ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΤΟΥ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΚΟΠΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΚΟΠΙΑ

Η Ανακάλυψη των Μιγαδικών Αριθμών (§ 1)

1. Οι αλγεβριστές ανακάλυψαν τους μιγαδικούς αριθμούς αρκετά νωρίς (συγκεκριμένα στις αρχές του 16ου αιώνα) και αυτό συνέβη σχεδόν με έναν εντελώς φυσικό τρόπο, παρότι η πιο απλούστερη έννοια του αρνητικού αριθμού δεν είχε εισαχθεί μέχρι τότε. Και οι δύο έννοιες προκύπτουν από το γεγονός ότι η άλγεβρα, καθώς εκφράζεται με γράμματα - σύμβολα, οδηγεί σε εκφράσεις χωρίς νόημα όταν τα γράμματα - σύμβολα έχουν οριστεί εξαρχής να έχουν μια συγκεκριμένη σημασία, μολονότι μια διαφορετική θεώρηση των ίδιων συμβόλων θα αναιρούσε όλες τις ανωμαλίες.

Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$a\,x+b=k \tag{1.1}$$

μπορεί να λυθεί αν τα γράμματα a, b, k και x παριστάνουν *συνήθεις* θετικούς αριθμούς, *υπό τον όρο* ότι $a>0,\ b<k$. Αλλά η ίδια εξίσωση δεν έχει λύση στην περίπτωση $b\geq k$. Ωστόσο αν τώρα αυτά τα ίδια σύμβολα a, b, k και x θεωρηθούν ότι παριστάνουν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό – θετικό, μηδέν ή αρνητικό – η εξίσωση (1.1) έχει πάντοτε μια λύση, αρκεί μόνο να ισχύει $a\neq 0$.

Συναντούμε εντελώς παρόμοιες καταστάσεις όταν διερευνούμε την δευτεροβάθμια εξίσωση

$$ax^2-2bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \tag{1.2}$$

αν θεωρήσουμε μόνον πραγματικές τιμές (θετικές ή αρνητικές) για τα a, b, c και x. Για τις ρίζες αυτής της εξίσωσης έχουμε

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} \tag{1.3}$$

και μπορούν συνεπώς να υπολογιστούν όταν

$$b^2-ac\geq 0\,.$$

Αν ωστόσο οι συντελεστές της εξίσωσης (1.2) επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε

$$ac-b^2>0\,,$$

τότε ενώ μπορούμε ασφαλώς να γράψουμε στην θέση της (1.3),

$$x=\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\sqrt{-1}$$

αυτή η τελευταία έκφραση στερείται νοήματος διότι δεν υπάρχει ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να ισούται με -1.

Τώρα όπως ακριβώς φτάνει κανείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών από αυτό των θετικών πραγματικών αριθμών με προσάρτηση στους τελευταίους του αριθμού -1, έτσι κάποιος μπορεί να θεωρήσει το σύμβολο $\sqrt{-1}$ ως νέο αποδεκτό αριθμό ο οποίος πρέπει να προσαρτηθεί στους πραγματικούς αριθμούς. Οι μαθηματικοί του 17ου και 18ου αιώνα το έκαναν αυτό εντελώς απλοϊκά, και οδηγήθηκαν σε πάρα πολύ περίεργα αποτελέσματα στους υπολογισμούς τους, ωθούμενοι έτσι να επεκτείνουν την μέθοδο περαιτέρω εφαρμόζοντάς την και σε άλλα προβλήματα. Ωστόσο, ποτέ δεν έγιναν όλα ξεκάθαρα, έτσι ώστε η νέα μέθοδος υπολογισμού να μπορεί να εφαρμόζεται χωρίς αντιφάσεις, και για τον λόγο αυτό ονόμασαν το $\sqrt{-1}$ «ο φανταστικός αριθμός». Ο C. F. Gauss (1777-1855) ήταν πιθανώς ο πρώτος που έθεσε τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών σε μια στέρεα βάση. Παρόλα αυτά διατήρησε όχι μόνο τον όρο «φανταστικός αριθμός» αλλά επίσης και το σύμβολο i το οποίο εισήγαγε ο L. Euler (1707-1783) για να συμβολίζει το $\sqrt{-1}$ και αυτός ο συμβολισμός του Euler και του Gauss χρησιμοποιείται ως επί το πλείστον μέχρι σήμερα[1].

Ορισμός των Μιγαδικών Αριθμών (§§ 2-9)

2. Στην στοιχειώδη αριθμητική πρώτα εισάγουμε τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών: $p, q, \ldots$, και στη συνέχεια προχωρούμε στην μελέτη των κλασμάτων p/q ως διατεταγμένα ζεύγη των φυσικών αριθμών με αριθμητικές πράξεις κατάλληλα ορισμένες. Ο W. R. Hamilton (1805-1865) χρησιμοποίησε τον ίδιο τρόπο προσέγγισης για να δώσει μια θεμελίωση της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών[2].

Ας συμβολίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς με μικρά ελληνικά γράμματα $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \ldots$. Θα θεωρούμε με τον μιγαδικό αριθμό a, το ζεύγος α_1, α_2 των πραγματικών αριθμών, γραμμένο με αυτή τη σειρά. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$a = (\alpha_1, \alpha_2), \quad b = (\beta_1, \beta_2), \quad c = (\gamma_1, \gamma_2) \text{ κλπ.} \tag{2.1}$$

Προκύπτει ότι η *μια* ισότητα

$$a = b \tag{2.2}$$

μεταξύ δυο μιγαδικών αριθμών είναι ισοδύναμη με *δύο* ισότητες

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 . \tag{2.3}$$

3. Ορίζουμε τώρα το *άθροισμα* δυο μιγαδικών αριθμών a, b με την σχέση

$$a + b = \left(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\right) \tag{3.1}$$

Τότε μπορούν να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες:

$$a + b = \left(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\right) = \left(\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2\right) = b + a \tag{3.2}$$

$$\left(a + b\right) + c = \left(\left(\alpha_1 + \beta_1\right) + \gamma_1, \left(\alpha_2 + \beta_2\right) + \gamma_2\right) = \left(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2\right).$$

Από την συμμετρία στο δεξιό μέλος της τελευταίας έκφρασης προκύπτει επίσης ότι

$$\left(a + b\right) + c = a + \left(b + c\right). \tag{3.3}$$

Επομένως *η πρόσθεση, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι μεταθετική και προσεταιριστική*.

Στη συνέχεια, ορίζουμε το *γινόμενο* ab των μιγαδικών αριθμών a και b με τον τύπο[3]

$$ab = \left(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) \tag{3.4}$$

και μπορούμε ταυτόχρονα να συμπεράνουμε από την συμμετρία των δυο συνιστωσών στην παρένθεση του δεξιού μέλους ότι ισχύει

$$ab = ba \tag{3.5}$$

[1]Εκτός από πολλούς φυσικούς και ηλεκτρολόγους μηχανικούς που προτιμούν να χρησιμοποιούν το j αντί του i.

[2] W. R. Hamilton Trans. Roy. Irish Acad. *17*, 393, (1837)

[3] Χωρίς να εγείρεται το ερώτημα γιατί έπρεπε να επιλεχθεί ακριβώς αυτός ο συγκεκριμένος τύπος.

Ως εκ τούτου *ο πολλαπλασιασμός είναι μια μεταθετική πράξη*.

Αν τώρα σχηματίσουμε το γινόμενο του αριθμού (ab) με έναν τρίτο μιγαδικό αριθμό c, βρίσκουμε

$$(ab)c=(\alpha_1\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_2\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_2\gamma_1,$$
$$\alpha_2\beta_1\gamma_1+\alpha_1\beta_2\gamma_1+\alpha_1\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_2\gamma_2). \tag{3.6}$$

Σημειώνοντας ότι οι συνιστώσες του δεξιού μέλους παραμένουν αναλλοίωτες αν εναλλάξουμε το α_1 με το γ_1 και το α_2 με το γ_2, και κάνοντας χρήση της (3.5), παίρνουμε

$$(ab)c=(cb)a=a(bc). \tag{3.7}$$

Τελικά, μπορούμε να αποδείξουμε παρομοίως ότι οι δυο μιγαδικοί αριθμοί $a(b+c)$ και $(ab)+(ac)$ παριστάνονται από το ίδιο διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών.

Έτσι *ο πολλαπλασιασμός δεν είναι μόνο μεταθετικός, αλλά επίσης και προσεταιριστικός και επιμεριστικός.*

4. Αν a και b δυο οποιοιδήποτε μιγαδικοί αριθμοί, τότε πάντοτε υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός

$$x=(\xi_1,\xi_2) \tag{4.1}$$

που ικανοποιεί την εξίσωση

$$a+x=b, \tag{4.2}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τις δυο εξισώσεις

$$\alpha_1+\xi_1=\beta_1,\quad \alpha_2+\xi_2=\beta_2. \tag{4.3}$$

Για το x βρίσκουμε

$$x=(\beta_1-\alpha_1,\beta_2-\alpha_2) \tag{4.4}$$

και γράφουμε

$$x=b-a \tag{4.5}$$

Ο αριθμός $b-a$ ονομάζεται η *διαφορά* των αριθμών a και b.

Το γεγονός ότι πάντοτε η (4.2) έχει μια λύση δείχνει ότι ως προς την πρόσθεση, οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν ως τα στοιχεία μιας αβελιανής ομάδας. Το «μοναδιαίο στοιχείο» n αυτής της ομάδας προκύπτει θέτοντας $b=a$ και $x=n$ στην (4.2), η οποία δίνει

$$n=(0,0). \tag{4.6}$$

Ονομάζουμε το n το *μηδενικό(null)*, ή το *μηδέν* των μιγαδικών αριθμών.

Αν

$$ab=n \tag{4.7}$$

τότε προκύπτει από την (3.4) ότι οι ισότητες

$$\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2=0,\quad \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0$$

ισχύουν και οι δυο, και ως εκ τούτου επίσης

$$(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)=0.$$

Τουλάχιστον ένας από τους δυο παράγοντες $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)$ και $(\beta_1^2+\beta_2^2)$ πρέπει να είναι μηδέν, και αυτό συνεπάγεται ότι τουλάχιστον ένας από τους a και b ισούται με n. Έτσι έχουμε αποδείξει το εξής:

Αν το γινόμενο ab δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με n, τότε τουλάχιστον ο ένας από αυτούς τους αριθμούς πρέπει να ισούται με n.

5. Ας βρούμε τώρα την συνθήκη ώστε η εξίσωση

$$ax=b \tag{5.1}$$

να έχει τουλάχιστον μια λύση $x=(\xi_1,\xi_2)$.

Αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\alpha_1\xi_1-\alpha_2\xi_2=\beta_1,\quad \alpha_2\xi_1+\alpha_1\xi_2=\beta_2 \tag{5.2}$$

και αυτό το σύστημα έχει μια και μόνο μια λύση υπό τον όρο ότι $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$ ή, ισοδύναμα $a\neq n$. Λύνοντας το σύστημα κάτω από αυτή την υπόθεση, βρίσκουμε

$$\frac{b}{a}=\left(\xi_1,\xi_2\right)=\left(\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2},\frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right). \tag{5.3}$$

Αν θέσουμε $b=a$ στην (5.3), παίρνουμε έναν μιγαδικό αριθμό ανεξάρτητο από το a, συγκεκριμένα

$$e=\frac{a}{a}=(1,0) \qquad (a\neq n)$$

ο οποίος παριστάνει την *μονάδα* ή το *ένα*, του συστήματος των μιγαδικών αριθμών, ακριβώς όπως το n παριστάνει τον μιγαδικό αριθμό «μηδέν».

Μπορούμε να ανακεφαλαιώσουμε τα αποτελέσματά μας ως εξής: *Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι τα στοιχεία ενός μεταθετικού σώματος στο οποίο όλοι οι στοιχειώδεις νόμοι της άλγεβρας αληθεύουν*.

6. Αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί των οποίων η δεύτερη συνιστώσα μηδενίζεται, και συνεπώς είναι της μορφής

$$a=(\alpha_1,0) \tag{6.1}$$

παίζουν έναν ειδικό ρόλο. Περιλαμβάνουν το $n=(0,0)$, καθώς επίσης και το $e=(1,0)$. Τέτοιοι αριθμοί θα ονομάζονται *πραγματικοί αριθμοί στο μιγαδικό πεδίο*. Αυτή η ορολογία δικαιολογείται από τις εκφράσεις που προκύπτουν όταν εφαρμόζονται σ' αυτούς οι στοιχειώδεις πράξεις, δηλαδή αν δίνονται οι

$$a=(\alpha_1,0),\quad b=\left(\beta_1,0\right) \tag{6.2}$$

τότε έχουμε

$$a\pm b=\left(\alpha_1\pm\beta_1,0\right),\quad a\,b=\left(\alpha_1\beta_1,0\right),\quad \frac{b}{a}=\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1},0\right). \tag{6.3}$$

Όπως δείχνουν τα παραπάνω, όταν οποιεσδήποτε αριθμητικές πράξεις εφαρμόζονται σε πραγματικούς αριθμούς στο μιγαδικό πεδίο, τα αποτελέσματα είναι πάντοτε επίσης πραγματικοί αριθμοί στο μιγαδικό πεδίο, και επιπλέον, αυτοί οι αριθμοί συνιστούν ένα σώμα που είναι ισομορφικό με αυτό των συνηθισμένων πραγματικών αριθμών $\alpha,\beta,\ldots$.

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών μπορεί συνεπώς να θεωρηθεί ως μια επέκταση του σώματος των πραγματικών αριθμών, ακριβώς όπως τα κλάσματα p/q φαίνονται ως η επέκταση του πεδίου των ακεραίων $p/1$. Στην περίπτωση των κλασμάτων παραλείπουμε την γραμμή του κλάσματος και τον παρονομαστή αν αυτός ισούται με 1, γράφοντας p στη θέση του $p/1$. Παρομοίως, δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης αν ο πραγματικός αριθμός $(\alpha,0)$ στο μιγαδικό πεδίο συμβολίζεται απλά με α, απλοποιώντας στο μέγιστο την εμφάνιση των περισσότερων τύπων. Θα κάνουμε αυτή την συμφωνία, και πιο συγκεκριμένα θα γράφουμε 0 για $n=(0,0)$ και 1 για $e=(1,0)$.

7. Παραμένει ακόμη να δειχθεί ότι έχουμε πραγματοποιήσει τον στόχο τον οποίο θέσαμε αρχικά στην εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών, δηλαδή ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $a=(\alpha_1,\alpha_2)$ μπορεί να προσδιοριστεί τουλάχιστον ένας μιγαδικός αριθμός $x=(\xi_1,\xi_2)$ το τετράγωνο x^2 του οποίου ισούται με a. Τώρα από την (3.4), έχουμε

$$x^2=\left(\xi_1^2-\xi_2^2,2\xi_1\xi_2\right) \tag{7.1}$$

και η εξίσωση

$$x^2=a \tag{7.2}$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = \alpha_1, \quad 2\xi_1\xi_2 = \alpha_2 \tag{7.3}$$

Από αυτή προκύπτει ότι

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right)^2 + 4\xi_1^2\xi_2^2 = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^2,$$

και συνεπώς έχουμε

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,. \tag{7.4}$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (7.3), βρίσκουμε

$$\xi_1^2 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + \alpha_1}{2}, \quad \xi_2^2 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \alpha_1}{2}.$$

Έτσι οι μόνες δυνατές τιμές των ξ_1 και ξ_2 είναι της μορφής

$$\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + \alpha_1}{2}}, \quad \xi_2 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \alpha_1}{2}} \tag{7.5}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν σαν να εμφανίζονται τέσσερις λύσεις στο σύστημά μας. Ωστόσο αν $\alpha_2 > 0$, τότε η δεύτερη από τις εξισώσεις (7.3) δείχνει ότι τα ξ_1 και ξ_2, πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο, έτσι ώστε σ' αυτή την περίπτωση ο μόνος δυνατός συνδυασμός προσήμων στην (7.5) να είναι $(+,+)$ και $(-,-)$. Παρομοίως στην περίπτωση $\alpha_2 < 0$ ο μόνος δυνατός συνδυασμός προσήμων στην (7.5) είναι $(+,-)$ και $(-,+)$.

Τελικά, αν $\alpha_2 = 0$, δηλαδή αν ο δεδομένος αριθμός a είναι πραγματικός, τότε αν $a > 0$ παίρνουμε

$$\xi_1 = \pm\sqrt{a}, \quad \xi_2 = 0 \tag{7.6}$$

και αν $a < 0$ παίρνουμε

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm\sqrt{-a} \tag{7.7}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε με αντικατάσταση ότι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρέθηκαν παραπάνω ικανοποιούν την εξίσωση (7.2), και να συμπεράνουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις που θεωρήθηκαν παραπάνω, αυτή η εξίσωση έχει δυο αντίθετες λύσεις, δηλαδή δυο λύσεις που το άθροισμά τους είναι μηδέν. Και τελικά, βλέπουμε ότι στην περίπτωση $a = 0$, η μόνη περίπτωση που απομένει, υπάρχει ακριβώς μια λύση, η $x = 0$.

8. Όπως φαίνεται από την (7.7), ο μιγαδικός αριθμός

$$i = (0,1) \tag{8.1}$$

ονομάζεται φανταστική μονάδα, είναι μια λύση της εξίσωσης

$$x^2 = -1\,. \tag{8.2}$$

Τώρα εφόσον

$$i\alpha_2 = (0,1)(\alpha_2, 0) = (0, \alpha_2)\,,$$

προκύπτει ότι κάθε αριθμός

$$a = (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2)$$

μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$a = \alpha_1 + i\,\alpha_2\,. \tag{8.3}$$

Αν πάρουμε υπόψη τις εξισώσεις

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \cdots\cdots \tag{8.4}$$

βλέπουμε ότι όλοι οι υπολογισμοί με μιγαδικούς αριθμούς μπορούν τώρα να πραγματοποιηθούν πολύ ευκολότερα. Έτσι για παράδειγμα, βρίσκουμε, αποδεικνύοντας την εξίσωση (3.4) για άλλη μια φορά, ότι

$$\begin{aligned} a\,b &= (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2) \\ &= \alpha_1\beta_1 + i\,\alpha_1\beta_2 + i\,\alpha_2\beta_1 - \alpha_2\beta_2 \\ &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \end{aligned} \tag{8.5}$$

ή αποδεικνύοντας πάλι την (5.3),

$$\frac{a}{b} = \frac{\beta_1 + i\beta_2}{\alpha_1 + i\alpha_2} = \frac{(\beta_1 + i\beta_2)(\alpha_1 - i\alpha_2)}{(\alpha_1 + i\alpha_2)(\alpha_1 - i\alpha_2)} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + i\,\frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \tag{8.6}$$

Στην εξίσωση (8.3), ονομάζουμε το α_1, *πραγματικό μέρος* και το α_2 *φανταστικό μέρος* του a, και γράφουμε

$$\alpha_1 = \Re a, \quad \alpha_2 = \Im a \tag{8.7}$$

9. Τώρα που έχουμε ορίσει όλους τους μιγαδικούς αριθμούς, ως στοιχεία ενός σώματος που περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς, καθώς επίσης και τον αριθμό i, δεν απομένει καμιά από τις δυσκολίες που προκάλεσαν τόσους πονοκεφάλους στους μαθηματικούς του 18ου αιώνα. Όλες αυτές οι δυσκολίες οφείλονταν στο γεγονός ότι στο παρελθόν προσπαθούσαν, να προσθέσουν στους στοιχειώδεις πραγματικούς αριθμούς έναν αριθμό i, ο οποίος όμως δεν ταίριαζε πουθενά.

Σε όλα όσα ακολουθούν θα έχουμε ως κανόνα να χρησιμοποιούμε μόνο μιγαδικούς αριθμούς σε όλους τους τύπους που θα γράφονται, και όταν θα μιλούμε για έναν πραγματικό αριθμό θα εννοούμε έναν πραγματικό αριθμό στο μιγαδικό πεδίο. Αυτό θα εννοείται, για παράδειγμα, για το 2 στην έκφραση $2a$, κ.λ.π. Οι μόνες εξαιρέσεις ως προς αυτό θα είναι για γράμματα τα οποία φανερά παριστάνουν φυσικούς αριθμούς, όπως διάφοροι δείκτες, ή εκθετικά που χρησιμοποιούνται στον σχηματισμό ακεραίων αριθμών. (βλέπε § 254).

Έτσι, για παράδειγμα, γράφοντας

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{9.1}$$

σημαίνει ότι καθορίζουμε το παρακάτω πρόβλημα: Με $a_0 \neq 0, a_1, \cdots, a_n$ να παριστάνουν δεδομένους μιγαδικούς αριθμούς, αναζητούμε τον προσδιορισμό ενός μιγαδικού αριθμού x για τον οποίο η (9.1) ισχύει. Θα αποδειχθεί αργότερα (βλέπε § 170) ότι για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή του φυσικού αριθμού n, η εξίσωση (9.1) έχει πάντοτε λύσεις και ότι η διαδικασία επέκτασης του πεδίου των αριθμών, όπως περιγράφεται στην § 1 για τις πρώτες δυο περιπτώσεις $n=1$ και $n=2$, δεν χρειάζεται να γίνει τίποτε παραπάνω. Αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*, που πρώτος διατύπωσε ο d' Alembert (1717-1783), αλλά πρώτος απέδειξε ο Gauss το 1799.

Μιγαδικοί Συζυγείς (§ 10)

10. Μαζί με τον μιγαδικό αριθμό

$$z = x + iy \tag{10.1}$$

που έχει το x ως το πραγματικό του μέρος και το y ως το μιγαδικό του μέρος, θεωρούμε τον αριθμό

$$\bar{z} = x - iy \tag{10.2}$$

που ονομάζεται *μιγαδικός συζυγής* του z.

Η διαδικασία του περάσματος από τον z στον $\bar{z}$ ορίζει μια απεικόνιση του συνόλου των μιγαδικών αριθμών στον εαυτό του. Η απεικόνιση είναι ένας *αυτομορφισμός* του σώματος των μιγαδικών αριθμών, γεγονός που σημαίνει τα ακόλουθα: Αν

$$w = u + i\upsilon \qquad (u, \upsilon \ \text{πραγματικοί}) \tag{10.3}$$

είναι οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός, τότε

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{(z\,w)} = \bar{z}\,\bar{w} \tag{10.4}$$

Αυτός ο αυτομορφισμός είναι δεύτερης τάξης (ή *ενειλιγμένος*), διότι έχουμε

$$\bar{\bar{z}} = z \tag{10.5}$$

Σύγκριση των (10.1) και (10.2) δείχνει ότι το z είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$z = \bar{z} \tag{10.6}$$

Αν $f(z,\bar{z})$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση των z και $\bar{z}$ με πραγματικούς συντελεστές, τότε ο μιγαδικός συζυγής της $f(z,\bar{z})$ προκύπτει με εναλλαγή των z και $\bar{z}$ στην δεδομένη έκφραση. Ως εκ τούτου αν η $f(z,\bar{z})$ είναι συμμετρική στα z και $\bar{z}$, τότε η συνάρτηση $f(z,\bar{z})$ έχει μόνο πραγματικές τιμές.

Αλλά αν η $f(z,\bar{z})$ περιέχει επίσης και μιγαδικούς συντελεστές, τότε η $\bar{f}(z,\bar{z})$ προκύπτει με εναλλαγή των z και $\bar{z}$ και την αντικατάσταση των συντελεστών με τους μιγαδικούς συζυγείς τους.

Για παράδειγμα, οι εκφράσεις

$$z + \bar{z} = 2x, \quad (z + \bar{z})^2 = 4x^2, \quad z\,\bar{z} = x^2 + y^2 \tag{10.7}$$

όλες παίρνουν πραγματικές τιμές, ενώ η

$$(z - \bar{z}) = 2iy \tag{10.8}$$

είναι είτε καθαρά μιγαδική είτε μηδέν. Αλλά η

$$(z - \bar{z})^2 = -4y^2. \tag{10.9}$$

όντας μια συμμετρική συνάρτηση, είναι πάντοτε πραγματική.

Σημειώνεται ότι οι παρακάτω ανισότητες εξυπακούονται ταυτοτικά

$$(z + \bar{z}) \geq 0, \quad (z - \bar{z}) \leq 0. \tag{10.10}$$

Απόλυτες Τιμές (§§ 11-12)

11. Με την απόλυτη τιμή ή μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z, που συμβολίζεται με $|z|$, θα εννοούμε τον μη αρνητικό του οποίου το τετράγωνο ισούται με $z\bar{z}$. Έτσι

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad |z| = +\sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{11.1}$$

Αν $z = 0$ τότε $|z| = 0$, και αντιστρόφως, αν $|z| = 0$ τότε $z\bar{z} = 0$, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται $z = 0$. Αν $z \neq 0$ και $z^2 = |z|^2$, τότε προκύπτει ότι $z = \bar{z}$ και ως εκ τούτου ο z είναι πραγματικός, και τότε έχουμε $z = |z|$ ή $z = -|z|$, ανάλογα με το αν ο z είναι θετικός ή αρνητικός.

Για δυο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς a και b, βρίσκουμε ότι

$$|ab|^2 = (ab)(\bar{a}\bar{b}) = (a\bar{a})(b\bar{b}) = |a|^2 |b|^2 .$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$|ab| = |a||b| . \tag{11.2}$$

Τότε αν

$$a \neq 0, \quad ab = c, \quad b = \frac{c}{a},$$

παίρνουμε επίσης

$$\left|\frac{c}{a}\right| = \frac{|c|}{|a|} \quad \left(a \neq 0, c \text{ αυθαίρετος}\right) \tag{11.3}$$

12. Ας συγκρίνουμε τώρα τις απόλυτες τιμές $|a+b|$, $|a|$, $|b|$, όπου a και b δυο οποιοιδήποτε μιγαδικοί αριθμοί. Αρχίζουμε με το ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\left.\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) \\ &= a\bar{a} + b\bar{b} + (a\bar{b} + \bar{a}b) \\ &= |a|^2 + |b|^2 + \left(a\bar{b} + b\bar{a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Παρατηρώντας ότι οι δυο αριθμοί $a\bar{b}$ και $\bar{a}b$ είναι μιγαδικοί συζυγείς, από την (10.10) παίρνουμε ότι

$$\left(a\bar{b} + b\bar{a}\right)^2 \geq 0, \quad \left(a\bar{b} - b\bar{a}\right) \leq 0 . \tag{12.2}$$

Εξαιτίας της ταυτότητας

$$\left(a\bar{b} + \bar{b}\,a\right)^2 = \left(a\bar{b} - b\bar{a}\right)^2 + 4|a|^2 |b|^2 \tag{12.3}$$

συνεπάγεται ότι ανεξάρτητα από το πρόσημο του πραγματικού αριθμού $a\bar{b} + b\bar{a}$ ισχύει πάντοτε

$$a\bar{b} + b\bar{a} \leq 2|a||b| \tag{12.4}$$

Τώρα συγκρίνοντας τις (12.1) και (12.4) προκύπτει η ανισότητα

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{12.5}$$

Επιπλέον χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι

$$|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b| , \tag{12.6}$$

και παρόμοια ότι

$$|b| \leq |a+b| + |a| ,$$

έτσι ώστε τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b| \tag{12.7}$$

Κλείνοντας, ας θεωρήσουμε ότι ισχύει το σημείο της ισότητας στην (12.5). Προφανώς ισχύει αν $a = 0$, και αν $a \neq 0$, τότε φαίνεται από τον παραπάνω υπολογισμό ότι το σημείο της ισότητας θα ισχύει στην (12.5) αν και μόνο αν και οι δυο ακόλουθες σχέσεις αληθεύουν

$$a\bar{b} - b\bar{a} = 0, \quad a\bar{b} + b\bar{a} \geq 0 . \tag{12.8}$$

Θέτοντας $b = ac$, $\bar{b} = \bar{a}\bar{c}$ η (12.8) μετασχηματίζεται σε δυο ισοδύναμες σχέσεις

$$c = \bar{c} \geq 0 , \tag{12.9}$$

η οποία καθορίζει ότι ο

$$c = b/a \tag{12.10}$$

είναι πραγματικός και μη αρνητικός.

Μοναδιαίοι Αριθμοί (§§ 13-14)

13. Αν z δεν είναι πραγματικός, τότε η *διαφορά* $z-x$ του z και του πραγματικού του μέρους x ονομάζεται *γνήσιος φανταστικός* αριθμός iy. Τώρα ας στρέψουμε την προσοχή μας στον αριθμό u ο οποίος προκύπτει, κάπως παρόμοια, από τον σχηματισμό του πηλίκου ενός αριθμού $a \neq 0$ και της απόλυτης τιμής του $|a|$.

Από την εξίσωση

$$a = |a| u \quad (a \neq 0) \tag{13.1}$$

προκύπτει ότι

$$u\bar{u} = 1, \quad |u| = 1 \tag{13.2}$$

Οι αριθμοί u για τους οποίους η (13.2) ισχύει ονομάζονται *μοναδιαίοι* (δηλαδή με μέτρο ένα). Αν θέσουμε

$$u = x + iy, \quad \bar{u} = x - iy, \tag{13.3}$$

τότε βρίσκουμε

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{13.4}$$

έτσι ώστε οι μοναδιαίοι αριθμοί να μπορούν να χαρακτηριστούν από την εξίσωση (13.4). Ο μοναδιαίος αριθμός -1 ικανοποιεί την εξίσωση

$$-1 = \frac{i}{-i} = \frac{i}{i}. \tag{13.5}$$

Επιπλέον κάθε μοναδιαίος αριθμός u ικανοποιεί την

$$u(1+\bar{u}) = u + u\bar{u} = 1 + u$$

Έπεται ότι αν u είναι οποιοσδήποτε μοναδιαίος αριθμός εκτός από το -1, με άλλα λόγια αν

$$a = 1 + u \neq 0, \quad \bar{a} = 1 + \bar{u} \neq 0,$$

τότε ισχύει η ισότητα

$$u = \frac{1+u}{1+\bar{u}} = \frac{a}{\bar{a}} \quad (1 + u \neq 0) \tag{13.6}$$

Έτσι κάθε *μοναδιαίος αριθμός μπορεί να παρασταθεί ως το πηλίκο δυο μιγαδικών συζυγών, και κάθε τέτοιο πηλίκο παριστάνει έναν μοναδιαίο αριθμό.*

Σημειώνεται ότι αν u και υ είναι μοναδιαίοι, τότε είναι επίσης μοναδιαίοι και οι αριθμοί

$$\bar{u}, \quad 1/u, \quad u\upsilon, \quad u/\upsilon \tag{13.7}$$

14. Αν a και x είναι δυο οποιοιδήποτε διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί, τότε ο αριθμός

$$\frac{x-a}{\bar{x}-\bar{a}} \tag{14.1}$$

είναι μοναδιαίος. Αν, επιπροσθέτως, $|x| = 1$, τότε ο $-1/x$ είναι μοναδιαίος, οπότε το ίδιο ισχύει και για τον

$$y = \frac{-1}{x} \cdot \frac{x-a}{\bar{x}-\bar{a}} = \frac{a-x}{1-\bar{a}x}. \tag{14.2}$$

Σε όλα όσα ακολουθούν, θα υποθέσουμε ότι ισχύει

$$|a| \neq 1 \tag{14.3}$$

Τότε αν συγκρίνουμε την εξίσωση

$$y = \frac{a-x}{1-\bar{a}x} \tag{14.4}$$

με την λύση της ως προς x,

$$x = \frac{a-y}{1-\bar{a}y} \tag{14.5}$$

και παρατηρήσουμε ότι η κάθε μια από τις δυο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει η μια από την άλλη με εναλλαγή των x και y, βρίσκουμε ότι οι (14.4) και (14.5) δίνουν μια απεικόνιση ένα προς ένα του συνόλου των μοναδιαίων αριθμών στον εαυτό του.

Από την (14.4) επιπλέον παίρνουμε, για κάθε μιγαδικό αριθμό x διάφορο του $1/\bar{a}$:

$$|y|^2 = \frac{(a-x)(\bar{a}-\bar{x})}{(1-\bar{a}x)(1-a\bar{x})} \tag{14.6}$$

και

$$1-|y|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|x|^2\right)}{|1-\bar{a}x|^2} \tag{14.7}$$

Συνεπώς αν

$$|a| < 1 \tag{14.8}$$

οι δυο αριθμοί $\left(1-|x|^2\right)$ και $\left(1-|y|^2\right)$ θα έχουν το ίδιο πρόσημο. Έτσι οι εξισώσεις (14.4) και (14.5) απεικονίζουν κάθε αριθμό x του οποίου το μέτρο είναι ≤ 1 σε έναν αριθμό y που έχει την ίδια ιδιότητα, και μπορούμε με τον τρόπο αυτό να πάρουμε κάθε y για τον οποίο $|y| \leq 1$.

Θα δούμε στα επόμενα ότι ο μετασχηματισμός ή η απεικόνιση (14.4) επιδέχεται μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Στην σύνδεση αυτή θα είναι σημαντικό να έχουμε μια εκτίμηση του $|y|$ συναρτήσει των $|a|$ και $|x|$. Για να πάρουμε μια τέτοια εκτίμηση, αντικαθιστούμε τους αριθμούς a και x στην (14.4) με $|a|$ και $\pm|x|$ αντίστοιχα, εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$y_1 = \frac{|a|-|x|}{1-|a||x|}, \quad y_2 = \frac{|a|+|x|}{1+|a||x|} \tag{14.9}$$

και βρίσκουμε

$$1-y_1^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|x|^2\right)}{\left(1-|a||x|\right)^2}, \quad 1-y_2^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|x|^2\right)}{\left(1+|a||x|\right)^2}. \tag{14.10}$$

Αλλά από την (12.7), έχουμε

$$1-|a||x| \leq |1-\bar{a}x| \leq 1+|a||x|,$$

έτσι ώστε μια σύγκριση των (14.10) με την (14.7) δίνει τις σχέσεις

$$|y_1| \leq |y| \leq y_2 \leq 1,$$

η οποία μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\left||a|-|x|\right|}{1-|a||x|} \leq \frac{|a-x|}{|1-\bar{a}x|} \leq \frac{|a|+|x|}{1+|a||x|} \leq 1, \quad \left(|a|<1,\, 0 \leq |x| \leq 1\right). \tag{14.11}$$

Το Όρισμα ενός Μιγαδικού Αριθμού (§§ 15-17)

15. Οι μοναδιαίοι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει μιας πραγματικής παραμέτρου. Όσον αφορά την αναπαράσταση

$$u = \frac{a+ib}{a-ib} \quad \left(a,b \text{ πραγματικοί, } a^2+b^2>0\right) \tag{15.1}$$

ενός μοναδιαίου αριθμού u, ο αριθμός a είναι μηδέν αν και μόνο αν $u=-1$. Έτσι αν υποθέσουμε $u \neq -1$, μπορούμε να εισάγουμε τον συμβολισμό

$$t=\frac{b}{a} \qquad (t \text{ πραγματικός}) \tag{15.2}$$

και προκύπτει

$$u=\frac{1+it}{1-it}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+i\frac{2t}{1+t^2}. \tag{15.3}$$

Αν ο

$$u'=\frac{1+it'}{1-it'} \tag{15.4}$$

παριστάνει έναν τέτοιο μοναδιαίο αριθμό, βρίσκουμε

$$u-u'=\frac{2i(t-t')}{(1-it)(1-it')}, \tag{15.5}$$

η οποία δείχνει ότι $u'=u$ αν και μόνο αν $t'=t$. Συνεπώς οι μοναδιαίοι αριθμοί εκτός του -1 μπορούν να απεικονιστούν ένας προς έναν επί του πραγματικό άξονα t.

16. Αν προϋποθέσουμε την θεωρία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο πραγματικό πεδίο, μπορούμε να πάρουμε μια πιο χρήσιμη απεικόνιση των μοναδιαίων αριθμών επί του πραγματικού άξονα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τιμή του t έναν πραγματικό αριθμό ϑ που ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{\vartheta}{2}=\operatorname{arctg}t \qquad (-\pi<\vartheta<\pi) \tag{16.1}$$

Τούτο δίνει

$$t=\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \tag{16.2}$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}}=\cos\vartheta, \quad \frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}}=\sin\vartheta \tag{16.3}$$

και η εξίσωση (15.3) παίρνει την μορφή

$$u=\cos\vartheta+i\sin\vartheta. \tag{16.4}$$

Αντιστρόφως μπορούμε να αποδείξουμε ότι το δεξιό μέλος της τελευταίας εξίσωσης παριστάνει έναν μοναδιαίο αριθμό για κάθε τιμή του ϑ. Ο αριθμός ϑ ονομάζεται *μέτρο* (amplitute) ή *όρισμα* (argument), του μιγαδικού αριθμού u.

Αν ϑ_0 είναι το όρισμα του μοναδιαίου αριθμού u, τότε εξαιτίας της περιοδικότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ο αριθμός u έχει άπειρο πλήθος επιπλέον ορισμάτων, συγκεκριμένα τους αριθμούς

$$\vartheta=\vartheta_0+2k\pi, \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{16.5}$$

Μεταξύ αυτών, υπάρχει ακριβώς ένα «*πρωτεύον όρισμα*», με το οποίο εννοούμε το όρισμα που περιέχεται στο ημι – ανοικτό διάστημα

$$-\pi<\vartheta\leq\pi. \tag{16.6}$$

17. Όταν πολλαπλασιάζουμε μοναδιαίους αριθμούς, προσθέτουμε τα ορίσματά τους. Έτσι ώστε αν

$$u_1=\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1, \quad u_2=\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2, \tag{17.1}$$

τότε

$$u_1u_2 = (\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1)$$

$$= \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) \qquad (17.2)$$

Στο επόμενο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου (από §234 και μετά) θα ορίσουμε τις συναρτήσεις $e^z, \cos z, \sin z$ για αυθαίρετες μιγαδικές τιμές του z και θα αποδείξουμε την ταυτότητα

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,. \qquad (17.3)$$

Δεν υπάρχει τίποτε που να μας αποτρέπει στο σημείο αυτό από την εισαγωγή του συμβόλου e^{iz} ως μια *βολική συντόμευση* για τον μοναδιαίο αριθμό $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$. Στον συμβολισμό αυτό, η συναρτησιακή σχέση που εκφράζεται από τις (17.1) και (17.2) παίρνει την μορφή

$$e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} = e^{i\vartheta_1}e^{i\vartheta_2}\,. \qquad (17.4)$$

Ρίζες (§§ 18-19)

18. Έστω a ένας αυθαίρετος μιγαδικός αριθμός $\neq 0$, και έστω n ένας αυθαίρετος φυσικός αριθμός. Προτιθέμεθα να υπολογίσουμε όλες τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^n = a\,. \qquad (18.1)$$

Αν θέσουμε

$$a = |a|e^{i\vartheta} = |a|e^{i(\vartheta+2k\pi)} \quad (k = 0,1,\ldots) \qquad (18.2)$$

και

$$z = |z|e^{i\varphi}\,, \qquad (18.3)$$

τότε πρέπει να ισχύουν οι

$$|z|^n = |a| \quad \text{και} \quad n\varphi = \vartheta + 2k\pi \qquad (18.4)$$

Η παραπάνω προσδιορίζει μοναδικά το

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \qquad (18.5)$$

Μεταξύ των αριθμών

$$\varphi_k = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,1,\cdots) \qquad (18.6)$$

υπάρχουν ωστόσο n αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους, συγκεκριμένα οι

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1} \qquad (18.7)$$

οι οποίοι όταν αντικαθίστανται στην θέση του φ στην (18.3) δίνουν n διαφορετικές λύσεις της (18.1). Έτσι εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι η (18.1) δεν έχει επιπλέον λύσεις.

19. Αν θέσουμε $a = 1$ στην (18.1), παίρνουμε την εξίσωση

$$z^n = 1\,, \qquad (19.1)$$

κάθε ρίζα της οποίας, εκτός του ίδιου του 1, ονομάζεται *ρίζα της μονάδας*. Από τις (18.5) και (18.6) έχουμε

$$|z| = 1, \quad \varphi_k = \frac{2k\pi}{n}\,, \qquad (19.2)$$

έτσι ώστε

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}\,, \quad (k = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (19.3)$$

Οπότε για $n = 2,4,8$ και $k = 1$, βρίσκουμε

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}. \tag{19.4}$$

Για $n = 3$, έχουμε

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) \tag{19.5}$$

Έτσι οι τρίτες ρίζες της μονάδας είναι απλά οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Από αυτή, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (19.4), υπολογίζουμε διαδοχικά τις ποσότητες

$$\left.\begin{aligned}
e^{\frac{2i\pi}{3}} &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\
e^{\frac{i\pi}{3}} &= e^{i\pi - \frac{2i\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \\
e^{\frac{i\pi}{12}} &= e^{\frac{i\pi}{3} - \frac{i\pi}{4}} = \frac{(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} \\
e^{\frac{i\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{19.6}$$