ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το Γκαουσιανό ή Μιγαδικό Επίπεδο (§§ 20-22)

20. Ένα αποφασιστικό βήμα προς τα μπρος στην θεωρία των μιγαδικών αριθμών έγινε στις αρχές του 19[ου] αιώνα, όταν η ιδέα της απεικόνισης των μιγαδικών αριθμών στα σημεία ενός επιπέδου προέκυψε σχεδόν ταυτόχρονα σε αρκετούς μαθηματικούς. Ο Gauss εφάρμοσε την ιδέα αυτή συστηματικά, και εξαιτίας της μεγάλης προσωπικότητάς του έγινε παγκοσμίως αποδεκτή.

Θεωρούμε ένα επίπεδο, το οποίο θα ονομάζουμε μιγαδικό επίπεδο (ή επίπεδο του Gauss) και επιλέγουμε σ′ αυτό δυο σημεία Ο και Ε. Θα εισάγουμε στο επίπεδο αυτό ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του οποίου η αρχή είναι στο Ο και του οποίου ο άξονας x έχει το σημείο της μονάδας στο Ε. Απεικονίζουμε τώρα κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ στο σημείο P του επιπέδου του οποίου οι συντεταγμένες είναι x και y. Αντιστρόφως, σε κάθε σημείο $\mathrm{P}(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχούμε τον αριθμό $z = x + iy$. Με τον τρόπο αυτό έχουμε, τρόπος του λέγειν, ταυτίσει το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με τα σημεία του επιπέδου.

Το άμεσο πλεονέκτημα αυτής της ταύτισης βρίσκεται στο γεγονός ότι τα περισσότερα των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου τώρα αποδεικνύονται με απλές γεωμετρικές θεωρήσεις. Έτσι, για παράδειγμα, η απεικόνισή μας κάνει τους πραγματικούς αριθμούς στο μιγαδικό πεδίο να αντιστοιχούν στα σημεία του άξονα x, που ως εκ τούτου θα ονομάζεται *πραγματικός άξονας* ή *άξονας των πραγματικών αριθμών*. Επίσης δυο μιγαδικοί συζυγείς παριστάνονται από δυο σημεία τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Επιπλέον, η απόλυτη τιμή

$$|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

της διαφοράς των δυο μιγαδικών αριθμών

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2$$

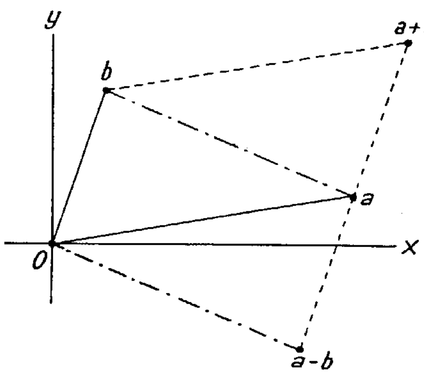
μετρά την απόσταση μεταξύ των εικόνων των σημείων. Το μέτρο $|a|$ ενός μιγαδικού αριθμού a είναι ως εκ τούτου το μέτρο της απόστασης της εικόνας του σημείου P του a από την αρχή των αξόνων Ο. Τελικά, αν $a \neq 0$ τότε το όρισμα

ϑ του a μετρά – σε ακτίνια – την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα OP και OE.

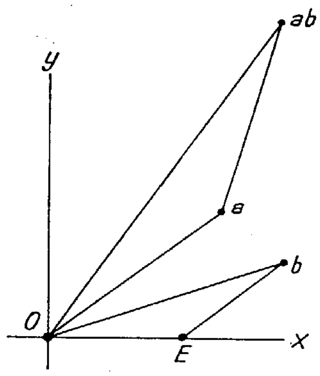
Τώρα θεωρούμε το τρίγωνο στο μιγαδικό επίπεδο του οποίου οι κορυφές ταυτίζονται με τις (εικόνες των) αριθμών a, b, και c. Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου αυτού δίνονται από τις ποσότητες $|b-c|, |c-a|, |a-b|$. Η σχέση

$$\big||c-a|-|a-b|\big| \le |b-c| \le |c-a|+|a-b| \tag{20.1}$$

η οποία προκύπτει από την (12.7), είναι απλά ένας άλλος τρόπος έκφρασης του θεωρήματος της στοιχειώδους γεωμετρίας αναφορικά με το γεγονός ότι το μήκος οποιασδήποτε πλευράς ενός τριγώνου είναι πάντοτε μεταξύ του αθροίσματος και της διαφοράς των δυο άλλων πλευρών.



Σχ. 1

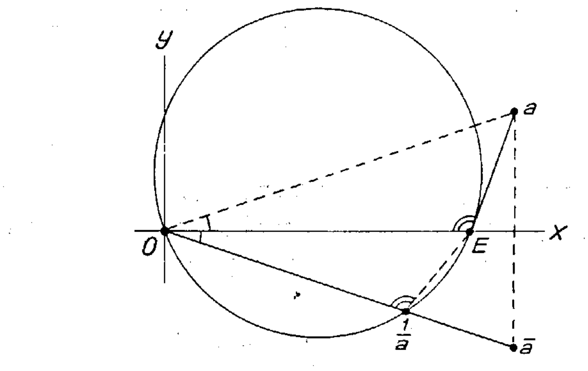


Σχ.2

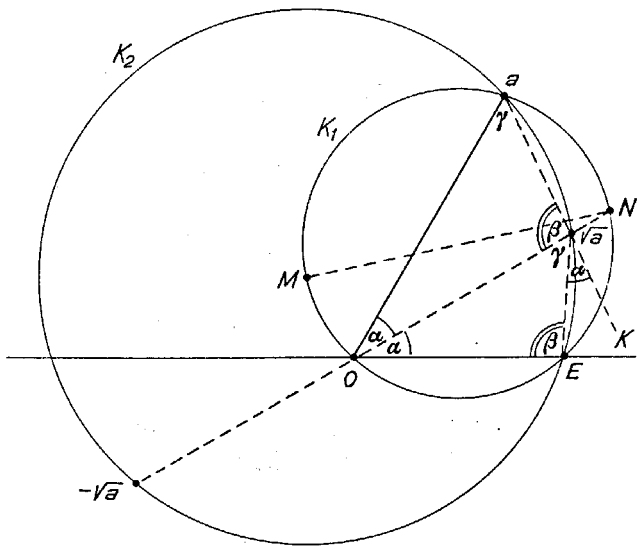
21. Ακόμη και αυτά τα πολύ απλά αποτελέσματα μπορούν, εξαιτίας της εντυπωσιακής τους διαισθητικότητας, να δικαιολογήσουν την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Ωστόσο είναι βαθύτεροι οι λόγοι που μια θεωρία συναρτήσεων, στην οποία οι μιγαδικοί αριθμοί δεν θεωρούνται ως γεωμετρικά σημεία, θα ήταν ακατανόητη στη σημερινή εποχή. Μια πρόχειρη εκτίμηση της σύνδεσης μεταξύ Θεωρίας Συναρτήσεων και Τοπολογίας – μιας σύνδεσης που ανακαλύφθηκε από τους A. L. Cauchy (1789-1857) και B. Riemann (1826-1865) – είναι δυνατή μόνον με τη βοήθεια της γεωμετρικής μας θεώρησης. Αλλά ακόμη και κάποιες πιο στοιχειώδεις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών οι οποίες έχουν πρωταρχική σημασία στην Θεωρία των Συναρτήσεων, θα γίνονται κατανοητές παρά μόνον με μέγιστη δυσκολία χωρίς την χρήση των γεωμετρικών ιδεών. Όλες αυτές οι ιδιότητες προέρχονται από το γεγονός ότι η ευθεία γραμμή και ο κύκλος παίζουν έναν αποφασιστικό ρόλο και στην στοιχειώδη γεωμετρία και στο μιγαδικό επίπεδο. Σ’ αυτή τη σύνδεση, θα ασχοληθούμε αρχικά με τους μετασχηματισμούς διατήρησης κύκλων, οι οποίοι εκφράζονται μέσω απλών μιγαδικών συναρτήσεων.

Αλλά πριν φτάσουμε στα θέματα αυτά, θα δείξουμε πρώτα πως οι αριθμητικές πράξεις στους μιγαδικούς αριθμούς μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσω κατασκευών της στοιχειώδους γεωμετρίας.

22. Αν a και b είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί των οποίων ο λόγος δεν είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε οι αριθμοί $a+b$ και $a-b$ προκύπτουν σχηματίζοντας τα



Σχ.3



Σχ.4

Εφαρμόζοντας στον κύκλο K_1 το θεώρημα της ισότητας των γωνιών που υποτείνουν στην ίδια χορδή, βρίσκουμε: $\alpha = \sphericalangle aON = \sphericalangle aEN$ και εφόσον $\overline{aN} = \overline{NE}$, έχουμε επίσης $\alpha = \sphericalangle NOE$. Το ίδιο θεώρημα εφαρμόζεται στον κύκλο K_2 - στον οποίο το EN είναι εφαπτόμενο – δίνοντας $\sphericalangle E\sqrt{a}K = \sphericalangle aEN = \alpha$. Έτσι τα τρίγωνα $OE\sqrt{a}$ και $O\sqrt{a}\,a$ είναι όμοια.

παραλληλόγραμμα που φαίνονται στο Σχ. 1. Παρομοίως, εκτός της περίπτωσης που τα a και b είναι και οι δυο πραγματικοί, ο αριθμός ab προσδιορίζεται μέσω μιας κατασκευής όπου χρησιμοποιούνται όμοια τρίγωνα, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.

Επιπλέον, για έναν μη πραγματικό $a \neq 0$, το σημείο $1/a$ προκύπτει από την τομή της ευθείας γραμμής που συνδέει το Ο με το $\bar{a}$ με τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία Ο και Ε και είναι εφαπτόμενος στην ευθεία Ea, ώστε τα τρίγωνα $O(1/a)E$ και OEa να είναι όμοια (βλέπε Σχ. 3).

Η κατασκευή η οποία παράγει τα $\pm\sqrt{a}$ από τον a είναι εξίσου απλή. Θεωρούμε (βλέπε Σχ. 4) τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου OEa και την διάμετρό του MN η οποία τέμνει την χορδή Ea σε ορθή γωνία, με το M επιλεγμένο έτσι ώστε $OM < EM$. Τότε τα σημεία $\pm\sqrt{a}$ είναι οι τομές της ευθείας ON με τον κύκλο που διέρχεται μέσω των E και a και έχει το κέντρο του στο M. Για να δειχθεί τούτο, χρειάζεται μόνο να αποδειχθεί ότι οι τρεις γωνίες που συμβολίζονται με α στο Σχ. 4 είναι πράγματι ίσες μεταξύ τους. Η απόδειξη της κατασκευής τότε προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων $OE\sqrt{a}$ και $O\sqrt{a}a$.

Κύκλοι στο Μιγαδικό Επίπεδο (§§ 23)

23. Σύμφωνα με την § 20, τα σημεία z του Γκαουσιανού επιπέδου που βρίσκονται σε ένα κύκλο ακτίνας R γύρω από το κέντρο a ικανοποιεί την εξίσωση

$$|z-a| = R \tag{23.1}$$

Αλλά εφόσον

$$|z-a|^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}\,,$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (23.1) με την

$$\bar{z}z - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} - R^2 = 0\,. \tag{23.2}$$

Τώρα αν $A, B, C,$ και D είναι πραγματικοί αριθμοί και αν θέσουμε

$$A(z+\bar{z}) + iB(\bar{z}-z) + C(z\bar{z}-1) + D(z\bar{z}+1) = 0 \tag{23.3}$$

τότε η εξίσωση (23.3) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (23.2) υπό τον όρο ότι τα $A, B, C,$ και D επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις

$$a = -\frac{A+iB}{C+D}, \quad R^2 = \frac{A^2+B^2+C^2-D^2}{(C+D)^2} \tag{23.4}$$

Συνεπώς η εξίσωση (23.3) παριστάνει έναν κύκλο ακτίνας R με κέντρο το a όποτε ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$C+D \neq 0, \quad D^2 < A^2+B^2+C^2 \tag{23.5}$$

Αν

$$C+D=0 \tag{23.6}$$

τότε η (23.3) παριστάνει την ευθεία γραμμή

$$A\left(z+\overline{z}\right)+iB\left(\overline{z}-z\right)-2C=0,$$

που είναι η

$$Ax+By-C=0 \quad (z=x+iy) \tag{23.7}$$

Η Ομάδα των Μετασχηματισμών Moebius (§§ 24-25)

24. Έστω α,β,γ και δ είναι τέσσερις μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \tag{24.1}$$

Ας μελετήσουμε την εξίσωση

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \tag{24.2}$$

Πρώτον, αν $\gamma=0$ τότε και τα δυο α και δ πρέπει να είναι διάφορα του μηδενός, εξαιτίας της συνθήκης (24.1), έτσι ώστε οι δυο ισοδύναμες εξισώσεις

$$w=\frac{\alpha}{\delta}z+\frac{\beta}{\delta}, \quad z=\frac{\delta}{\alpha}w-\frac{\beta}{\alpha} \tag{24.3}$$

να έχουν νόημα. Τότε η σχέση (24.2) παριστάνει μια ένα προς ένα απεικόνιση ολόκληρου του Γκαουσιανού επιπέδου z σε ολόκληρο το Γκαουσιανό επίπεδο w.

Δεύτερον, αν $\gamma\neq 0$ τότε το δεξιό μέλος της (24.2) δεν μπορεί να παραστήσει έναν μιγαδικό αριθμό στην περίπτωση $\gamma z+\delta=0$,δηλαδή στην περίπτωση $z=-\gamma/\delta$. Αλλά σε κάθε σημείο του επιπέδου z εκτός από το $-\delta/\gamma$ αντιστοιχεί μια τιμή του επιπέδου w εκτός της a/γ, εφόσον

$$w-\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-\left(\alpha\delta-\beta\gamma\right)}{\gamma\left(\gamma z+\delta\right)}\neq 0 \tag{24.4}$$

Σημειώνουμε επιπλέον ότι η εξίσωση (24.2) είναι ισοδύναμη με την

$$z=\frac{-\delta w+\beta}{\gamma w-\alpha},$$

(24.5)

και συγκρίνοντάς της με το προηγούμενο σύνολο σχέσεων, βλέπουμε ότι η (24.2) είναι η απεικόνιση ένα – προς – ένα, του επιπέδου z «τρυπημένου» στο $z_0=-\delta/\gamma$ (το σύνολο όλων των σημείων z εκτός από το z_0) επί του επιπέδου w τρυπημένου στο $w_0=\alpha/\gamma$.

Η απεικόνιση σύμφωνα με την (24.2) – υπό τον όρο της συνθήκης (24.1) – του πλήρους (ή τρυπημένου) επιπέδου z επί του πλήρους (ή τρυπημένου) επιπέδου w ονομάζεται *μετασχηματισμός Moebius*[1], αφού η πρώτη μελέτη τέτοιων απεικονίσεων έγινε από τον A. F. Moebius (1790-1868).

[1] Επίσης ονομάζεται *γραμμικός κλασματικός* ή *γραμμικός* ή *διγραμμικός* μετασχηματισμός.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν αληθεύουν αν η συνθήκη (24.1) δεν ισχύει, δηλαδή

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \tag{24.6}$$

Για την περίπτωση αυτή, πρέπει να έχουμε ταυτόχρονα $\gamma = 0$ και $\alpha\delta = 0$, τα οποία καθιστούν χωρίς νόημα τουλάχιστον την μια από τις δυο εκφράσεις στα δεύτερα μέλη της (24.2) και (24.5), ή αλλιώς $\gamma \neq 0$, το οποίο σημαίνει, από την (24.4), ότι όλα τα σημεία του επιπέδου z εκτός του $z_0 = -\delta/\gamma$ απεικονίζονται επί του μοναδικού σημείου $w_0 = \alpha/\gamma$ του επιπέδου w.

25. Ας θεωρήσουμε τώρα έναν δεύτερο μετασχηματισμό Moebius,

$$W = \frac{\alpha_1 w + \beta_1}{\gamma_1 w + \delta_1} \quad (\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 \neq 0)\,, \tag{25.1}$$

και ας αντικαταστήσουμε εδώ για w το δεξιό μέλος της (24.2). Παίρνουμε

$$W = \frac{\alpha_1(\alpha z + \beta) + \beta_1(\gamma z + \delta)}{\gamma_1(\alpha z + \beta) + \delta_1(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\gamma^* z + \delta^*}\,. \tag{25.2}$$

έχοντας θέσει

$$\left.\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha_1\alpha + \beta_1\gamma, \quad \beta^* = \alpha_1\beta + \beta_1\delta, \\ \gamma^* &= \gamma_1\alpha + \delta_1\gamma, \quad \delta^* = \gamma_1\beta + \delta_1\delta. \end{aligned}\right\} \tag{25.3}$$

Εύκολα αποδεικνύουμε την ταυτότητα

$$\alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)\,, \tag{25.4}$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* \neq 0 \tag{25.5}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός (25.2), ο οποίος είναι το γινόμενο, ή η σύνθεση, των (24.2) και (25.1), είναι και ο ίδιος μετασχηματισμός Moebius. Αυτό σημαίνει ότι οι μετασχηματισμοί Moebius έχουν την *ιδιότητα της ομάδας* (πιο συγκεκριμένα, την *ιδιότητα σύνθεσης* μιας ομάδας). Επιπλέον, εφόσον ο μετασχηματισμός σύνθεσης της (25.2) ανάγεται στον $W = z$ αν επιλέξουμε

$$\alpha_1 = -\delta, \quad \beta_1 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma, \quad \delta_1 = -\alpha\,,$$

προκύπτει ότι κάθε μετασχηματισμός Moebius έχει έναν *αντίστροφο*. Συνεπώς το σύνολο των μετασχηματισμών Moebius συνιστούν μια *ομάδα*.

Υπάρχει, πράγματι, μια περιπλοκή που δημιουργείται από το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Moebius (24.2) ορίζεται μόνο σε επίπεδο z τρυπημένο στο σημείο $z_0 = -\delta/\gamma$ ενώ η (25.2) ορίζεται σε επίπεδο z τρυπημένο στο $z_0^* = -\delta^*/\gamma^*$. Αλλά θα επιλύσουμε αυτή τη δυσκολία αργότερα (§ 30) μέσω ενός απλού τεχνάσματος.

Απεικονίσεις Διατήρησης-Κύκλων (§§ 26-28)

26. Είναι δυνατόν να πάρουμε τους πιο γενικούς μετασχηματισμούς Moebius για τους οποίους $\gamma = 0$, με σύνθεση των δυο πιο ειδικών τύπων, δηλαδή

$$w = \alpha z, \quad w = z + \beta \tag{26.1}$$

Ώστε αν γράψουμε

$$w = \frac{\alpha}{\delta} w_1, \quad w_1 = z + \frac{\beta}{\alpha} \tag{26.2}$$

παίρνουμε

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\delta}. \tag{26.3}$$

Οι πιο γενικοί μετασχηματισμοί Moebius μπορούν τώρα να συντεθούν από τους μετασχηματισμούς (26.1) μαζί με τον μετασχηματισμό

$$w = 1/z, \tag{26.4}$$

ώστε αν $\gamma \neq 0$ χρειάζεται να γράψουμε μόνο

$$w = \frac{\alpha}{\gamma} + w_1, \quad w_1 = \frac{1}{w_2}, \quad w_2 = \frac{-\gamma(\gamma z + \delta)}{\alpha\delta - \beta\gamma}. \tag{26.5}$$

27. Στη συνέχεια σημειώνουμε ότι καθένας από τους δυο μετασχηματισμούς (26.1) μετασχηματίζει τις ευθείες γραμμές του μιγαδικού επιπέδου z σε ευθείες γραμμές του επιπέδου w, και ότι ο πρώτος από αυτούς τους μετασχηματισμούς απεικονίζει τον κύκλο

$$|z - a| = R \tag{27.1}$$

στον κύκλο

$$|w - \alpha a| = |\alpha| R, \tag{27.2}$$

ενώ ο δεύτερος απεικονίζει τον κύκλο (27.1) στον κύκλο

$$|w - (a + \beta)| = R \tag{27.3}$$

Τώρα ο μετασχηματισμός (26.4) έχει παρόμοιες ιδιότητες. Αν αντικαταστήσουμε τον αριθμό z στην εξίσωση (23.3) με τον $1/w$, και τον $\bar{z}$ με τον $1/\bar{w}$, τότε οι w και $\bar{w}$ ικανοποιούν την σχέση

$$A(w + \bar{w}) - iB(\bar{w} - w) - C(w\bar{w} - 1) + D(w\bar{w} + 1) = 0, \tag{27.4}$$

που είναι εντελώς ανάλογη με τη (23.3). Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει ότι η (26.4) απεικονίζει τις ευθείες γραμμές του επιπέδου z σε κύκλους που διέρχονται από το $w=0$ του επιπέδου w, και ότι απεικονίζει τους κύκλους που διέρχονται από το $z=0$ του επιπέδου z σε ευθείες γραμμές του επιπέδου w. Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι οι υπόλοιποι κύκλοι του επιπέδου z απεικονίζονται σε κύκλους του επιπέδου w.

Τώρα το αποτέλεσμα της § 26 χρησιμεύει στο να αποδειχθεί ότι ο πιο γενικός μετασχηματισμός (24.2) παρομοίως μετασχηματίζει κάθε ευθεία γραμμή και κάθε κύκλο του επιπέδου z είτε σε μια ευθεία γραμμή είτε σε έναν κύκλο του επιπέδου w.

28. Ένας επιπλέον στοιχειώδης μετασχηματισμός ο οποίος απεικονίζει τις ευθείες γραμμές και τους κύκλους του επιπέδου z σε ευθείες γραμμές και κύκλους του επιπέδου w, δίνεται από την

$$w=\bar{z} \tag{28.1}$$

Με συνδυασμό της παραπάνω με τον γενικό μετασχηματισμό Moebius (24.2),μπορεί κανείς να πάρει μια νέα κλάση μετασχηματισμών,

$$w=\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta} \quad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0), \tag{28.2}$$

οι οποίοι απεικονίζουν ευθείες γραμμές και κύκλους σε ευθείες γραμμές και κύκλους.

Η γεωμετρική ιδιότητα της απεικόνισης ευθειών και κύκλων του επιπέδου z σε ευθείες γραμμές και κύκλους του επιπέδου w πράγματι *χαρακτηρίζει* το σύνολο των μετασχηματισμών Moebius διευρύνεται από τους μετασχηματισμούς (28.2). Αυτό το διευρυμένο σύνολο ονομάζεται επίσης, για τον λόγο αυτό, το σύνολο των *μετασχηματισμών διατήρησης-κύκλων*. Αυτό το πολύ αξιοσημείωτο αποτέλεσμα μπορεί ακόμη να γενικευθεί προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα: Έστω το εσωτερικό ενός κύκλου κ_0 του επιπέδου z απεικονίζεται ένα-προς ένα σε ένα συγκεκριμένο σημειοσύνολο Α του επιπέδου w, με ένα τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σημείο του κύκλου κ που περιέχεται στο εσωτερικό του κύκλου κ_0 απεικονίζεται επί του κύκλου $\bar{\kappa}$ που περιέχεται στο Α. Τότε ο μετασχηματισμός μπορεί να παρασταθεί είτε από έναν μετασχηματισμό Moebius είτε από έναν μετασχηματισμό του τύπου (28.2), και πρέπει συνεπώς να είναι μια απεικόνιση διατήρησης-κύκλου.

Αυτό το καθαρά γεωμετρικό θεώρημα, στο οποίο ακόμη δεν χρειάζεται κανείς να υποθέσει τον δεδομένο μετασχηματισμό να είναι συνεχής, μπορεί να αποδειχθεί με εντελώς στοιχειώδεις έννοιες[1], αλλά δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την απόδειξη. Περισσότερο θα συγκεντρωθούμε σ′ αυτές τις ιδιότητες των απεικονίσεων διατήρησης-κύκλου οι οποίες έχουν σημασία στην Θεωρία των Συναρτήσεων.

---

[1] C. Caratheodory, *The most general transformation of plane regions transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc *43*, pp. 573-579 (1937).

Ισογωνιότητα (§ 29)

29. Οι μετασχηματισμοί (26.1) και ο μετασχηματισμός (28.1) επίσης, απεικονίζει δυο ευθείες γραμμές του επιπέδου z που τέμνονται σχηματίζοντας μια γωνία ϑ σε δυο ευθείες γραμμές του επιπέδου w οι οποίες τέμνονται σχηματίζοντας την ίδια γωνία. Ο μετασχηματισμός (26.4) μετασχηματίζει κάθε ευθεία γραμμή g του επιπέδου z η οποία δεν διέρχεται από το $z=0$, σε ένα κύκλο που διέρχεται από το $w=0$ του επιπέδου w έχοντας την εφαπτόμενή του στο $w=0$ παράλληλη στην g. Έτσι δυο ευθείες γραμμές του επιπέδου z που τέμνονται σχηματίζοντας μια γωνία ϑ απεικονίζονται σε κύκλους που τέμνονται σχηματίζοντας την ίδια γωνία.

Εφόσον οι πιο γενικοί μετασχηματισμοί διατήρησης-κύκλου μπορούν να κατασκευαστούν με συνδυάζοντας τους τύπους που μόλις συζητήθηκαν, συμπεραίνει κανείς αμέσως ότι αυτοί πρέπει να είναι *ισογώνιοι* (ή *διατήρησης-γωνιών*), που σημαίνει ότι η παρακάτω διατύπωση αληθεύει: Έστω δυο αυθαίρετες καμπύλες του επιπέδου z που τέμνονται σε ένα σημείο όπου και οι δύο έχουν εφαπτόμενες, σχηματίζοντας μια γωνία ϑ. Τότε κάθε μετασχηματισμός διατήρησης-κύκλου απεικονίζει αυτές τις καμπύλες σε δυο καμπύλες του επιπέδου w που τέμνονται σχηματίζοντας την ίδια γωνία ϑ.

Ωστόσο, υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ των μετασχηματισμών Moebius (24.2) από την μια πλευρά και των μετασχηματισμών (28.2), τους οποίους ονομάζουμε επίσης *απεικονίσεις διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους*, από την άλλη. Έτσι ώστε, ας θεωρήσουμε το σημείο τομής των δυο καμπυλών στο επίπεδο z και επίσης την πρώτη καμπύλη να παραμένει σταθερή, ενώ περιστρέφουμε την δεύτερη καμπύλη μαζί με την εφαπτόμενή της, γύρω από αυτό το σταθερό σημείο. Η αντίστοιχη εφαπτόμενη της δεύτερης καμπύλης στο επίπεδο w επίσης περιστρέφεται. Τώρα αν η απεικόνιση παριστάνεται από έναν μετασχηματισμό Moebius, τότε οι δυο περιστρεφόμενες εφαπτόμενες θα περιστρέφονται με την *ίδια φορά* (μαζί και οι δυο με την φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού ή και οι δυο αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Αλλά αν η απεικόνιση δίνεται από την (28.1) – και συνεπώς, επίσης, αν η απεικόνιση είναι *οποιαδήποτε* απεικόνιση διατήρησης-κύκλου (28.2) δεύτερου είδους – οι δυο εφαπτόμενες θα περιστρέφονται με *αντίθετες φορές*.

Ο Αριθμός Άπειρο (§ 30)

30. Επιστρέφουμε στην δευτερεύουσα ενόχληση που φθάνει κανείς κατά την μελέτη των μετασχηματισμών Moebius με $\gamma \neq 0$ (βλέπε § 25 παραπάνω), εξαιτίας του γεγονότος ότι το σημείο $z_0 = -\delta/\gamma$ δεν έχει σημείο-εικόνα ενώ το σημείο $w_0 = \alpha/\gamma$ δεν ανήκει στο σύνολο των σημείων-εικόνων. Η παρακάτω ανάπτυξη χρησιμεύει στο να απαλειφθεί αυτή η περιπλοκή.

Σε κάθε μιγαδικό επίπεδο, θα προσαρτήσουμε στους μιγαδικούς αριθμούς έναν «καταχρηστικό αριθμό» (ή «καταχρηστικό σημείο», επίσης «ιδεατός» αριθμός ή σημείο), ο οποίος θα ονομάζεται το *σημείο στο άπειρο* και συμβολίζεται με ∞. Στη συνέχεια συμφωνούμε ότι η εικόνα του σημείου $z_0 = -\delta/\gamma$ κάτω από τον μετασχηματισμό Moebius ταυτίζεται με το σημείο $w = \infty$, και ότι το σημείο $w_0 = \alpha/\gamma$ θα είναι η εικόνα του σημείου $z = \infty$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η παραπάνω επέκταση του μιγαδικού επιπέδου από έναν καταχρηστικό αριθμό αφήνει άθικτη την ιδιότητα της ομάδας των μετασχηματισμών Moebius όσον αφορά την πράξη της σύνθεσης. Η μόνη επιπλέον απαίτηση είναι ότι συμφωνούμε ότι το $z = \infty$ αντιστοιχίζεται στο $w = \infty$ κάτω από τους μετασχηματισμούς Moebius του τύπου

$$w = \alpha z + \beta \quad (\alpha \neq 0) \tag{30.1}$$

(που αποκαλούνται *ακέραιοι γραμμικοί* μετασχηματισμοί).

Οι παραπάνω συμφωνίες μπορούν επίσης να επαναδιατυπωθούν στην μορφή κανόνων πράξεων με τον αριθμό άπειρο, ως εξής:

Πρώτον, αν a είναι οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός διάφορος του ∞, συμφωνούμε ότι

$$a + \infty = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0. \tag{30.2}$$

Δεύτερον, αν b είναι οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός $\neq 0$ (αλλά το b μπορεί να είναι το ∞), συμφωνούμε ότι

$$b \cdot \infty = \infty, \quad \frac{b}{0} = \infty \quad (b \neq 0 \text{ μιγαδικός}) \tag{30.3}$$

Από την άλλη μεριά, στους συνδυασμούς

$$\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0} \tag{30.4}$$

δεν θα αποδώσουμε οποιοδήποτε νόημα (εντούτοις, οι §§ 160,161 εισάγουν υπολογισμούς με μερομορφικές συναρτήσεις).

Η πρώτη από τις δυο σχέσεις της (30.2) είναι απλά ένας άλλος τρόπος έκφρασης της παραπάνω συμφωνίας στο γεγονός ότι κάτω από τους μετασχηματισμούς Moebius $w = z + a$, τα σημεία $z = \infty$ και $w = \infty$ αντιστοιχίζονται το ένα στο άλλο. Οι υπόλοιπες σχέσης στις (30.2) και (30.3) μπορούν να ερμηνευθούν παρόμοια.

Οι κανόνες που παρουσιάζονται από τις (30.2) και (30.3) είναι πολύ βολικές, μεταξύ άλλων πραγμάτων, για τον προσδιορισμό των τιμών που προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις του z στο σημείο $z = \infty$. Τούτο μπορεί επίσης να επιτευχθεί σημειώνοντας πρώτα ότι ο μετασχηματισμός

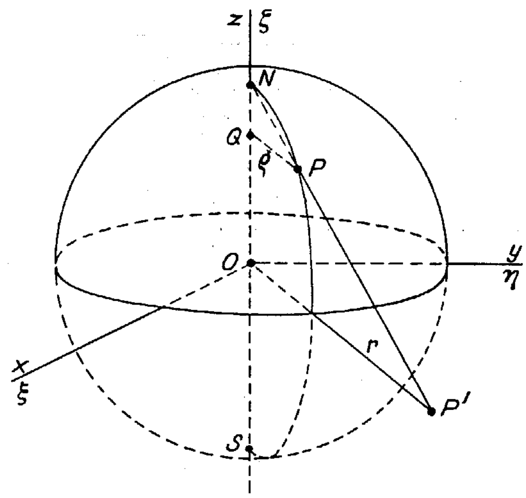
$$z = 1/t$$

εναλλάσσει τα σημεία 0 και ∞, τότε εκφράζοντας την δεδομένη συνάρτηση $f(z)$ ως μια ρητή συνάρτηση $g(t)$ του t, και τελικά υπολογίζοντας την τιμή αυτής της $g(t)$ στο σημείο $t = 0$.

Ένα μιγαδικό επίπεδο στο οποίο το σημείο του απείρου έχει προσαρτηθεί θα ονομάζεται στη συνέχεια, *πλήρες* ή *εκτεταμένο* μιγαδικό επίπεδο.

Η Σφαίρα του Riemann (§§ 31-33)

31. Συχνά είναι χρήσιμο να θεωρούμε το μιγαδικό επίπεδο ως μια στερεογραφική προβολή μιας σφαίρας, όπως πρώτα πραγματοποιήθηκε από τον B. Riemann (1826-1865). Συγκεκριμένα, οι απεικονίσεις διατήρησης-κύκλου του επιπέδου αντιστοιχούν σε πολύ απλούς μετασχηματισμούς της σφαίρας. Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε μια σφαίρα με ακτίνα την μονάδα (Σχ. 5) και της οποίας το κέντρο ταυτίζεται με την αρχή του μιγαδικού επιπέδου (το οποίο απεικονίζεται εδώ σαν ένα οριζόντιο επίπεδο). Τότε ο ισημερινός της σφαίρας ταυτίζεται με τον μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$. Κάθε σημείο P' του επιπέδου z μπορεί να συνδεθεί με τον βόρειο πόλο N της σφαίρας μέσω του ευθυγράμμου τμήματος NP' το οποίο τέμνει την σφαίρα στο σημείο P. Τότε αντιστοιχούμε στο σημείο P τον αριθμό $z=x+iy$ που αντιστοιχεί στο σημείο P' στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι ο αριθμός $z=0$ αντιστοιχίζεται στον νότιο πόλο S της σφαίρας. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι στον βόρειο πόλο N - το μόνο σημείο της «σφαίρας του Riemann» στο οποίο δεν υπάρχει κανένα αντίστοιχο σημείο του επιπέδου z στην παραπάνω διάταξη – μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον αριθμό ∞.



Σχ. 5

Αυτή η στερεογραφική προβολή, η οποία χρησιμοποιήθηκε στην αρχαιότητα από τον Πτολεμαίο (; - 161 μ.Χ.) για τις ουράνιες απεικονίσεις, έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να είναι ισογώνια. Έτσι ώστε, μια ευθεία γραμμή στο επίπεδο προβολής είναι η εικόνα ενός κύκλου που διέρχεται από το N στην σφαίρα, και η εφαπτόμενη στο N αυτού του κύκλου είναι παράλληλη στην δεδομένη ευθεία του επιπέδου. Συνεπώς δυο ευθείες στο επίπεδο που τέμνονται στο P' σχηματίζοντας μια γωνία ϑ πρέπει να είναι οι εικόνες δυο κύκλων που διέρχονται από το P και N στην σφαίρα, και βάσει αυτού που είπαμε μόλις πριν, αυτοί οι δυο κύκλοι πρέπει να τέμνονται στο N και επίσης στο P, σχηματίζοντας την ίδια γωνία ϑ.

32. Ας εισάγουμε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων ξ, η, ζ που έχουν ως αρχή το κέντρο της σφαίρας και τέτοιο ώστε οι άξονες ξ και η να ταυτίζονται αντίστοιχα με τον άξονα x και y του επιπέδου z, ενώ $\zeta = 1$ στον βόρειο πόλο N.

Η εξίσωση της σφαίρας τότε είναι η εξής:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \text{ ή } \xi^2 + \eta^2 = 1 - \zeta^2 . \tag{32.1}$$

Από το Σχ. 5, ωστόσο, έχουμε

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-\zeta}{1}, \tag{`32.2}$$

και έχουμε τις εξισώσεις

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{1-\zeta} \tag{32.3}$$

Από τις παραπάνω προκύπτει ότι

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}, \quad \overline{z} = \frac{\xi - i\eta}{1-\zeta}, \tag{32.4}$$

$$z\overline{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \tag{32.5}$$

$$z\overline{z} - 1 = \frac{2\zeta}{1-\zeta}, \quad z\overline{z} + 1 = \frac{2}{1-\zeta}. \tag{32.6}$$

Οι συντεταγμένες ξ, η, ζ του σημείου P τότε εκφράζονται συναρτήσει του z ως εξής:

$$\xi = \frac{2x}{z\overline{z}+1} = -\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}+1}, \quad \eta = \frac{i(\overline{z}-z)}{z\,\overline{z}+1}, \quad \zeta = \frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}. \tag{32.7}$$

33. Τώρα είναι εύκολο να αποδείξουμε τις διάφορες ιδιότητες της στερεογραφικής προβολής από τους παραπάνω τύπους.

Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι z και w είναι δυο σημεία του μιγαδικού επιπέδου τα οποία αντιστοιχούν σε δυο διαμετρικά αντίθετα σημεία της σφαίρας του Riemann. Από την (32.4) παίρνουμε στην περίπτωση αυτή ότι

$$\overline{z} = \frac{\xi - i\eta}{1-\zeta}, \quad w = -\frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}, \quad w\overline{z} = -\frac{\xi^2 + \eta^2}{1-\zeta^2} = -1, \tag{33.1}$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$w = -\frac{1}{z}, \quad w\overline{z} + 1 = 0. \tag{33.2}$$

Ως εκ τούτου η απεικόνιση της σφαίρας η οποία στέλνει κάθε σημείο P στο αντιδιαμετρικά αντίθετο σημείο P^* αντιστοιχεί στο επίπεδο z σε μια απεικόνιση διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους (§§ 28, 29 ανωτέρω).

Ως ένα δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση (23.3) ανωτέρω, η οποία παριστάνει έναν αυθαίρετο κύκλο (ή ευθεία γραμμή) στο μιγαδικό επίπεδο. Από την (32.7) και (32.6), αυτή η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0.$$

Τούτο αποδεικνύει το γνωστό θεώρημα που δείχνει ότι η στερεογραφική προβολή απεικονίζει τους κύκλους στην σφαίρα σε κύκλους (ή ευθείες γραμμές) του επιπέδου προβολής. Η δεύτερη από τις σχέσεις (23.5) ανωτέρω τώρα δείχνει ότι η απόσταση του επιπέδου (33.3) από το κέντρο της σφαίρας Riemann είναι μικρότερο της μονάδας, αλλιώς ότι αυτό το επίπεδο κόβει την σφαίρα σε έναν κύκλο.

Οι πιο γενικοί μετασχηματισμοί διατήρησης-κύκλου του επιπέδου z επίσης αντιστοιχούν σε απλές απεικονίσεις στην σφαίρα, συγκεκριμένα σε διατάξεις (collinations) του ξ, η, ζ -χώρου που αφήνουν την σφαίρα αναλλοίωτη.

Διπλοί Λόγοι (§§ 34-37)

34. Έστω ότι οι τέσσερις πεπερασμένοι αριθμοί w_1, w_2, w_3, w_4 είναι οι εικόνες κάτω από τον μετασχηματισμό Moebius (24.2) των τεσσάρων αριθμών z_1, z_2, z_3, z_4. Οι εξισώσεις

$$w_i - w_k = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z_i + \delta)(\gamma z_k + \delta)}(z_i - z_k) \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{34.1}$$

μαζί με την συντόμευση

$$A = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)(\gamma z_4 + \delta)} \tag{34.2}$$

δίνουν

$$(w_1 - w_2)(w_3 - w_4) = A(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)$$

Εφόσον το A είναι συμμετρικό ως προς τα $z_1, \cdots, z_4$, έχουμε επίσης

$$(w_1 - w_3)(w_2 - w_4) = A(z_1 - z_3)(z_2 - z_4).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες εξισώσεις, παίρνουμε

$$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} \tag{34.3}$$

Το δεξιό μέλος της (34.3) ονομάζεται *διπλός λόγος* των τεσσάρων αριθμών z_1, z_2, z_3, z_4 και συμβολίζεται με (z_1, z_2, z_3, z_4).

Η σχέση (34.3) δεν περιέχει τους συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ του μετασχηματισμού Moebius. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την (34.3) στην μορφή

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4) \tag{34.4}$$

και εκφράζουμε το περιεχόμενο αυτής λέγοντας ότι *ο διπλός λόγος οποιωνδήποτε τεσσάρων δεδομένων σημείων παραμένει αναλλοίωτος κάτω από κάθε μετασχηματισμό Moebius.*

Για να αποδοθεί σ' αυτή τη διατύπωση αλήθεια πλήρους γενικότητας, πρέπει να οριστεί ο διπλός λόγος επίσης και για την περίπτωση όπου ένα από τα σημεία είναι το ∞. Τούτο γίνεται ως εξής: Αν $z_1 \neq 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\left(1 - \dfrac{z_2}{z_1}\right)(z_3 - z_4)}{\left(1 - \dfrac{z_3}{z_1}\right)(z_2 - z_4)},$$

η οποία οδηγεί στην

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} \tag{34.5}$$

Παρόμοιες εκφράσεις προκύπτουν όταν ένα από τα z_2, z_3 και z_4 ταυτίζονται με το ∞.

35. Ο διπλός λόγος

$$\lambda = (z_1, z_2, z_3, z) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z)} \tag{35.1}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\lambda = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{35.2}$$

όπου

$$\alpha = z_2 - z_1, \quad \beta = z_3(z_1 - z_2), \quad \gamma = z_3 - z_1, \quad \delta = z_2(z_1 - z_3), \tag{35.3}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1). \tag{35.4}$$

Συνεπώς αν τα τρία σημεία z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε η (35.2) παριστάνει έναν μετασχηματισμό Moebius, και το τέταρτο σημείο z μπορεί σε κάθε περίπτωση να επιλεχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε ο διπλός λόγος λ να παίρνει μια οποιαδήποτε αυθαιρέτως προκαθορισμένη τιμή (συμπεριλαμβανομένου και του ∞).

Έχουμε ταυτόχρονα πάρει το ακόλουθο αποτέλεσμα: Για να έχει ο διπλός λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) των τεσσάρων σημείων μια καλώς καθορισμένη τιμή, ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι τουλάχιστον τα τρία από τα τέσσερα σημεία να είναι διαφορετικά.

Αν αντικαταστήσουμε τα z_1, z_2 και z_3, το ένα μετά το άλλο με z στην (35.1), παίρνουμε $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \infty, \lambda_3 = 0$. Εφόσον ο διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος, προκύπτει ότι

$$(1, \infty, 0, \lambda) = \lambda \tag{35.5}$$

η οποία μπορεί επίσης να αποδειχθεί απευθείας.

Τα τρία σημεία $1, \infty, 0$ βρίσκονται στον πραγματικό άξονα, έτσι και το τέταρτο σημείο λ ορίζεται ότι είναι πραγματικός. Από τα προηγούμενα μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε το παρακάτω θεώρημα:

Τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 βρίσκονται στον ίδιο κύκλο αν και μόνο αν ο διπλός λόγος τους (z_1, z_2, z_3, z_4) είναι ένας πραγματικός αριθμός ή ∞.

Αυτό το θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να φτάσουμε μια φορά ακόμη στην αναπαράσταση (15.3) των μοναδιαίων αριθμών. Πράγματι η (15.3) είναι ισοδύναμη με

$$(i,-1,1,u)=t\,, \tag{35.6}$$

η οποία εκφράζει το γεγονός ότι το σημείο u βρίσκεται στον κύκλο που προσδιορίζεται από τα τρία σημεία $1, i, -1$.

36. Αν z_1, z_2, z_3 και w_1, w_2, w_3 είναι δυο τριάδες διαφορετικών σημείων, τότε η εξίσωση

$$(w_1, w_2, w_3, w)=(z_1, z_2, z_3, z) \tag{36.1}$$

όταν επιλύεται ως προς w, παριστάνει έναν μετασχηματισμό Moebius που απεικονίζει καθένα από τα σημεία z_i στα αντίστοιχα σημεία w_i. Συνεπώς ένας μετασχηματισμός Moebius προσδιορίζεται μοναδικά κάθε φορά που καθορίζονται οι εικόνες τριών δεδομένων σημείων.

Αν οι τα τρία σημεία w_i καθορίζεται να βρίσκονται όλα στον κύκλο που ορίζουν τα τρία σημεία z_i, τότε αυτός ο κύκλος απεικονίζεται στον εαυτό του. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις (14.2) παριστάνουν έναν μετασχηματισμό κάτω από τον οποίο ο μοναδιαίος κύκλος απεικονίζεται στον εαυτό του.

37. Αν επιπροσθέτως υπολογίσουμε στον διπλό λόγο (35.1), τους διπλούς λόγους των ίδιων αριθμών z_i που παίρνονται με διαφορετική σειρά – ή (που είναι ισοδύναμο) αν σχηματίσουμε όλους τους δυνατούς διπλούς λόγους των αριθμών $0, 1, \infty, \lambda$ - τότε παίρνουμε τους έξι αριθμούς

$$\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad 1-\lambda,\quad \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1},\quad \frac{1-\lambda}{\lambda} \tag{37.1}$$

(καθένας προκύπτει τέσσερις φορές), και όχι άλλους.

Γενικά, αυτοί οι έξι αριθμοί είναι διαφορετικοί. Αλλά μπορούμε να εξισώσουμε, οποιουσδήποτε δύο από τους έξι αριθμούς στην (37.1) και να λύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς λ, βρίσκοντας έτσι ειδικές τιμές του λ οι οποίες αντιστοιχούν σε πολύ συγκεκριμένες διατάξεις των σημείων z_1, z_2, z_3, z_4. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε στα παρακάτω αποτελέσματα:

Πρώτον, αν $\lambda=0$ ή 1 ή ∞, τότε η (37.1) περιέχει μόνο τρεις διαφορετικούς αριθμούς $-1, -1/2$ και 2, καθένας από τους οποίους να εμφανίζεται δυο φορές στην (37.1). Στην περίπτωση αυτή, το σημείο z_4 πρέπει να ταυτίζεται με ένα από τα σημεία z_1, z_2, z_3.

Δεύτερον, αν $\lambda=-1$ ή $1/2$ ή 2, τότε η (37.1) περιέχει μόνο τρεις διαφορετικούς αριθμούς – $1, 1/2$ και 2, καθέναν εμφανιζόμενο δυο φορές. Τα τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4, πρέπει σ' αυτή την περίπτωση να βρίσκονται σε έναν κύκλο (ή σε μια ευθεία γραμμή) και σχηματίζουν ένα *αρμονικό σύνολο*. Αν δίνονται ένα ζεύγος και ένα σημείο από το άλλο ζεύγος από κάθε τέτοιο σύνολο, είναι δυνατόν να κατασκευαστεί το τέταρτο σημείο με στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές.

Τελικά, αν

$$\lambda=\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \lambda=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \tag{37.2}$$

τότε η (37.1) περιέχει μόνο τους αριθμούς (37.2), καθένας από τους οποίους προκύπτει τρεις φορές. Τα τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 στην περίπτωση αυτή λέμε ότι βρίσκονται σε *ισο–αναρμονική* θέση. Εδώ είναι επίσης δυνατό να βρεθεί το τέταρτο σημείο z_4 με στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές αν τα σημεία z_1, z_2, z_3 και ένας από τους δυο αριθμούς της (37.2) είναι καθορισμένα. Για παράδειγμα, αν τα σημεία z_1, z_2, z_3 είναι οι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το z_4 πρέπει να είναι είτε το κέντρο του τριγώνου είτε το σημείο του απείρου, ανάλογα με την εκλογή του λ.

Αυτές οι συμμετρίες μπορούν επίσης να αποκαλυφθούν στους τύπους. Αν, για παράδειγμα, τα δυο ζεύγη των σημείων z_1, z_4 και z_2, z_3 σχηματίζουν ένα αρμονικό σύνολο, τότε πρέπει να έχουμε

$$\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = -1, \tag{37.3}$$

τα οποία μπορούν επίσης να γραφεί στην μορφή

$$2(z_1z_4 + z_2z_3) = (z_1 + z_4)(z_2 + z_3). \tag{37.4}$$

Στην ειδική περίπτωση $z_2 = 0, z_3 = \infty$, βρίσκουμε παρομοίως ότι

$$z_1 + z_4 = 0. \tag{37.5}$$

Τελικά, αν τα τρία σημεία z_1, z_2, z_3 είναι δεδομένα, τότε υπάρχουν δυο σημεία z_4 τα οποία συμπληρώνουν μια ισο-αναρμονική τετράδα. Αυτοί μπορούν να υπολογιστούν από την

$$z_4 = \frac{z_1^2(z_2+z_3) + z_2^2(z_3+z_1) + z_3^2(z_1+z_2) - 6z_1z_2z_3 \pm i\sqrt{3}(z_3-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_1)}{2(z_1^2+z_2^2-z_2z_3-z_3z_1-z_1z_2)} \tag{37.6}$$

και κάθε εναλλαγή δυο εκ των σημείων z_1, z_2, z_3 οδηγεί σε επίσης σε μια εναλλαγή των δυο σημείων (37.6).

Ανάκλαση σε ένα Κύκλο (§§ 38-40)

38. Αν σχεδιάσουμε το σημείο z και το σημείο εικόνα του w κάτω από έναν δεδομένο μετασχηματισμό Moebius στο ίδιο μιγαδικό επίπεδο, θα γίνει ξεκάθαρο για το τι εννοούμε με ένα *σταθερό σημείο* του μετασχηματισμού. Θα δούμε στην § 52 κατωτέρω ότι κάθε μετασχηματισμός Moebius εκτός από τον ταυτοτικό μετασχηματισμό $w = z$ έχει ακριβώς δυο σταθερά σημεία, τα οποία μπορεί να ταυτίζονται ή και να μην ταυτίζονται.

Για την γενική απεικόνιση διατήρησης-κύκλου του δεύτερου είδους,

$$w = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{38.1}$$

παίρνουμε μια εξίσωση για την θέση των σταθερών σημείων απαλείφοντας το $\bar{z}$ από τις δυο ισοδύναμες εξισώσεις

$$z=\frac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}, \quad \overline{z}=\frac{\overline{\alpha}z+\overline{\beta}}{\overline{\gamma}z+\overline{\delta}} \tag{38.2}$$

Γενικά αυτό δίνει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς z, έτσι ώστε σε πρώτη θεώρηση να φαίνεται ότι και εδώ επίσης, θα μπορούσαν να υπάρχουν το πολύ δυο σταθερά σημεία. Ωστόσο, για συγκεκριμένες τιμές των α, β, γ και δ μπορεί να συμβεί όλοι οι συντελεστές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που μόλις αναφέρθηκε να μηδενίζονται, και στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός (38.1) μπορεί να έχει τρία ή περισσότερα σταθερά σημεία, ή πιθανώς κανένα.

Είναι πράγματι πολύ εύκολο να βρούμε απεικονίσεις διατήρησης- κύκλου δεύτερου είδους οι οποίες να έχουν τουλάχιστον τρία σταθερά σημεία. Σύμφωνα με την § 34 ανωτέρω, η εξίσωση

$$\left(w_1, w_2, w_3, w_4\right)=\left(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4\right) \tag{38.3}$$

παριστάνει έναν μετασχηματισμό διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους ο οποίος απεικονίζει τα τρία σημεία z_1, z_2, z_3 σε τρία σημεία w_1, w_2, w_3. Συνεπώς η εξίσωση

$$\left(z_1, z_2, z_3, w\right)=\left(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}\right) \tag{38.4}$$

παριστάνει έναν μετασχηματισμό διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους ο οποίος έχει τα z_1, z_2 και z_3 ως σταθερά σημεία. Επιπλέον αν το z_4 είναι οποιοδήποτε τέταρτο σημείο πάνω στον κύκλο (ή ευθεία γραμμή) που προσδιορίζεται από τα σημεία z_1, z_2, z_3, τότε ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων είναι πραγματικός, έτσι ώστε να έχουμε την εξίσωση

$$\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)=\left(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4\right),$$

Από την άλλη μεριά, η εικόνα w_4 του σημείου z_4, ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(z_1, z_2, z_3, w_4\right)=\left(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4\right)$$

και η σχέση $w_4=z_4$ που προκύπτει από τις τελευταίες δυο εξισώσεις δείχνει ότι μαζί με τα σημεία z_1, z_2, z_3, κάθε άλλο σημείο στον κύκλο (ή ευθεία) κ προσδιορίζεται από αυτά τα τρία σημεία σαν να είναι ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού (38.1). Είναι εύκολο να δει κανείς αντιστρόφως, ότι ένα σημείο που δεν κείται επί του κ δεν μπορεί να είναι ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού (38.1), και ότι αυτός ο μετασχηματισμός συνεπώς προσδιορίζεται μοναδικά αν ο κύκλος του (ή ευθεία) κ των σταθερών σημείων είναι καθορισμένος.

Συγκεκριμένα, αν κ είναι ο πραγματικός άξονας τότε η εξίσωση (38.1) γίνεται

$$w=\overline{z} \tag{38.5}$$

ο οποίος παριστάνει μια *ανάκλαση* στον πραγματικό άξονα. Θα δούμε σύντομα ότι στην γενική περίπτωση, μπορούμε να μιλάμε για μια *ανάκλαση* ή *αντιστροφή στον κύκλο* κ.

39. Ένας αυθαίρετος κύκλος (ή ευθεία γραμμή) παριστάνεται από μια εξίσωση της μορφής (23.3). Αν αντικαταστήσουμε το z με w στην εξίσωση αυτή, παίρνουμε

$$A(w+\overline{z})+iB(\overline{z}-w)+C(w\overline{z}-1)+D(w\overline{z}+1)=0, \tag{39.1}$$

που είναι η εξίσωση ενός μετασχηματισμού διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους έχοντας τον κύκλο (23.3) ως τον κύκλο του των σταθερών σημείων. Ως εκ τούτου η (39.1) παριστάνει μια ανάκλαση σε έναν αυθαιρέτως καθορισμένο κύκλο.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ταυτίζεται η απεικόνιση διατήρησης-κύκλου (38.1) με την ανάκλαση (39.1) είναι να υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \neq 0$ που να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\alpha = -\lambda(A+iB), \quad \beta = \lambda(C-D), \quad \gamma = \lambda(C+D), \quad \delta = \lambda(A-iB)\,. \tag{39.2}$$

Αυτές μετά από πράξεις συνεπάγονται ότι

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\delta}{\bar{\alpha}} = -\frac{\beta}{\bar{\beta}} = -\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} = -\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\,. \tag{39.3}$$

Ούτως ώστε η (23.3) πράγματι να παριστάνει έναν κύκλο ή μια ευθεία γραμμή, υπενθυμίζουμε ότι η δεύτερη σχέση (23.5) πρέπει να ικανοποιείται. Αλλά η (39.2) και η (23.5) μαζί συνεπάγονται ότι

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma} = \lambda\bar{\lambda}(A^2 + B^2 + C^2 - D^2) > 0\,,$$

έτσι ώστε να έχουμε

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma} > 0 \tag{39.4}$$

μια συνθήκη η οποία πρέπει να προστεθεί στις συνθήκες (39.3) ανωτέρω.

40. Εφόσον η εξίσωση (38.4) μπορεί επίσης να γραφεί στην μορφή

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{w})\,,$$

προκύπτει ότι οι ανακλάσεις (38.4) είναι ενειλιγμένοι μετασχηματισμοί, που σημαίνει ότι είναι μετασχηματισμοί οι οποίοι είναι ταυτοτικοί με τους αντίστροφους τους μετασχηματισμούς. Για να προκύψει ο πιο γενικός ενειλιγμένος μετασχηματισμός διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους, πρέπει απαιτήσουμε ότι μαζί με την εξίσωση (38.1), οι εξισώσεις

$$z = \frac{\alpha\bar{w} + \beta}{\gamma\bar{w} + \delta}, \qquad \bar{z} = \frac{\bar{\alpha}w + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}w + \bar{\delta}}$$

να αληθεύουν. Ως εκ τούτου ο μετασχηματισμός (38.1) και ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{-\bar{\delta}\bar{z} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{z} - \bar{\alpha}}$$

πρέπει να είναι ίδιοι, γεγονός που συνεπάγεται ότι

$$\frac{\alpha}{\bar{\delta}} = \frac{\delta}{\bar{\alpha}} = -\frac{\beta}{\bar{\beta}} = -\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \tag{40.1}$$

((39.3) ανωτέρω). Η συνθήκη $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ στην (38.1) συνεπάγεται ότι όχι μόνον όλοι οι αριθμοί στην (40.1) μπορούν να μηδενίζονται ταυτόχρονα αλλά και από την ίδια σχέση προκύπτει ότι

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma} \neq 0 \tag{40.2}$$

Είχαμε βρει νωρίτερα, στην (33.2) ανωτέρω, έναν ενειλιγμένο μετασχηματισμό διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους χωρίς να έχουμε καθόλου σταθερό σημείο. Τώρα αν οι σχέσεις (40.1) ικανοποιούνται και αν ο δεδομένος μετασχηματισμός έχει ένα σταθερό σημείο z_0, τότε ισχύει η εξίσωση

$$\gamma z_0 \overline{z}_0 + \delta z_0 - \alpha \overline{z}_0 = \beta \tag{40.3}$$

Από την άλλη μεριά, η (40.1) συνεπάγεται ότι

$$\overline{\gamma}\delta = -\overline{\alpha}\gamma \, , \tag{40.4}$$

η οποία μαζί με την (40.3) συνεπάγεται ότι

$$\alpha\overline{\alpha} + \beta\gamma = (\gamma \overline{z}_0 - \alpha)(\overline{\gamma}\,\overline{z}_0 - \overline{\alpha}) \geq 0 \, . \tag{40.5}$$

Τελικά, αν το $z = \infty$ καθορίζεται να είναι ένα σταθερό σημείο του δεδομένου μετασχηματισμού, τότε πρέπει να έχουμε $\gamma = 0$ και ως εκ τούτου πάλι $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\gamma} > 0$.

Επομένως παίρνοντας υπόψιν την (40.2), φθάνουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

Μια απεικόνιση διατήρησης-κύκλου είναι μια ανάκλαση σε έναν κύκλο αν και μόνο αν είναι ενειλιγμένη και έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι η ανάκλαση σε οποιοδήποτε δεδομένο κύκλο

$$|z - a| = R$$

μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$w - a = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}$$

και συνεπώς παριστάνει την καλώς ορισμένη απεικόνιση *αντίστροφων ακτίνων* ή *αντιστροφή*, στον δεδομένο κύκλο. Τούτο δικαιολογεί την ορολογία που εισήχθη στο τέλος της § 38.

Προσδιορισμός της Θέσης και του Μεγέθους ενός Κύκλου (§§ 41-44)

41. Κάθε δεδομένος κύκλος κ στο μιγαδικό επίπεδο μπορεί να παρασταθεί ως η εικόνα του πραγματικού άξονα t κάτω από έναν κατάλληλο μετασχηματισμό Moebius

$$z = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad t = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha} \tag{41.1}$$

Ο ίδιος μετασχηματισμός Moebius απεικονίζει δυο μιγαδικούς συζυγείς $t, \overline{t}$ του μιγαδικού επιπέδου t επί δυο σημείων z, w τα οποία είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο κ. Έτσι ώστε αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (41.1) με την εξίσωση

$$w = \frac{\alpha \overline{t} + \beta}{\gamma \overline{t} + \delta}, \tag{41.2}$$

παίρνουμε μια απεικόνιση διατήρησης-κύκλου δεύτερου είδους

$$w = \frac{(\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma})\overline{z} - (\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha})}{(\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma})\overline{z} + (\overline{\alpha}\delta - \overline{\beta}\gamma)}, \tag{41.3}$$

της οποίας τα σταθερά σημεία ταυτίζονται με τα σημεία του κ, εφόσον αυτά αντιστοιχούν σε πραγματικές τιμές του t. Χρησιμοποιώντας την (41.3), μπορούμε επίσης να πάρουμε την εξίσωση του κύκλου κ στην μορφή

$$(\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma})z\overline{z} + (\overline{\alpha}\delta - \overline{\beta}\gamma)z - (\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma})\overline{z} + (\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha}) = 0\,. \tag{41.4}$$

Για να πάρουμε για τον ίδιο κύκλο μια εξίσωση της μορφής (23.3), πρέπει να υπολογίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς A, B, C, D από τις εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} &i(A - iB) = \overline{\alpha}\delta - \overline{\beta}\gamma, \quad i(A + iB) = -(\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma}),\\ &i(C + D) = \gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma}, \quad i(D - C) = \alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{41.5}$$

Αυτές οι εξισώσεις συνεπάγονται ότι

$$\left.\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 - D^2 &= (\overline{\alpha}\delta - \overline{\beta}\gamma)(\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma}) + (\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma})(\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha})\\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\overline{\alpha}\overline{\delta} - \overline{\beta}\overline{\gamma}). \end{aligned}\right\} \tag{41.6}$$

Τώρα παίρνουμε το κέντρο a και την ακτίνα R του κύκλου από την (23.4), χρησιμοποιώντας τις (41.5) και (41.6):

$$a = \frac{\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma}}{\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma}}, \quad R = \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|}{|\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma}|}. \tag{41.7}$$

42. Από την (41.6) επίσης παίρνουμε την ταυτότητα

$$|\alpha\delta - \beta\gamma|^2 - |\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma}|^2 = (\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma})(\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha})\,. \tag{42.1}$$

Αν θέσουμε

$$M = R + |a|, \quad m = \big|R - |a|\big|, \tag{42.2}$$

τότε από την τριγωνική ανισότητα (§ 20 ανωτέρω), οι αριθμοί M και m παριστάνουν αντίστοιχα την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των σημείων του κύκλου μας από την αρχή. Οι σχέσεις (41.7), (42.1) και (42.2) τώρα δίνουν

$$M = \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma| + |\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma}|}{|\gamma\overline{\delta} - \delta\overline{\gamma}|}, \quad m = \frac{|\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\gamma}|}{|\alpha\delta - \beta\gamma| + |\alpha\overline{\delta} - \beta\overline{\gamma}|}. \tag{42.3}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να δώσουμε μια εκτίμηση της απόλυτης τιμής στο δεξιό μέλος της (41.1) για πραγματικές τιμές του t. Οι σχέσεις

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{|\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}|}{|\alpha\delta-\beta\gamma|+|\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}|}\leq\left|\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right|\leq\dfrac{|\alpha\delta-\beta\gamma|+|\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}|}{|\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma}|}\\ t\ \text{πραγματικός},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0\end{array}\right\}\tag{42.4}$$

που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό δεν θα είναι εύκολο να αποδειχθούν χωρίς τα ανωτέρω γεωμετρικά επιχειρήματα. Σημειώνουμε ότι η πρώτη από τις ανισότητες στην (42.4) παραμένει αληθής ακόμη και αν ο κύκλος κ εκφυλίζεται σε μια ευθεία γραμμή, δηλ. αν $\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma}=0$.

43. Ο μετασχηματισμός Moebius (41.1) απεικονίζει τον μοναδιαίο κύκλο

$$|t|=1,\quad t=e^{i\vartheta}\qquad (\vartheta\ \text{ πραγματικός})\tag{43.1}$$

επί του κύκλου κ^* του οποίου η εξίσωση προκύπτει απαλείφοντας το t από τις

$$z=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\qquad \bar{z}=\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}t}{\bar{\gamma}+\bar{\delta}t}\tag{43.2}$$

Έτσι προκύπτει

$$(\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta})z\bar{z}-(\bar{\alpha}\gamma-\bar{\beta}\delta)z-(\alpha\bar{\gamma}-\beta\bar{\delta})\bar{z}+(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta})=0\tag{43.3}$$

απ΄ όπου παίρνουμε, με την μέθοδο των δυο τελευταίων παραγράφων

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{|\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}|}{|\alpha\delta-\beta\gamma|+|\alpha\bar{\gamma}-\beta\bar{\delta}|}\leq\left|\dfrac{\alpha e^{i\vartheta}+\beta}{\gamma e^{i\vartheta}+\delta}\right|\leq\dfrac{|\alpha\delta-\beta\gamma|+|\alpha\bar{\gamma}-\beta\bar{\delta}|}{|\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta}|}\\ \vartheta\ \text{ πραγματικός},\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0\end{array}\right\}\tag{43.4}$$

44. Οι διάφοροι τύποι που εφαρμόστηκαν παραπάνω κάνουν εύκολο τον υπολογισμό του κέντρου και της ακτίνας ενός κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα τρία δεδομένα σημεία z_1, z_2, z_3.Ούτως ώστε από την § 35 παίρνουμε την εξίσωση αυτού του κύκλου εξισώνοντας τον διπλό λόγο (z_1, z_2, z_3, z_4) με έναν πραγματικό αριθμό t, ώστε:

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z)}{(z_1-z_3)(z_2-z)}=t\,.\tag{44.1}$$

Για να είμαστε σε θέση να κάνουμε χρήση των εξισώσεων (41.1), πρέπει να γράψουμε

$$\alpha=(z_1-z_3)z_2,\quad \beta=(z_2-z_1)z_3,\quad \gamma=z_1-z_3,\quad \delta=z_2-z_1\,.\tag{44.2}$$

Από τα παραπάνω υπολογίζουμε

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\delta-\beta\gamma=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1),\\
&\alpha\overline{\delta}-\beta\overline{\gamma}=z_1\overline{z}_1(z_3-z_2)+z_2\overline{z}_2(z_1-z_3)+z_3\overline{z}_3(z_2-z_1),\\
&\gamma\overline{\delta}-\delta\overline{\gamma}=(z_2\overline{z}_3-z_3\overline{z}_2)+(z_3\overline{z}_1-z_1\overline{z}_3)+(z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1),\\
&\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}=z_1\overline{z}_1(z_3\overline{z}_2-z_2\overline{z}_3)+z_2\overline{z}_2(z_1\overline{z}_3-z_3\overline{z}_1)+z_3\overline{z}_3(z_2\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2),
\end{aligned}\right\} \tag{44.3}$$

οπότε μπορούμε ταυτόχρονα να γράψουμε τους τελικούς τύπους για τα a και R, οι οποίοι αποδεικνύονται συμμετρικοί ως προς z_1, z_2, z_3, z_4, όπως ακριβώς όφειλαν να είναι.

Δέσμες από Κύκλους (§§ 45-50)

45. Τα αποτελέσματά μας που αναφέρονται σε μετασχηματισμούς διατήρησης-κύκλων συνεπάγονται ότι τέτοιοι μετασχηματισμοί απεικονίζουν οποιουσδήποτε κύκλους που τέμνονται σε ορθές γωνίες επί ενός παρόμοιου ζεύγους κύκλων. Επίσης σημειώνουμε, για να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια, ότι αν ένας κύκλος έχει ένα ζεύγος $z, \overline{z}$ μιγαδικών συζυγών ως δυο από τα σημεία του, τότε πρέπει να είναι ορθογώνιος ως προς τον πραγματικό άξονα, και αντιστρόφως, ότι κάθε κύκλος που είναι ορθογώνιος ως προς τον πραγματικό άξονα πρέπει να περιέχει τον $\overline{z}$ αν περιέχει τον z.

Τώρα έστω κ_1 ένας αυθαίρετος κύκλος (ή ευθεία γραμμή), έστω z_0 οποιοδήποτε σημείο που δεν βρίσκεται επί του κ_1, και έστω z_1 ένα σημείο που προκύπτει από το z_0 με αντιστροφή στον κ_1. Τότε κάθε κύκλος που περιέχει και τα δυο z_0 και z_1 πρέπει να τέμνει τον κύκλο κ_1 σε ορθές γωνίες, και κάθε κύκλος που διέρχεται από το z_0 και είναι ορθογώνιος ως προς τον κ_1 πρέπει να περιέχει το σημείο z_1.

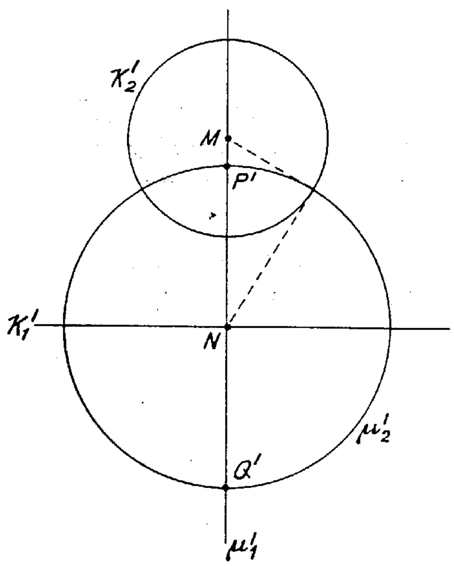
Επίσης ας θεωρήσουμε έναν δεύτερο κύκλο κ_2 και το σημείο z_2 που προκύπτει από το z_0 με αντιστροφή στον κ_2. Τότε ο κύκλος που προσδιορίζεται από τα τρία σημεία z_0, z_1 και z_2 πρέπει να είναι ορθογώνιος σε καθένα από τον κύκλους κ_1 και κ_2.

Ορίζουμε ως *δέσμη κύκλων* να είναι το σύνολο όλων κύκλων που είναι ορθογώνιοι με δυο δεδομένους κύκλους κ_1 και κ_2. Η συζήτηση παραπάνω δείχνει ότι κάθε σημείο z_0 που δεν κείται ούτε στον κ_1 ούτε στον κ_2 κ_2 πρέπει να βρίσκεται σε τουλάχιστον έναν κύκλο της δέσμης. Βλέπουμε επίσης ότι κάθε μετασχηματισμός Moebius απεικονίζει μια δέσμη κύκλων σε μια άλλη δέσμη κύκλων. Θα κάνουμε χρήση αυτού του αναλλοίωτου του συνόλου των δεσμών κύκλων κάτω από τους μετασχηματισμούς Moebius για μια ταξινόμηση τέτοιων δεσμών.

46. Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση των δυο κύκλων κ_1 και κ_2 οι οποίοι τέμνονται σε δυο σημεία P και Q. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να βρούμε έναν μετασχηματισμό Moebius ο οποίος απεικονίζει τα σημεία P και Q στα $z=0$ και $z=\infty$ αντίστοιχα, και συνεπώς ότι απεικονίζει τους κ_1 και κ_2 σε δύο ευθείες γραμμές που διέρχονται από το $z=0$. Η δέσμη των κύκλων που προσδιορίζεται από τους κ_1 και κ_2 πρέπει εδώ να απεικονίζεται επί του συνόλου των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο στο $z=0$. Τα μοναδικά σημεία του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου τα οποία δεν περιέχονται σε κανένα από τους κύκλους της μετασχηματισμένης δέσμης είναι τα δυο σημεία $z=0$ και $z=\infty$. Αυτά θα ονομάζονται *οριακά σημεία* της δέσμης. Κάθε άλλο σημείο του επιπέδου περιέχεται ακριβώς σε έναν κύκλο της μετασχηματισμένης δέσμης.

Για την αρχική διάταξη που συνίσταται από όλους τους ορθογώνιους κύκλους προς και τους δυο κ_1 και κ_2, η κατάσταση είναι εντελώς ανάλογη. Από κάθε σημείο του εκτεταμένου επιπέδου εκτός των P και Q, διέρχεται ακριβώς ένας κύκλος της δέσμης, και ποτέ δυο από αυτούς τους κύκλους δεν έχουν ένα κοινό σημείο. Δέσμες αυτού του είδους ονομάζονται *υπερβολικές δέσμες* κύκλων.

47. Η δεύτερη περίπτωση που θα εξεταστεί είναι των δυο κύκλων κ_1 και κ_2 που δεν έχουν κοινό σημείο. Εδώ πρώτα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν μετασχηματισμό Moebius ο οποίος απεικονίζει τους κ_1 και κ_2 σε μια ευθεία γραμμή κ_1' και έναν κύκλο κ_2' αντίστοιχα. Η ευθεία κ_1' θα είναι ασφαλώς εξολοκλήρου έξω από τον κύκλο κ_2' (βλέπε Σχ. 6). Ας συμβολίσουμε με μ_1' την ευθεία γραμμή MN η οποία διέρχεται από το κέντρο του κ_2' και είναι κάθετη στην κ_1', και με μ_2', τον κύκλο με κέντρο το N ο οποίος είναι ορθογώνιος στον κ_2'. Έστω P' και Q' τα δυο σημεία της τομής των μ_1' και μ_2'. Τώρα χρησιμοποιούμε έναν δεύτερο μετασχηματισμό Moebius που απεικονίζει τα P' και Q' στα $z=0$ και $z=\infty$, αντίστοιχα. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αυτός ο μετασχηματισμός απεικονίζει τα κ_1' και κ_2' σε δυο ομόκεντρους κύκλους κ_1'' και κ_2'' οι οποίοι είναι ορθογώνιοι σε κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από το $z=0$ αλλά όχι, και οι δυο ταυτόχρονα, σε κάθε άλλη ευθεία γραμμή ή κύκλο. Τούτο συνεπάγεται ότι οι μόνοι κύκλοι οι οποίοι είναι ορθογώνιοι και στους δυο κ_1' και κ_2' είναι εκείνοι οι οποίοι διέρχονται από τα P' και Q'.



Σχ. 6

Ως εκ τούτου υπάρχουν δυο σημεία P και Q τέτοια ώστε οι κύκλοι που διέρχονται από τα P και Q είναι οι μοναδικοί που είναι ορθογώνιοι στους δυο δεδομένους κύκλους κ_1 και κ_2. Αυτά τα δυο σημεία P και Q είναι το μοναδικό ζεύγος σημείων που έχουν την ιδιότητα να είναι το ένα η εικόνα του άλλου κάτω από την αντιστροφή στον κ_1 και κάτω από την αντιστροφή στον κ_2. Θα ονομάζουμε αυτά τα δυο σημεία *κοινά σημεία* της δέσμης. Μια δέσμη που συνίσταται από όλους τους κύκλους που διέρχονται από δυο σταθερά σημεία P και Q ονομάζεται *ελλειπτική δέσμη* κύκλων.

48. Μια δέσμη κύκλων ονομάζεται *παραβολική* αν συνίσταται από όλους τους ορθογώνιους κύκλους σε δυο κύκλους εφαπτόμενους μεταξύ τους. Αν το σημείο επαφής P των κ_1 και κ_2 απεικονίζεται στο σημείο $z=\infty$ με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό Moebius, τότε οι κύκλοι κ_1 και κ_2 απεικονίζονται σε δυο παράλληλες ευθείες γραμμές κ_1' και κ_2', και η παραβολική δέσμη που ορίστηκε προηγουμένως σε μια οικογένεια παραλλήλων ευθειών ορθογωνίων στα κ_1' και κ_2'. Ως εκ τούτου η αρχική παραβολική δέσμη συνίσταται από όλους τους κύκλους που είναι ορθογώνιοι στο P και στους δυο κ_1 και κ_2.

49. Δυο δέσμες κύκλων που έχουν την ιδιότητα ότι κάθε κύκλος της μιας δέσμης είναι ορθογώνιος σε κάθε κύκλο της άλλης δέσμης, ονομάζονται *συζυγείς δέσμες* κύκλων. Κάθε ελλειπτική δέσμη έχει ακριβώς μια συζυγή δέσμη, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι υπερβολική. Αντιστρόφως, η μοναδική συζυγής οποιασδήποτε δεδομένης υπερβολικής δέσμης είναι πάντοτε μια ελλειπτική δέσμη. Οι παραβολικές δέσμες μπορούν να συνδυαστούν κατά ζεύγη συζυγών.

Τα ανωτέρω συνεπάγονται ότι για οποιουσδήποτε δεδομένους κύκλους κ_1 και κ_2, υπάρχει ακριβώς μια δέσμη κύκλων η οποία περιέχει και αυτούς τους δυο. Αυτή η δέσμη θα είναι ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική, αναλόγως με το αν οι δυο κύκλοι έχουν δυο, ένα ή κανένα κοινό σημείο.

Έχουμε πάρει όλα αυτά τα αποτελέσματα σαν απλές εφαρμογές του παρακάτω θεωρήματος: Δυο κύκλοι οι οποίοι τέμνονται ή είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους μπορούν πάντοτε να απεικονιστούν, διαμέσου του κατάλληλου μετασχηματισμού Moebius, σε δυο τεμνόμενες ευθείες γραμμές ή σε δυο παράλληλες ευθείες γραμμές, αντίστοιχα. Και δυο κύκλοι οι οποίοι δεν έχουν κοινά σημεία μπορούν παρομοίως να απεικονιστούν σε δυο ομόκεντρους κύκλους.

Σημειώνουμε επίσης το παρακάτω γεγονός: Μεταξύ των μελών μιας δέσμης κύκλων, πάντα υπάρχει ακριβώς μια ευθεία γραμμή, εκτός από την περίπτωση εκφυλισμού μιας δέσμης που συνίσταται από ομόκεντρους κύκλους ή από παράλληλες ευθείες γραμμές. Αυτή η ευθεία γραμμή πράγματι είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι σχηματίζουν την συζυγή δέσμη της δεδομένης δέσμης.

50. Οι οικογένειες των κύκλων στην σφαίρα Riemann οι οποίες απεικονίζονται σε επίπεδες δέσμες κύκλων, κάτω από την στερεογραφική προβολή, μπορεί να περιγραφεί με πολύ απλούς όρους.

Έτσι ώστε αν θεωρήσουμε έναν κύκλο κ πάνω στη σφαίρα και τις εφαπτόμενες στην σφαίρα, που διέρχονται δια μέσου των σημείων του κύκλου Q, οι οποίες είναι ορθογώνιες στον κ, τότε όλες αυτές οι εφαπτόμενες θα συναντώνται σε ένα σημείο P στον χώρο (το οποίο μπορεί να είναι στο άπειρο).

Αντιστρόφως, κάθε εφαπτόμενη στη σφαίρα που διέρχεται από το P θα συναντά την σφαίρα σε ένα σημείο Q του κ. Αλλά το σημείο P είναι ο πόλος (σε σχέση με τη σφαίρα) του επιπέδου του κ. Συνεπώς, οι δυο κύκλοι στη σφαίρα είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους αν και μόνο αν το επίπεδο του ενός κύκλου περνά δια μέσου του πόλου του επιπέδου του άλλου κύκλου και *vice versa*, δηλαδή αν και μόνο αν τα επίπεδά τους είναι συζυγή το ένα με το άλλο.

Τώρα θεωρούμε δυο κύκλους κ_1 και κ_2 στην σφαίρα και έστω οι πόλοι των επιπέδων τους P_1 και P_2 αντίστοιχα. Έστω g η ευθεία γραμμή που ενώνει τα P_1 και P_2. Οι δέσμες των επιπέδων που διέρχονται από την g τέμνουν τη σφαίρα σε μια οικογένεια από κύκλους των οποίων η στερεογραφική προβολή στο επίπεδο δίνει μια δέσμη κύκλων. Αυτή η δέσμη κύκλων θα είναι ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική αναλόγως αν η g έχει δυο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με την σφαίρα. Ο γεωμετρικός τόπος των πόλων των επιπέδων τον οποίο σχηματίζουν μια δέσμη με τον άξονα g, είναι μια ευθεία γραμμή g', και είναι η ευθεία g' η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή της δέσμης των κύκλων που είναι συζυγής προς την μια ακριβώς δέσμη που προκύπτει από την ίδια την g.

Μετασχηματισμοί Moebius που Γεννώνται από Δυο Ανακλάσεις (§ 51)

51. Κάτω από την ανάκλαση (αλλιώς αντιστροφή) σε έναν κύκλο κ_1, κάθε κύκλος κ ορθογώνιος στον κ_1 απεικονίζεται στον εαυτό του. Αν η ανάκλαση στον κ_1 ακολουθείται από μια δεύτερη ανάκλαση, σε έναν κύκλο κ_2, τότε η προκύπτουσα σύνθεση των δυο ανακλάσεων παριστάνει έναν σύμμορφο[1] μετασχηματισμό διατήρησης-κύκλου που αφήνει αναλλοίωτο (αλλιώς απεικονίζεται στον εαυτό του) κάθε κύκλο κ της δέσμης που συνίσταται από όλους τους ορθογώνιους κύκλους και στους δύο κύκλους κ_1 και κ_2.

Αντιστρόφως, θεωρούμε έναν μετασχηματισμό Moebius που αφήνει αναλλοίωτο κάθε κύκλο μιας δεδομένης δέσμης κύκλων. Θα αποδείξουμε ότι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός αυτού του είδους μπορεί να διασπαστεί σε δυο διαδοχικές ανακλάσεις σε δυο κύκλους κ_1 και κ_2 που ανήκουν σε δέσμη κύκλων συζυγή στην αρχική δέσμη, και ότι επιπλέον, ένας από τους δυο κύκλους μπορεί να επιλεχθεί τυχαία μεταξύ των κύκλων της δέσμης του.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η δέσμη των αναλλοίωτων κύκλων είναι υπερβολική. Εφόσον μια υπερβολική δέσμη μπορεί πάντα να μετασχηματισθεί σε μια δέσμη ομόκεντρων κύκλων $|z| = r$ διαμέσου ενός κατάλληλου μετασχηματισμού Moebius, αρκεί να δειχθεί η παραπάνω πρόταση για την περίπτωση που οι αναλλοίωτοι κύκλοι είναι οι κύκλοι $|z| = r$. Τώρα αν ένας μετασχηματισμός Moebius αφήνει αυτούς τους κύκλους αναλλοίωτους, πρέπει να απεικονίζει κάθε ευθεία γραμμή g που διέρχεται από το $z = 0$ σε κάποια ευθεία γραμμή g^* που διέρχεται επίσης από το $z = 0$. Αν $z_0 \neq 0$ είναι ένα σημείο της g, τότε μια ανάκλαση σε μια από τις διχοτόμους h των δύο γωνιών

[1] Δηλαδή, του πρώτου είδους (βλέπε § 29 ανωτέρω). Μια απεικόνιση λέμε ότι είναι σύμμορφη αν διατηρεί το μέτρο και το πρόσημο (φορά) κάθε γωνίας[Στ.μ.]

των g και g^* απεικονίζει το z_0 στο ίδιο σημείο-εικόνα z_0^* στην g^* όπως κάνει ο μετασχηματισμός μας Moebius (αφού ο τελευταίος συμμετέχει με την ανάκλαση στην ιδιότητα να αφήνει το $|z|$ αμετάβλητο, για όλα τα z). Ως εκ τούτου ο υπό συζήτηση μετασχηματισμός Moebius διαφέρει από την ανάκλαση στην h από έναν μετασχηματισμό διατήρησης-κύκλου με τα σταθερά σημεία $z=0$, $z=z_0^*$ και $z=\infty$. Από την § 40 ο μόνος τέτοιος μετασχηματισμός διατήρησης-κύκλου είναι μια ανάκλαση στην g^*. Τώρα γράφουμε τις εξισώσεις της h και της g^* στις μορφές

$$ze^{-i\varphi}-\overline{z}e^{i\varphi}=0, \quad ze^{-i\psi}-\overline{z}e^{i\psi}=0. \tag{51.1}$$

Με ανάκλαση στην h, ένα σημείο z απεικονίζεται στο σημείο

$$z^*=e^{2i\varphi}\overline{z}, \quad \overline{z^*}=e^{-2i\varphi}z. \tag{51.2}$$

Με ανάκλαση στην g^*, το σημείο z^* απεικονίζεται στο

$$w=e^{2i\psi}\overline{z^*}. \tag{51.3}$$

Η σύνθεση των δυο τελευταίων πράξεων δίνει

$$w=e^{2i(\psi-\varphi)}z. \tag{51.4}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός Moebius είναι μια περιστροφή μέσω της γωνίας $\vartheta=2(\psi-\varphi)$ και βλέπουμε ότι η φ (ή η ψ), ως εκ τούτου επίσης και η h (ή η g^*), μπορούν να επιλεχθούν αυθαίρετα.

Οδηγούμαστε, με παρόμοια επιχειρήματα, σε ανάλογα συμπεράσματα αν η δέσμη των αναλλοίωτων κύκλων είναι ελλειπτική. Μετά από τον μετασχηματισμό αυτής της δέσμης σε μια δέσμη από ευθείες γραμμές που διέρχονται από το $z=0$ μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού Moebius, βρίσκουμε στην περίπτωση αυτή ότι κάθε μετασχηματισμός Moebius που αφήνει αυτές τις ευθείες αναλλοίωτες πρέπει να είναι το αποτέλεσμα δυο διαδοχικών ανακλάσεων σε δυο ομόκεντρους κύκλους

$$z\overline{z}=a^2, \quad z\overline{z}=b^2. \tag{51.5}$$

Αυτή τη φορά έχουμε προς σύνθεση τους δυο μετασχηματισμούς $z^*\overline{z}=a^2$ και $w\overline{z^*}=b^2$ και παίρνουμε

$$w=\frac{b^2}{a^2}z. \tag{51.6}$$

Εφόσον ο μετασχηματισμός Moebius (51.6) εξαρτάται μόνον από τον λόγο των ακτίνων των δυο κύκλων (51.5), μπορούμε ακόμη μια φορά να καθορίσουμε την πρώτη (η την δεύτερη) από αυτές τις δυο ακτίνες αυθαίρετα.

Στην τρίτη περίπτωση, για μια παραβολική δέσμη αναλλοίωτων κύκλων, οδηγούμαστε παρομοίως σε ανακλάσεις σε δυο παράλληλες ευθείες γραμμές. Η σύνθεση (γινόμενο) αυτών των ανακλάσεων είναι μια μετατόπιση του μιγαδικού επιπέδου. Αυτή η μετατόπιση εξαρτάται μόνον από την κατεύθυνση των δυο παραλλήλων και την απόστασή μεταξύ των, αλλά όχι από την θέση της κάθε μιας στο επίπεδο. Έτσι έχουμε αποδείξει την πρόταση που διατυπώθηκε ανωτέρω, σε όλα της τα μέρη.

Αναπαράσταση του Γενικού Μετασχηματισμού Moebius ως ένα Γινόμενο Αντιστροφών σε Κύκλους (§§ 52-55)

52. Κάθε μετασχηματισμός Moebius

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{52.1}$$

μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο ή τεσσάρων αντιστροφών, όπως θα αποδείξουμε τώρα.

Αρχίζουμε με την εξέταση των σταθερών σημείων του μετασχηματισμού (52.1), τα οποία μπορούμε να πάρουμε θέτοντας $w = z$, έτσι τα σταθερά σημεία – που συμβολίζονται με z_i - είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\gamma z^2 + (\delta - a)z - \beta = 0, \tag{52.2}$$

και αν $\gamma \neq 0$, αυτές μπορούν να γραφούν

$$z_i = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{\Delta}}{2\gamma}, \quad \Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma). \tag{52.3}$$

Συνεπώς αν $\gamma \neq 0$, ο αριθμός των σταθερών σημείων είναι είτε ένα είτε δυο, αναλόγως με το αν $\Delta = 0$ ή $\Delta \neq 0$.

Αν $\gamma = 0$, έχουμε να προσμετρήσουμε το σημείο $z = \infty$ ως ένα σταθερό σημείο. Εφόσον $\Delta = (\alpha - \delta)^2$ στην περίπτωση αυτή έχουμε για άλλη μια φορά μια ή δυο σταθερά σημεία αναλόγως με το αν $\Delta = 0$ ή $\Delta \neq 0$.

53. Ας επεξεργαστούμε πρώτα την περίπτωση που $\Delta = 0$, ή που είναι το ίδιο την $\alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha + \delta)^2/4$. Αν επίσης $\gamma = 0$, τότε πρέπει να έχουμε $\alpha = \delta$ και

$$w = z + \frac{\beta}{\alpha}. \tag{53.1}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός είναι μια μεταφορά του επιπέδου, και μπορεί να αναλυθεί σε δυο διαδοχικές ανακλάσεις σε δυο παράλληλες ευθείες γραμμές.

Αλλά αν $\gamma \neq 0$ τότε έχουμε

$$z_1 = z_2 = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}, \quad \gamma z_1 + \delta = \frac{\alpha + \delta}{2}, \tag{53.2}$$

εφόσον από την (34.1):

$$w - z_1 = w - w_1 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z - z_1)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_1 + \delta)} = \frac{(\alpha + \delta)(z - z_1)}{2(\gamma z + \delta)}. \tag{53.3}$$

Από την άλλη μεριά,

$$\gamma z+\delta=\gamma(z-z_1)+\frac{\alpha+\delta}{2}, \tag{53.4}$$

έτσι ώστε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{w-z_1}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{2\gamma}{\alpha+\delta} \tag{53.5}$$

Αν εισάγουμε τις νέες παραμέτρους

$$\omega=\frac{1}{w-z_1}, \quad t=\frac{1}{z-z_1}, \tag{53.6}$$

τότε ο μετασχηματισμός μας (53.3) παίρνει ακόμη μια φορά την μορφή μιας μεταφοράς,

$$\omega=t+\frac{2\gamma}{\alpha+\delta} \tag{53.7}$$

και έχουμε αποδείξει το παρακάτω θεώρημα:

Κάθε μετασχηματισμός Moebius για τον οποίο η διακρίνουσα Δ *μηδενίζεται μπορεί να παρασταθεί ως ένα γινόμενο από δυο ανακλάσεις σε δυο εφαπτόμενους μεταξύ τους κύκλους (ή σε δυο παράλληλες ευθείες γραμμές).*

54. Αν $\Delta\neq 0$ και $\gamma\neq 0$, τότε από την (34.1) έχουμε

$$\frac{w-z_2}{w-z_1}=\frac{w-w_2}{w-w_1}=\frac{\gamma z_1+\delta}{\gamma z_2+\delta}\cdot\frac{z-z_2}{z-z_1}. \tag{54.1}$$

Η αλλαγή των μεταβλητών

$$\omega=\frac{w-z_2}{w-z_1}, \quad t=\frac{z-z_2}{z-z_1} \tag{54.2}$$

μετατρέπει τον μετασχηματισμό μας Moebius στην απλή μορφή

$$\omega=\rho t, \tag{54.3}$$

όπου

$$\rho=\frac{\gamma z_1+\delta}{\gamma z_2+\delta}=\frac{\alpha+\delta+\sqrt{\Delta}}{\alpha+\delta-\sqrt{\Delta}}. \tag{54.4}$$

Αλλά αν $\gamma=0$, $\Delta=(\delta-\alpha)^2\neq 0$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\omega=w-\frac{\beta}{\delta-\alpha}, \quad t=z-\frac{\beta}{\delta-\alpha}, \tag{54.5}$$

και οδηγούμαστε για άλλη μια φορά στην (54.3), με

$$\rho=\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\alpha+\delta+\sqrt{\Delta}}{\alpha+\delta-\sqrt{\Delta}} \quad \left(\sqrt{\Delta}=\alpha-\delta\right) \tag{54.6}$$

Έτσι οι δυο περιπτώσεις $\gamma \neq 0$ και $\gamma = 0$ οδηγούν στον ίδιους τύπους. Οι τύποι των μετασχηματισμών του μιγαδικού επιπέδου που προκύπτουν εξαρτώνται από την τιμή ρ, ως εξής:

Πρώτον, αν ρ είναι πραγματικός και > 0 αλλά $\neq 1$, τότε ο μετασχηματισμός (54.3), και ως εκ τούτου επίσης ο μετασχηματισμός (54.1), μπορεί να παρασταθεί με δυο διαδοχικές ανακλάσεις (αντιστροφές) σε δυο κύκλους μιας υπερβολικής δέσμης κύκλων. Δεύτερον, αν ρ είναι μοναδιαίος αλλά $\neq 1$, τότε ο μετασχηματισμός μας μπορεί να παρασταθεί με δυο διαδοχικές αντιστροφές σε δυο κύκλους μιας ελλειπτικής δέσμης. Τελικά, αν

$$\rho = ae^{i\vartheta}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad 0 < \vartheta < 2\pi, \tag{54.7}$$

τότε ο μετασχηματισμός (54.3) μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο τεσσάρων αντιστροφών, η πρώτες δυο σε δυο κύκλους μιας συγκεκριμένης δέσμης και τελευταίοι δυο σε δυο κύκλους της συζυγούς δέσμης. Τότε μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι αν $\vartheta \neq \pi$, κανένας κύκλος και καμία ευθεία γραμμή δεν μπορεί να απεικονιστεί στον εαυτό της, και ως εκ τούτου προκύπτει ότι *όχι περισσότεροι από τέσσερις* αντιστροφές θα αρκούν να παραστήσουν τον δεδομένο μετασχηματισμό Moebius. Ένας μετασχηματισμός Moebius αυτού του τύπου ονομάζεται *λοξοδρομικός*. Βρίσκουμε ότι αν $\vartheta = \pi$, ο μετασχηματισμός (54.3) παρομοίως λοξοδρομικός.

55. Από την (54.4), και κατόπιν την (52.3), παίρνουμε

$$\sqrt{\Delta} = (\alpha + \delta)\frac{\rho - 1}{\rho + 1}, \quad (\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = \Delta = (\alpha + \delta)^2 \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)^2, \tag{55.1}$$

και ως εκ τούτου παίρνουμε την ρητή αναλλοίωτη

$$\lambda = \frac{(\alpha + \delta)^2}{4(\alpha\delta - \beta\gamma)} = \frac{(\rho + 1)^2}{4\rho} = 1 + \frac{(\rho - 1)^2}{4\rho}. \tag{55.2}$$

Αυτή η αναλλοίωτη λ χρησιμεύει δικαιολογημένα στον χαρακτηρισμό και τον διαχωρισμό μεταξύ των περιπτώσεων που μόλις συζητήθηκαν. Έτσι αν ρ είναι πραγματικός και $\neq 1$, τότε $\lambda > 1$. Αν ρ είναι μοναδιαίος, έστω $\rho = e^{i\vartheta}$, τότε $\lambda = \cos^2 \vartheta/2$. Για $\rho \neq 1$ τότε θα έχουμε $0 \leq \lambda < 1$. Τελικά, αν $\Delta = 0$ τότε $\lambda = 1$.

Περιληπτικά, βλέπουμε ότι *ο μετασχηματισμός Moebius* (52.1) *είναι πάντα λοξοδρομικός για έναν μη πραγματικό λ και για αρνητικό πραγματικό λ. Αν ο λ είναι πραγματικός και ≥ 0, τότε ο μετασχηματισμός μπορεί να παρασταθεί ως ένα γινόμενο αντιστροφών σε δυο κύκλους μιας δέσμης κύκλων η οποία είναι ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική αναλόγως αν $\lambda < 1, \lambda = 1$ ή $\lambda > 1$.*