστεί μόνο με τον όρο $c_1\omega$, αφού για $\omega \ll 1$ οι ανώτερες δυνάμεις του ω είναι ασύγκριτα μικρότερες. Καταλήγουμε έτσι στον προσεγγιστικό τύπο

$$\Delta\theta = c_1\omega = c_1 \frac{GM}{c^2R}, \quad (20)$$

όπου c_1 μια αριθμητική σταθερά που δεν μπορεί βέβαια να προσδιοριστεί με διαστατική ανάλυση. Όπως όμως γνωρίζουμε από την εμπειρία μας, με φυσικούς τύπους που περιγράφουν θεμελιώδη φυσικά φαινόμενα —και επομένως απορρέουν από μια θεμελιώδη φυσική θεωρία και όχι από εμπειρικά δεδομένα που συνοψίζονται σε κάποιον εμπειρικό τύπο— οι αριθμητικοί συντελεστές που εμφανίζονται είναι πάντα της τάξεως του ένα. Ούτε πολύ μεγάλοι, ούτε πολύ μικροί αριθμοί. Ένα π , κάποιο $\sqrt{2}$, $1/\pi$, κ.λπ. Αν το ίδιο ισχύει και για τον συντελεστή c_1 στην (20) —και δεν βλέπουμε το λόγο να μην ισχύει— τότε, τουλάχιστον για *εκτιμήσεις τάξεως μεγέθους*, ο (20) μπορεί άνετα να χρησιμοποιηθεί, γράφοντάς τον μάλιστα στην καταλληλότερη μορφή

$$\Delta\theta \simeq \frac{GM}{c^2R}. \quad (21)$$

Απομένει να βάλουμε στον (21) τις αριθμητικές τιμές —π.χ. για ένα άστρο σαν τον ήλιο μας^(*)— και το αποτέλεσμα είναι

$$\Delta\theta \simeq 2 \times 10^{-6} \simeq 0,4''. \quad (22)$$

(*) $R \simeq 700.000 \text{ km}$, $M = 2 \times 10^{33} \text{ g}$, ($G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ cgs}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$)

Η κάμψη του φωτός θα είναι επομένως της τάξης των *δεύτερων λεπτών της μοίρας*. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι μια τέτοια απόκλιση είναι παρατηρήσιμη ακόμα και με τις τεχνικές των αρχών του περασμένου αιώνα, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το φαινόμενο που συζητάμε μπορεί σίγουρα να παρατηρηθεί.

Πρόκειται για διαπίστωση κρίσιμης σημασίας. Διότι ο πειραματικός μας φυσικός που έκανε την παραπάνω ανάλυση θα μπορούσε πλέον να πείσει τον θεωρητικό φυσικό της... διπλανής πόρτας να καταβάλει την προσπάθεια που απαιτείται για να κάνει τον ακριβή υπολογισμό (με βάση τη γενική σχετικότητα) ο οποίος βέβαια απλώς θα προσδιορίσει τον ακριβή αριθμητικό συντελεστή c_1 στη σχέση (20). (Ενώ ενδέχεται να δώσει και ανώτερους όρους της σειράς (19) οι οποίοι όμως γίνονται αμελητέοι για τιμές του ω που είναι της τάξης του 10^{-6} , όπως είδαμε.) Και έτσι ακριβώς... έγινε! Ο θεωρητικός φυσικός της (υποθετικής) ιστορίας μας πράγματι έκανε τον υπολογισμό και βρήκε ότι $c_1 = 4$. Και ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία διαπίστωσε –όχι χωρίς έκπληξη– ότι περίπου διακόσια χρόνια πριν κάποιος σκέφτηκε να κάνει τον ίδιο υπολογισμό στο πλαίσιο της νευτώνειας φυσικής και της παλιάς σωματιδιακής θεωρίας για το φως. Και βρήκε το ίδιο βεβαίως αποτέλεσμα όσον αφορά την εξάρτηση από τα M, R, G και c (αυτό είναι υποχρεωτικό από διαστατική ανάλυση), αλλά με αριθμητικό συντελεστή ακριβώς το μισό! Δηλαδή $c_1 = 2$. Έτσι έχουμε στο «τραπέζι» δύο θεωρητικές προβλέψεις –μία *νευτώνεια* και μία κατά Einstein–

$$\Delta\theta_N = 2\frac{GM}{c^2 R}, \quad \Delta\theta_E = 4\frac{GM}{c^2 R} \quad (23)$$

και περιττεύει(;) να πούμε ότι η παρατήρηση της έκλειψης του 1919 επιβεβαίωσε τη δεύτερη και απέρριψε την πρώτη, προσφέροντας έτσι την πρώτη πειραματική επαλήθευση της γενικής σχετικότητας.

Από τη σκοπιά της διαστατικής μεθόδου που μας ενδιαφέρει εδώ, το πειραματικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του άγνωστου συντελεστή c_1 –να συμπεράνουμε δηλαδή ότι θα είναι $c_1 = 4 \pm$ πειραματικό σφάλμα– ακόμα και αν δεν είχαμε μια ακριβή θεωρία ή δεν είμαστε σε θέση (καθόλου σπάνιο στη γενική σχετικότητα) να βρούμε την ακριβή λύση για το συγκεκριμένο ερώτημα. Ενώ θα μπορούσαμε επίσης να σχεδιάσουμε μια αριθμητική μέθοδο επίλυσης ή ένα αριθμητικό πείραμα προσομοίωσης κατάλληλα στοχευμένο ώστε να προσδιορίσει μόνο αυτό που μας λείπει, δηλαδή τον απροσδιόριστο αριθμητικό συντελεστή c_1 .

Βλέπουμε έτσι με τούτη την εφαρμογή –και τα όσα υπαινιχθήκαμε στην παραπάνω παράγραφο– ότι η μέθοδος της διαστατικής ανάλυσης μπορεί να επεκταθεί και να είναι αφάνταστα χρήσιμη ακόμα και σε προβλήματα με αριθμό παραμέτρων μεγαλύτερο του τρία.

Στα χέρια ενός καλού φυσικού –σε όλα τα επίπεδα από το βασικό ως το πολύ προχωρημένο– η διαστατική ανάλυση είναι ένα αξιοθαύμαστο εργαλείο που μας επιτρέπει να κάνουμε σημαντικές προβλέψεις ακόμα και υπό συνθήκες πλήρους άγνοιας της βασικής θεωρίας ενός προβλήματος.