Οι ελλειπτικές συναρτήσεις είναι η γενίκευση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (όπως το ελλειπτικό ολοκλήρωμα 1ου είδους είναι η γενίκευση της συνάρτησης τόξου ημιτόνου). Εκτός από την μορφή που παίρνουν όταν $m=0$, σημειώνουμε και τις εξής ιδιότητες των συναρτήσεων $\mathrm{sn}(x,m)$ και $\mathrm{cd}(x,m)$:

$$\mathrm{sn}(-x)=-\mathrm{sn}\,x,\ \mathrm{sn}(x+K)=\mathrm{cd}\,x,\ \mathrm{sn}(x+2K)=-\mathrm{sn}\,x,\ \mathrm{sn}(K-x)=-\mathrm{cd}x$$
$$\mathrm{cd}(-x)=\mathrm{cd}\,x,\ \mathrm{cd}(x+K)=-\mathrm{sn}\,x,\ \mathrm{cd}(x+2K)=-\mathrm{cd}\,x,\ \mathrm{cd}(K-x)=\mathrm{sn}\,x$$

Τοποθετώντας τώρα όπου $\mathrm{sn}\to\sin$, $\mathrm{cd}\to\cos$ και όπου $K\to\pi/2$, παίρνουμε τις ιδιότητες του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Από την άλλη μεριά οι συναρτήσεις $\mathrm{sn}(x,m)$ και $\mathrm{cn}(x,m)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις $\mathrm{cn}^2 z+\mathrm{sn}^2 z=1$, $\mathrm{sc}\,x=\dfrac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}$ και θα μπορούσαμε να κάνουμε επίσης την αντιστοιχία $\mathrm{sn}\to\sin$, $\mathrm{cn}\to\cos$ και $\mathrm{sc}\to\tan$.

8.3.4 Η ΑΚΡΙΒΗΣ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

Έχοντας υπόψιν τις προηγούμενες παραγράφους όπου περιγράφονται οι ελλειπτικές συναρτήσεις και κυρίως η σχέση αντιστροφής της ελλειπτικής συνάρτησης sn με το ελλειπτικό ολοκλήρωμα, μπορούμε στη συνέχεια να βρούμε την ακριβή λύση της Δ.Ε. του εκκρεμούς, $\theta=\theta(t)$.

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς είναι

$$\theta''(t)+\frac{g}{l}\sin\theta(t)=0$$

Θεωρούμε ως αρχικές συνθήκες τις $\theta(0)=\theta_0$ και $\theta'(0)=0$.

Ισχύει

$$\theta''(t)=\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=\frac{d\theta'(t)}{dt}=\frac{d\theta'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta'}{d\theta}\theta'$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε. και ολοκληρώνοντας ως προς θ έχουμε

$$\int\theta' d\theta'+\frac{g}{l}\int\sin\theta d\theta=C \text{ ή}$$

$$\frac{\theta'^2}{2}-\frac{g}{l}\cos\theta=C$$

Η σταθερά C προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες $C=-\dfrac{g}{l}\cos\theta_0$, οπότε

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}\,.$$

Εφόσον η γωνία μειώνεται ξεκινώντας από την τιμή θ_0, ο ρυθμός μεταβολής της, μέχρι το εκκρεμές να φτάσει στην θέση ισορροπίας θα είναι αρνητικός, οπότε κρατάμε το αρνητικό πρόσημο

$$-\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ και κάνοντας διαχωρισμό των μεταβλητών, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

Για να υπολογίσουμε την περίοδο ολοκληρώσαμε από $t = 0$ έως $t = \frac{T}{4}$. Τώρα θα ολοκληρώσουμε από $t = 0$ όταν το εκκρεμές σχηματίζει γωνία θ_0 με την κατακόρυφη έως τη χρονική στιγμή t που το εκκρεμές σχηματίζει μια τυχαία γωνία θ

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\frac{\theta_0}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}}$$

ή

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_{0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\frac{\theta_0}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}} - \int_{0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\frac{\theta_0}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}}$$

Θέτοντας $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ και $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin u$, τότε $d\theta = \frac{2k\cos u\,du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}} - \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}$$

Όμως ισχύει $K(k^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}$, οπότε*

$$x \equiv K\left(k^2\right) - t\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn είναι η αντίστροφη του ελλειπτικού ολοκληρώματος 1ου είδους. Οπότε

$$\mathrm{sn}\left(x, k^2\right) = \sin u = \frac{1}{k}\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{όπου} \quad x = K\left(k^2\right) - t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Επιλύοντας ως προς θ την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\boxed{\theta = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(x, k^2\right)\right] = 2\arcsin\left\{k\,\mathrm{sn}\left[K\left(k^2\right) - t\sqrt{\frac{g}{l}}, k^2\right]\right\}} \qquad (8.41)$$

---

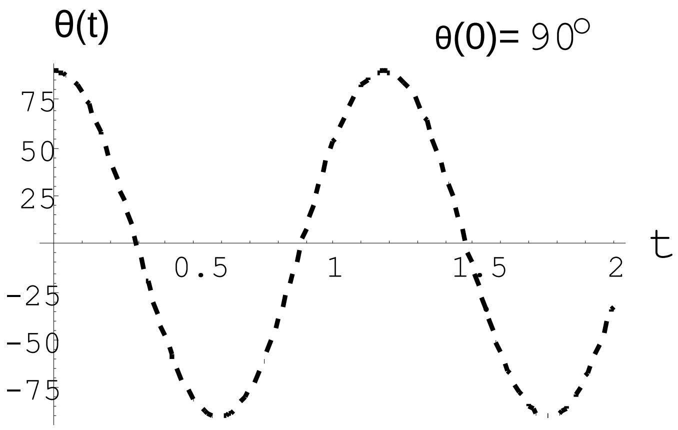
* Υπενθυμίζεται ότι στη θέση της παραμέτρου m που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ελλειπτικό μέτρο k. Η σχέση που συνδέει τα δυο αυτά μεγέθη είναι: $m = k^2$.

Η εξ. (8.41) είναι η ζητούμενη λύση $\theta = \theta(t)$ όταν οι αρχικές συνθήκες* είναι $\theta(0) = \theta_0$ και $\theta'(0) = 0$. Από τις ιδιότητες των ελλειπτικών συναρτήσεων έχουμε

$$\mathrm{sn}(K - x) = \mathrm{cd}\, x$$

οπότε η λύση θα μπορούσε να γραφεί και ως

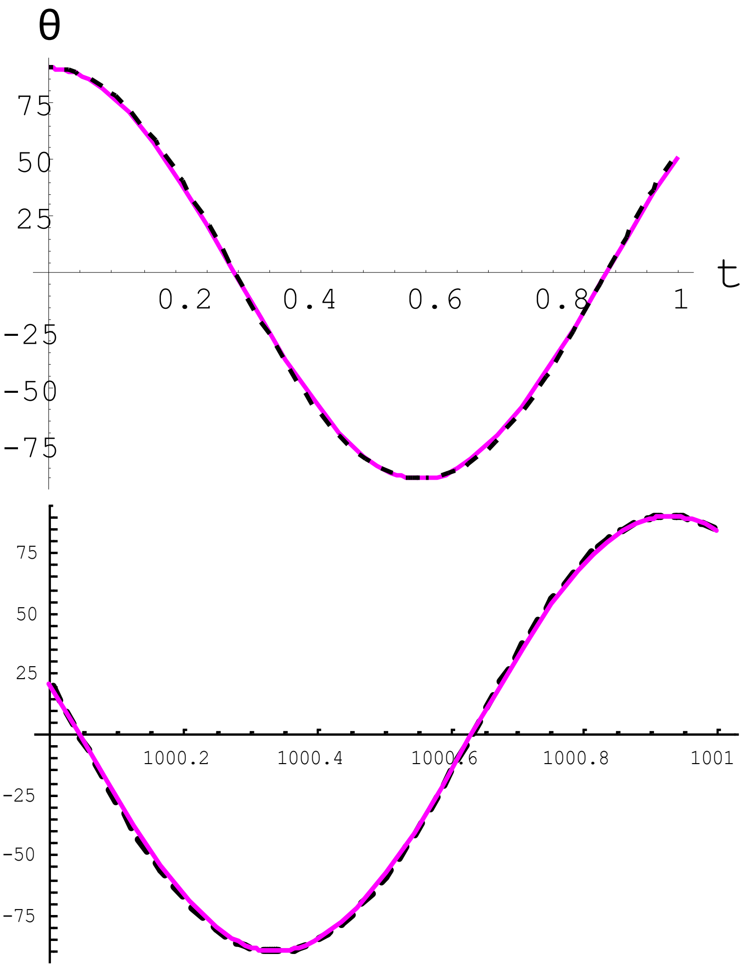
$$\theta = 2\arcsin\left\{ k\,\mathrm{cd}\left[t\sqrt{\frac{g}{l}}, k^2 \right] \right\}$$



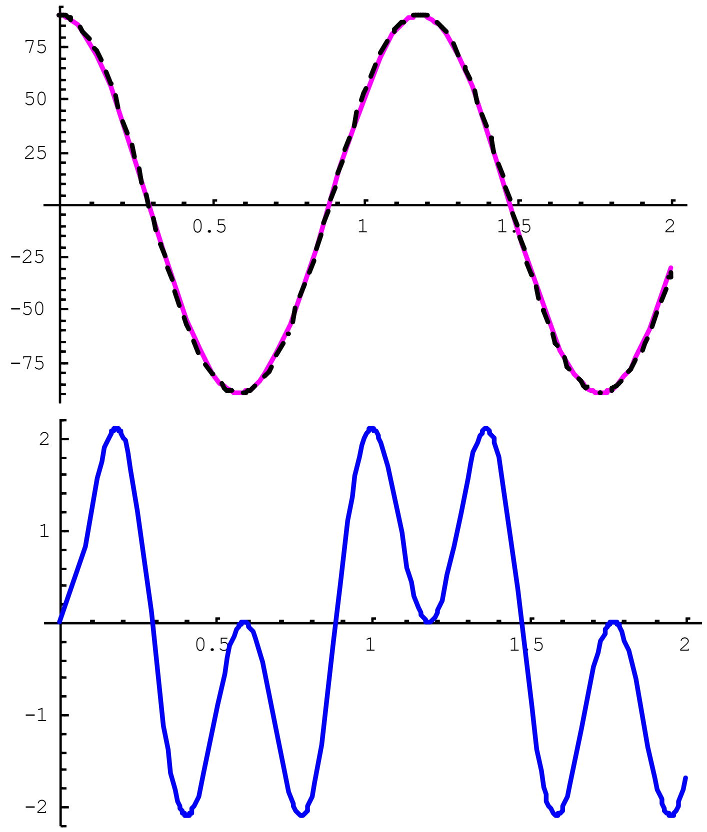
<u>Σχήμα 1</u>: Η γραφική παράσταση της ακριβούς λύσης (8.41)

* Στην περίπτωση που έχουμε ως αρχικές συνθήκες $\theta(0) = 0$ και $\theta'(0) = \theta'_{\max}$, τότε η λύση έχει την απλούστερη μορφή: $\theta = 2\arcsin\left\{ k\,\mathrm{sn}\left[t\sqrt{\frac{g}{l}}, k^2 \right] \right\}$

Παρατηρούμε ότι η ακριβής λύση μοιάζει με την συνάρτηση του συνημιτόνου. Έχει ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την ακριβή λύση (8.41) με την αρμονική προσέγγιση $\theta = \theta_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$ όπου T η ακριβής περίοδος του εκκρεμούς.



Σχήμα 2: Σύγκριση της αρμονικής λύσης $\theta = \theta_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$ (κόκκινη καμπύλη) για θ(0)=90°, όπου $T = T_0 \frac{2K(k^2)}{\pi}\left(k = \frac{1}{2}, T_0 = 1\right)$ η περίοδος του εκκρεμούς, με την ακριβή λύση εξ. (8.41) (μαύρη διακεκομμένη καμπύλη). (Αν χρησιμοποιούσαμε τον προσεγγιστικό τύπο της περιόδου T_0, τότε οι γραφικές παραστάσεις μετά από κάποιες περιόδους θα είχαν απόκλιση στον οριζόντιο άξονα.)



<u>Σχήμα 3</u>: Στο άνω διάγραμμα η περίπλοκη λύση (8.41) (μαύρη διακεκομμένη καμπύλη) και η αρμονική προσέγγιση (κόκκινη καμπύλη) για χρονική περίοδο δυο περιόδων. Το κάτω διάγραμμα δείχνει την διαφορά $\theta_{\substack{\text{ακριβής}\\\text{λύση}}} - \theta_{\substack{\text{αρμονική}\\\text{προσέγγιση}}}$. Προσοχή στην κλίμακα του κατακόρυφου άξονα.